

# Two Velocity Potential Descriptions for Fluid Sloshing in Moving Tanks and Their Equivalence Proof

Qi Hu\*, Yuchun Li

Department of Hydraulic Engineering, Tongji University, Shanghai  
Email: \*huqi0605@gmail.com, ycl2000@tongji.edu.cn

Received: Jun. 7<sup>th</sup>, 2016; accepted: Jun. 25<sup>th</sup>, 2016; published: Jun. 28<sup>th</sup>, 2016

Copyright © 2016 by authors and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

---

## Abstract

In the existing literature, there were two different velocity potential functions being used in the different engineering disciplines for describing the motions of ideal fluid in the moving tanks. The resulting equations of motion were not identical. However, the two different velocity potentials were both called “velocity potential function” in the different engineering disciplines. It might result in a theoretical confusion in the interdisciplinary researches. This issue seemed not being clarified in the existing literatures. This paper will respectively propose the “absolute velocity potential” and the “relative velocity potential” to establish the motion equations of fluid, and prove the equivalence of the two descriptions. For the earthquake engineering, the “absolute velocity potential” and “relative velocity potential” are respectively suitable for describing the motions of fluids subjected to velocity and acceleration (seismic) excitations.

## Keywords

Seismic Excitation, Liquid, Two-Dimensional Sloshing, Velocity Potential Function

---

# 移动容器中液体晃动的二种速度势描述及其等价性证明

胡 奇\*, 李遇春

\*通讯作者。

同济大学水利工程系, 上海  
Email: \*huqi0605@gmail.com, ycl2000@tongji.edu.cn

收稿日期: 2016年6月7日; 录用日期: 2016年6月25日; 发布日期: 2016年6月28日

## 摘要

不同的工程学科采用二种不同的速度势函数来描述运动容器中理想流体的晃动, 所得到的运动方程不尽相同, 然而这二个速度势不加区分地都称为“速度势函数”, 这会给跨学科的研究带来理论上的混乱, 这一问题在现有文献中似乎并未得到澄清。本文采用“相对速度势”与“绝对速度势”分别建立了运动容器中液体的晃动方程, 证明了二种速度势方程的等价性, 对于地震工程而言, “绝对速度势”与“相对速度势”分别适用于容器的地震激励为速度与加速度的情形。

## 关键词

地震作用, 液体, 二维晃动, 速度势函数

## 1. 引言

工程中存在许多贮液结构物, 如: 大型的液化气罐、水塔、渡槽、水库(水坝)、反应堆冷却水柜等, 在地震作用时, 液体容器整体随大地一起作(加速)牵连运动, 容器的运动成为液体晃动的激励源, 从而引发结构物内含液体的晃动, 贮液结构设计需要了解液体晃动对结构的作用效应, 需要研究作用在容器壁上的液动压力、自由表面上的波高反应等, 液体的强迫晃动分析是贮液结构设计中不能回避的问题。

在研究容器内液体晃动时, 通常将描述液体运动的坐标系固定在容器上, 这样观测液体运动更为直观、方便, 这个牵连运动坐标系称为加速坐标系, 或非惯性坐标系, 运动容器内晃动的液体可假设为不可压缩的、无旋的理想流体, 因而液体的运动可采用速度势函数来描述[1]-[3]。由于众多的研究者所处的工程学科不同, 研究者通常按照二种不同的速度势函数来描述理想流体运动, 一种采用绝对速度势函数, 另一种采用相对速度势函数, 所得到的方程具有不同形式。然而不同学科的研究者将两个不同的速度势函数不加区分地统称之为“速度势函数”, 这容易引起理论上的混乱, 使得跨学科的液体晃动问题研究者迷惑不解, 这一问题在现有文献中似未得到澄清。在地震工程领域, 现有文献[4]-[7]通常直接给出液体晃动控制方程, 而一般并不说明控制方程是如何得到的, 这不利于研究者(读者)对液体晃动问题的深刻理解。本文将区分二种速度势函数, 并分别采用相对速度势与绝对速度势函数详细给出理想液体的晃动方程, 并证明二种速度势描述的等价性, 同时指出二种速度势适合应用的范围, 为液体晃动动力学的研究者提供参考。

## 2. 相对速度势描述运动(牵连)坐标下的流体运动

如图 1 所示, 设静止不动的绝对坐标系为, 固定在容器上的运动坐标系为, 设坐标平面与液体静止自由表面相重合, 地震作用时, 容器上的牵连坐标系随大地一起运动, 与绝对坐标系为产生一个相对平动, 假定初始时牵连坐标与绝对坐标相重合, 即: 牵连坐标的三个坐标轴始终与绝对坐标对应的三个坐标轴相平行, 设运动坐标系原点在下所观测到的矢径为, 在绝对坐标系下所观察到的牵连坐标系的平动速度和加速度为, 它们可以分别表示为:

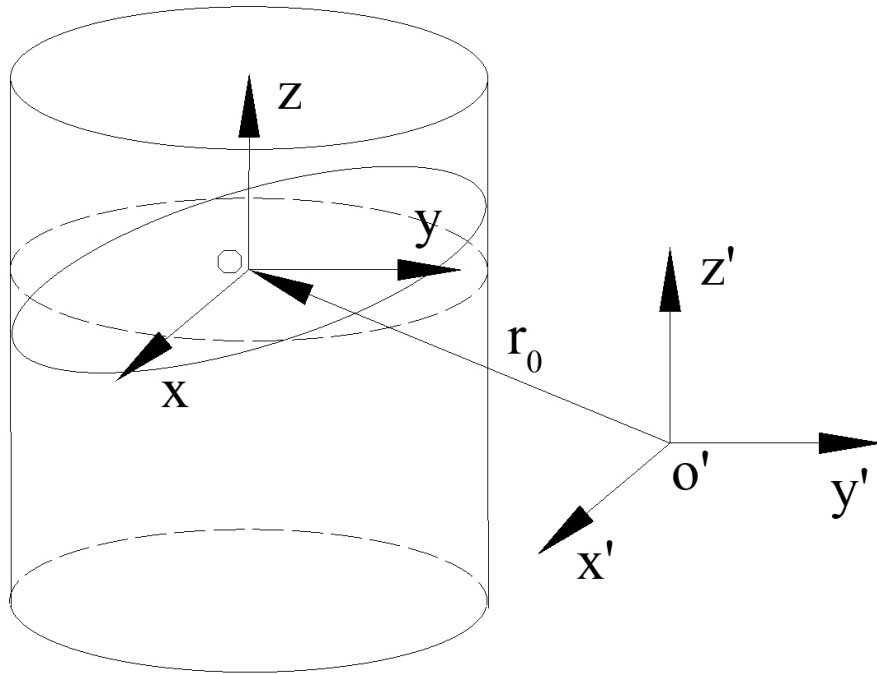


Figure 1. Absolute coordinate system  $o'x'y'z'$  and relative coordinate system  $oxyz$   
 图 1. 绝对坐标系  $o'x'y'z'$  与牵连(运动)坐标系  $oxyz$

$$\begin{cases} \mathbf{v}_o = \frac{d\mathbf{r}_o}{dt} = \dot{G}_x(t)\mathbf{i} + \dot{G}_y(t)\mathbf{j} + \dot{G}_z(t)\mathbf{k} \\ \mathbf{a}_o = \frac{d^2\mathbf{r}_o}{dt^2} = \ddot{G}_x(t)\mathbf{i} + \ddot{G}_y(t)\mathbf{j} + \ddot{G}_z(t)\mathbf{k} \end{cases} \quad (1)$$

式中:  $\dot{G}_x(t), \dot{G}_y(t)$  与  $\dot{G}_z(t)$  分别为牵连平动速度在  $x, y, z$  方向上的三个分量;  $\ddot{G}_x(t), \ddot{G}_y(t)$  与  $\ddot{G}_z(t)$  分别为牵连平动加速度的三个分量,  $\mathbf{i}, \mathbf{j}$  与  $\mathbf{k}$  为绝对坐标下的基向量, 由于牵连坐标与绝对坐标的三个坐标轴相互平行, 因此牵连坐标  $oxyz$  下的基向量也可由  $\mathbf{i}, \mathbf{j}$  与  $\mathbf{k}$  表示。对于液体晃动的地震响应分析而言,  $\ddot{G}_x(t), \ddot{G}_y(t)$  可分别看成  $x, y$  方向的水平加速度作用分量,  $\ddot{G}_z(t)$  看成竖向( $z$  方向)加速度作用分量。在牵连坐标系下的所观察到液体粒子的相对速度与加速度分别为  $\mathbf{v}_r$  及  $\mathbf{a}_r$ , 于是液体粒子的绝对速度  $\mathbf{v}$  与加速度  $\mathbf{a}$  可以分别表达为:

$$\begin{cases} \mathbf{v} = \mathbf{v}_o + \mathbf{v}_r \\ \mathbf{a} = \mathbf{a}_o + \mathbf{a}_r \end{cases} \quad (2)$$

相对加速度  $\mathbf{a}_r$  可以由相对速度  $\mathbf{v}_r$  表示为:

$$\mathbf{a}_r = \frac{d\mathbf{v}_r}{dt} = \frac{\partial \mathbf{v}_r}{\partial t} + (\mathbf{v}_r \cdot \nabla) \mathbf{v}_r \quad (3)$$

那么绝对加速度可以表示为:  $\mathbf{a} = \mathbf{a}_o + \frac{\partial \mathbf{v}_r}{\partial t} + (\mathbf{v}_r \cdot \nabla) \mathbf{v}_r$ , 于是牵连相对坐标系下的理想流体的 Euler 方程可以表示为:

$$\frac{1}{\rho} \nabla p + \mathbf{a}_o + \frac{\partial \mathbf{v}_r}{\partial t} + (\mathbf{v}_r \cdot \nabla) \mathbf{v}_r + \nabla(gz) = 0 \quad (4)$$

其中:  $p$  为液体压力,  $\rho$  为液体密度,  $g$  为重力加速度,  $\nabla(gz)$  表示由液体重力产生质量力。在牵连相对坐标系下, 不可压缩的理想流体的连续性方程依然成立[6]:

$$\nabla \mathbf{v}_r = \frac{\partial v_{rx}}{\partial x} + \frac{\partial v_{ry}}{\partial y} + \frac{\partial v_{rz}}{\partial z} = 0 \quad (5)$$

这里:  $v_{rx}$ ,  $v_{ry}$  与  $v_{rz}$  表示相对速度  $\mathbf{v}_r$  沿坐标  $x, y, z$  的三个分量。牵连相对坐标系下的液体可看成无旋流体(势流), 其相对速度可表达为:

$$\mathbf{v}_r = \nabla \Phi_r \quad (6)$$

这里  $\Phi_r$  为相对速度势函数,

$$\nabla^2 \Phi_r = 0 \quad (7)$$

这里  $\Phi_r$  为相对速度势函数, 将(6)式代入(5)式, 得:

$$\mathbf{v}_r = \nabla \Phi_r \quad (6)$$

将(6)式代入(5)式, 得:

$$\nabla^2 \Phi_r = 0 \quad (7)$$

上式为相对速度势所表示的液体运动控制方程, 在牵连相对坐标系下, 将(6)式代入方程(4), 通过积分得到 Bernoulli 方程为:

$$\frac{p}{\rho} + \frac{\partial \Phi_r}{\partial t} + \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial \Phi_r}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \Phi_r}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial \Phi_r}{\partial z} \right)^2 \right] + x\ddot{G}_x(t) + y\ddot{G}_y(t) + z\ddot{G}_z(t) + gz = 0 \quad (8)$$

注意到, 上面的推导过程中, 应用了矢量分析公式:

$$(\mathbf{v}_r \cdot \nabla) \mathbf{v}_r = \frac{1}{2} \nabla (\mathbf{v}_r \cdot \mathbf{v}_r) - \mathbf{v}_r \times (\nabla \times \mathbf{v}_r) = \frac{1}{2} \nabla (\mathbf{v}_r \cdot \mathbf{v}_r) = \frac{1}{2} \nabla (v_{rx}^2 + v_{ry}^2 + v_{rz}^2) \quad (9)$$

在液体与结构的湿交界面  $\partial S_w$  上, 有下列关系:

$$\left. \frac{\partial \Phi_r}{\partial n} \right|_{\partial S_w} = v_n \quad (10)$$

其中:  $v_n$  表示在牵连相对坐标系下所观察到的弹性容器表面的法向速度。设在牵连相对坐标系  $oxyz$  下所观察到的液面波高函数为  $z = h(x, y, t)$ , 则液体自由表面的运动学边界条件可由相对速度势函数  $\Phi_r$  与波高函数  $h$  表示如下:

$$\left. \frac{\partial \Phi_r}{\partial z} \right|_{z=h} = \left( \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial h}{\partial x} \frac{\partial \Phi_r}{\partial x} + \frac{\partial h}{\partial y} \frac{\partial \Phi_r}{\partial y} \right) \Big|_{z=h} \quad (11)$$

根据 Bernoulli 方程(8), 设自由表面压力为零:  $p|_{z=h} = 0$ , 于是液体自由表面的动力学边界条件可以写为:

$$\left. \frac{\partial \Phi_r}{\partial t} \right|_{z=h} + \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial \Phi_r}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \Phi_r}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial \Phi_r}{\partial z} \right)^2 \right] \Big|_{z=h} + x\ddot{G}_x(t) + y\ddot{G}_y(t) + h\ddot{G}_z(t) + gh = 0 \quad (12)$$

以上方程(7)与方程(10)、(11)及(12)分别为相对速度势  $\Phi_r$  所表达的液体运动控制方程与完整的边界条件。从这些运动方程可以看出, 驱动液体晃动的外部激励仅在自由表面动力学边界条件(12)中反映, 外部

激励表现为容器的三向加速度  $\ddot{G}_x(t)$ ,  $\ddot{G}_y(t)$  与  $\ddot{G}_z(t)$ , 由于地动加速度通常作为地震的激励源, 因此采用相对速度势的描述方法进行地震反应分析显得非常方便, 在许多贮液容器的地震反应分析中, 例如文献 [4]-[7], 一般均采用相对速度势的表述方法。

### 3. 绝对速度势描述运动(牵连)坐标下的流体运动

在运动坐标系  $oxyz$  下观测液体的绝对速度, 则绝对速度可以表示为:  $\mathbf{v} = \mathbf{v}(x, y, z, t)$ , 其分量为  $v_x = v_x(x, y, z, t)$ 、 $v_y = v_y(x, y, z, t)$  及  $v_z = v_z(x, y, z, t)$ , 液体的绝对加速度分量可以表达为[6]:

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v}_r \cdot \nabla) \mathbf{v} \quad (13)$$

根据速度合成定理:

$$\mathbf{v}_r = \mathbf{v} - \mathbf{v}_o \quad (14)$$

将(14)式代入方程(13), 绝对加速度可以表示为:  $\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + [(\mathbf{v} - \mathbf{v}_o) \cdot \nabla] \mathbf{v}$ , 于是牵连相对坐标系下理想流体的 Euler 方程可以表示为下列形式:

$$\frac{1}{\rho} \nabla p + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + [(\mathbf{v} - \mathbf{v}_o) \cdot \nabla] \mathbf{v} + \nabla(gz) = \mathbf{0} \quad (15)$$

注意到牵连速度  $\mathbf{v}_o$  仅为时间  $t$  的函数, 利用矢量分析公式:  $(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = \frac{1}{2} \nabla(\mathbf{v} \cdot \mathbf{v})$ , (15)式可进一步写为:

$$\frac{1}{\rho} \nabla p + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \frac{1}{2} \nabla(\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}) - \mathbf{v}_o \cdot \nabla \mathbf{v} + \nabla(gz) = \mathbf{0} \quad (16)$$

液体绝对运动速度  $\mathbf{v} = \mathbf{v}(x, y, z, t)$  在牵连相对坐标系下可看成是无旋的, 于是可采用绝对速度势函数  $\Phi = \Phi(x, y, z, t)$  来表示绝对速度  $\mathbf{v}$ , 即:

$$\mathbf{v} = \nabla \Phi \quad (17)$$

在牵连相对坐标系下观察液体绝对速度  $\mathbf{v}$ , 液体的连续性方程依然成立[8], 即有:

$$\nabla \mathbf{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0 \quad (18)$$

将(17)式代入(18)式, 得:

$$\nabla^2 \Phi = 0 \quad (19)$$

上式为绝对速度势所表示的液体运动控制方程。将(17)式代入(16)式并进行积分, 可得到 Bernoulli 方程为:

$$\frac{p}{\rho} + \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{1}{2} (\nabla \Phi)^2 - \mathbf{v}_o \cdot \nabla \Phi + gz = 0 \quad (20)$$

在牵连相对坐标系下, 在液体与结构的湿交界面  $\partial S_w$  上, 有下列关系:

$$\left. \frac{\partial \Phi}{\partial n} \right|_{\partial S_w} = \mathbf{v}_o \cdot \mathbf{n} + v_n \quad (21)$$

其中:  $\mathbf{n}$  表示湿交界面的法向量,  $v_n$  表示在牵连相对坐标系下所观察到的弹性容器壁的法向速度, (21)式表明液体在交界面上的法向绝对速度等于该方向上的牵连速度加上其相对速度。设牵连相对坐标系

$oxyz$  下所观察到的液面波高函数为  $z = h(x, y, t)$ , 则任一时刻的液体自由表面(曲面)可由下列方程表示:

$$F(x, y, z, t) = z - h(x, y, t) = 0 \quad (22)$$

根据微分学原理, 液体表(曲)面上的单位法线向量  $\mathbf{n}$  由函数  $F(x, y, z, t)$  的梯度确定, 即:

$$\mathbf{n} = \frac{\nabla F}{|\nabla F|} \quad (23)$$

其中:

$$\begin{cases} \nabla F = \frac{\partial F}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial F}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial F}{\partial z} \mathbf{k} = -\frac{\partial h}{\partial x} \mathbf{i} - \frac{\partial h}{\partial y} \mathbf{j} + \mathbf{k} \\ |\nabla F| = \sqrt{\left(\frac{\partial h}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial h}{\partial y}\right)^2 + 1} \end{cases} \quad (24)$$

在牵连坐标系里, 观察到自由表面  $\partial S_f$  上液体粒子的速度为  $\mathbf{v}_r = \mathbf{v} - \mathbf{v}_o = \nabla \Phi - \mathbf{v}_o$ , 同时由自由表面波高函数  $z = h(x, y, t)$  计算得到的液体粒子的速度为  $\partial h / \partial t = h_t$ , 这个速度指向坐标轴  $z$  的正向, 它的方向可由单位向量表达为  $\mathbf{n}_z = (0, 0, 1)^T$ , 于是这个速度可以写为  $h_t \mathbf{n}_z$ , 描述同一点的两个速度值在曲面上的法向投影(或分量)应相等, 即:

$$(\nabla \Phi - \mathbf{v}_o) \cdot \mathbf{n} = \left( \frac{\partial h}{\partial t} \mathbf{n}_z \right) \cdot \mathbf{n} \quad (25)$$

将(23)式代入(25)式, 得到由绝对速度势函数  $\Phi$  表述的自由表面运动学边界条件为:

$$\nabla \Phi \cdot \mathbf{n} \Big|_{\partial S_f} = \left( \mathbf{v}_o \cdot \mathbf{n} + \frac{h_t}{|\nabla F|} \right) \Big|_{\partial S_f} \quad (26)$$

根据 Bernoulli 方程(20), 得绝对速度势函数  $\Phi$  表述的自由表面动力学边界条件为:

$$\left[ \frac{p}{\rho} + \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{1}{2} (\nabla \Phi)^2 - \mathbf{v}_o \cdot \nabla \Phi \right] \Big|_{\partial S_f} + gh = 0 \quad (27)$$

方程(19)与方程(21)、(26)及(27)分别为绝对速度势  $\Phi$  所表达的液体运动控制方程与完整的边界条件。由以上运动方程可以看出, 驱动液体晃动的外部激励在边界条件(21)、(26)与(27)中反映, 外部激励表现为容器的牵连速度  $\mathbf{v}_o = \dot{G}_x(t) \mathbf{i} + \dot{G}_y(t) \mathbf{j} + \dot{G}_z(t) \mathbf{k}$ , 在航天与船舶工程中[1]-[3] [8], 一般都采用绝对速度势  $\Phi$  的表述方法。对于地震工程而言, 若已知地震动三个方向的速度分量  $\dot{G}_x(t), \dot{G}_y(t), \dot{G}_z(t)$ , 则采用绝对速度势  $\Phi$  来描述液体晃动将更为方便。

#### 4. 二种速度势描述的等价性证明

从绝对速度势所描述的液体运动方程出发, 可以导出相对速度势所描述的液体运动方程, 将绝对速度势函数分解为牵连速度势  $\Phi_o$  与相对速度势  $\Phi_r$  之和:

$$\Phi = \Phi_o + \Phi_r \quad (28)$$

液体的牵连速度  $\mathbf{v}_o$  与相对速度  $\mathbf{v}_r$  可分别由牵连速度势  $\Phi_o$  与相对速度势  $\Phi_r$  表达为:

$$\begin{cases} \mathbf{v}_o = \nabla \Phi_o \\ \mathbf{v}_r = \nabla \Phi_r \end{cases} \quad (29)$$

注意到牵连速度  $\mathbf{v}_o$  仅为时间  $t$  的函数, 将(28)式代入(19)式, 得:

$$\nabla^2 \Phi = \nabla(\nabla \Phi_o + \nabla \Phi_r) = \nabla(\mathbf{v}_o + \nabla \Phi_r) = \nabla^2 \Phi_r = 0$$

所以:

$$\nabla^2 \Phi_r = 0 \quad (30)$$

将(28)式代入(21)式, 并利用条件  $\partial \Phi_o / \partial n|_{\partial S_w} = \mathbf{v}_o \cdot \mathbf{n}$ , 得到湿边界条件为:

$$\left. \frac{\partial \Phi_r}{\partial n} \right|_{\partial S_w} = v_n \quad (31)$$

将(28)式代入自由表面运动学条件(26)式, 并利用(23)、(24)及(29)式, 得:

$$\left( \frac{\partial \Phi_r}{\partial z} \right)_{\partial S_f} = \left( \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial \Phi_r}{\partial x} \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{\partial \Phi_r}{\partial y} \frac{\partial h}{\partial y} \right)_{\partial S_f} \quad (32)$$

将  $\mathbf{v} = \nabla \Phi = \nabla \Phi_o + \nabla \Phi_r$  代入(16)式, 并注意到  $\mathbf{v}_o = \nabla \Phi_o$  与坐标无关, 展开得到:

$$\nabla \left[ \frac{p}{\rho} + \frac{\partial \Phi_r}{\partial t} + \frac{1}{2} (\nabla \Phi_r)^2 + gz \right] + \nabla \left( \frac{\partial \Phi_o}{\partial t} \right) - \nabla \left[ \frac{1}{2} (\nabla \Phi_o)^2 \right] = 0 \quad (33)$$

其中:

$$\nabla \left( \frac{\partial \Phi_o}{\partial t} \right) = \frac{\partial (\nabla \Phi_o)}{\partial t} = \frac{\partial \mathbf{v}_o}{\partial t} = \mathbf{a}_o = \nabla (\mathbf{a}_o \cdot \mathbf{r}) = \nabla [x \ddot{G}_x(t) + y \ddot{G}_y(t) + z \ddot{G}_z(t)] \quad (34)$$

注意到  $(\nabla \Phi_o)^2$  仅为时间  $t$  的函数, 所以:  $\nabla \left[ \frac{1}{2} (\nabla \Phi_o)^2 \right] = 0$ , 于是(33)式可以重写为:

$$\nabla \left[ \frac{p}{\rho} + \frac{\partial \Phi_r}{\partial t} + \frac{1}{2} (\nabla \Phi_r)^2 + x \ddot{G}_x(t) + y \ddot{G}_y(t) + z \ddot{G}_z(t) + gz \right] = 0 \quad (35)$$

于是 Bernoulli 方程为:

$$\frac{p}{\rho} + \frac{\partial \Phi_r}{\partial t} + \frac{1}{2} (\nabla \Phi_r)^2 + x \ddot{G}_x(t) + y \ddot{G}_y(t) + z \ddot{G}_z(t) + gz = 0 \quad (36)$$

所以自由表面上动力学边界条件为:

$$\left. \frac{\partial \Phi_r}{\partial t} \right|_{z=h} + \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial \Phi_r}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \Phi_r}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial \Phi_r}{\partial z} \right)^2 \right]_{z=h} + x \ddot{G}_x(t) + y \ddot{G}_y(t) + h \ddot{G}_z(t) + gh = 0 \quad (37)$$

由此可以看出描述液体运动的基本方程(30)、(31)、(32)与(37)分别与相对速度势所描述的液体运动方程(7)、(10)、(11)与(12)完全相同, 由此证明了二种描述方法的等价性。

## 5. 结论

本文采用相对速度势与绝对速度势函数分别建立了运动容器中液体的晃动方程, 证明了二种速度势方程的等价性, 对于地震工程而言, 当已知容器的激励速度时, 宜采用绝对速度势描述液体的运动, 当已知容器的激励加速度时, 宜采用相对速度势描述液体的运动。

## 基金项目

国家自然科学基金资助项目(51279133)。

## 参考文献 (References)

- [1] Dodge, F.T. (2000) The New “Dynamic Behavior of Liquids in Moving Containers”. Southwest Research Institute, San Antonio.
- [2] Ibrahim, R.A. (2005) Liquid Sloshing Dynamics: Theory and Applications. Cambridge University Press, Cambridge. <http://dx.doi.org/10.1017/CBO9780511536656>
- [3] Faltinsen, O.M. and Timokha, A.N. (2009) Sloshing. Cambridge University Press, Cambridge.
- [4] Chen, W., Haroun, M.A. and Liu, F. (1996) Large Amplitude Liquid Sloshing in Seismically Excited Tanks. *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, **25**, 653-669. [http://dx.doi.org/10.1002/\(SICI\)1096-9845\(199607\)25:7<653::AID-EQE513>3.0.CO;2-H](http://dx.doi.org/10.1002/(SICI)1096-9845(199607)25:7<653::AID-EQE513>3.0.CO;2-H)
- [5] Ikeda, T., Ibrahim, R.A., Harata, Y. and Kuriyama, T. (2012) Nonlinear Liquid Sloshing in a Square Tank Subjected to Obliquely Horizontal Excitation. *Journal of Fluid Mechanics*, **700**, 304-328. <http://dx.doi.org/10.1017/jfm.2012.133>
- [6] Li, Y. and Wang, J. (2012) A Supplementary, Exact Solution of an Equivalent Mechanical Model for a Sloshing Fluid in a Rectangular Tank. *Journal of Fluids and Structures*, **31**, 147-151. <http://dx.doi.org/10.1016/j.jfluidstructs.2012.02.012>
- [7] Li, Y., Di, Q. and Gong, Y. (2012) Equivalent Mechanical Models of Sloshing Fluid in Arbitrary-Section Aqueducts. *Earthquake Engineering & Structural Dynamics*, **41**, 1069-1087. <http://dx.doi.org/10.1002/eqe.1173>
- [8] 王照林, 刘延柱. 充液系统动力学[M]. 北京: 科学出版社, 2002.