

Application of Viscoelasticity Mechanics into Uniaxial Tensile Test of High Temperature Cast Alloy*

Hongliang Tian, Dalin Zhu, Hongling Qin

College of Mechanical and Material Engineering, China Three Gorges University, Yichang
Email: thl19732003@yahoo.com.cn

Received: Nov. 12th, 2012; revised: Nov. 22nd, 2012; accepted: Dec. 8th, 2012

Abstract: The stress-strain differential constitutive relation was given for Kelvin chain. On the basis of all the initial conditions taken into account, the general solutions of total strain were derived for Burgers fluid with 4 parameters and Kelvin-Maxwell model with 6 ones under the step function uniaxial stress. Both Burgers fluid with 4 parameters and Kelvin-Maxwell model with 6 ones could approximately describe the former two stages of creep curve but not reflect the third stage. Numerical calculation for cast Mar-M200 alloy creep curve shows that two theory's predictions are in good agreement with test measurement results, especially the maximum relative error of Kelvin-Maxwell model with 6 parameters is only 5.4765779%.

Keywords: Maxwell Model; Kelvin Model; Creep Curve; Stress-Strain Differential Constitutive Relation

粘弹性力学在高温铸造合金单向拉伸试验中的应用*

田红亮, 朱大林, 秦红玲

三峡大学机械与材料学院, 宜昌
Email: thl19732003@yahoo.com.cn

收稿日期: 2012年11月12日; 修回日期: 2012年11月22日; 录用日期: 2012年12月8日

摘要: 给出了 Kelvin 链的应力 - 应变微分型本构关系。全面考虑初始条件, 推导了 Burgers 四参量流体、Kelvin-Maxwell 六参量模型在阶跃函数单向应力作用下的总应变通解。Burgers 四参量流体、Kelvin-Maxwell 六参量模型都可以近似地描述金属材料蠕变曲线的前两个阶段, 但都不能反映第三个阶段。铸造 Mar-M200 合金蠕变曲线的计算表明, 两种理论预测与实验测量的结果的一致性较好, 特别是 Kelvin-Maxwell 六参量模型的最大相对误差仅为 5.4765779%。

关键词: 麦克斯韦模型; 开尔文模型; 蠕变曲线; 应力 - 应变微分型本构关系

1. 引言

当物体处于平衡状态时, 其内部各点的应力状态在边界上应满足边界条件。边界条件可能有三种情况: 1) 在边界上给定面力称为应力边界条件; 2) 在边界上给定位移称为位移边界条件; 3) 在边界上部分给定面力, 部分给定位移称为混合边界条件。弹性力

学的解析解在理论上很有价值。弹性力学乃至绝大多数科学理论的公式, 其实本身也有其很多近似与简化(指的是适当的简化, 不是过分的简化。理论是与实际存在一定差距的简化描述, 为了实现理论符合实际, 人们总是试图少简化甚至不简化)之处, 例如认为某些系数是常数, 这并不影响其严格解析解的重大意义。圆柱壳的临界屈曲应变对边界条件是不敏感的^[1]。当圆柱壳的长度 $L > 2r$ 时, 边界条件对临界屈曲载荷的

*资助信息: 国家自然科学基金(项目批准号: 51275273), 以及三峡大学博士科研启动基金(项目编号: KJ2012B013)的资助。

大小影响很小, 较长圆柱壳方程的解和边界条件的类型是无关的^[2]。除此两种特殊情况以外, 一般而言, 边界条件对解析解具有很大的影响。

目前在粘弹性力学边界条件的研究现状中存在 2 个不足。第一个不足是错误定义边界条件或不考虑初始条件或对初始条件处理不彻底或过分简化(如果在不过分简化的情况下能得到解析解, 就不要简化)初始条件, 例如文献[3]错误定义了非局部弹性理论的边界条件; 文献[4]认为两自由度阻尼系统的初始条件为静止, 求其响应; 文献[5-7]对初始条件处理不彻底, 将粘弹性薄板自由振动定性分为幅值呈指数衰减的简谐振动和非周期性蠕变两种, 故得到粘弹性薄板强迫振动的解析解任重道远; Timoshenko^[8]在 1932 年摆脱了 Euler-Bernoulli 假定(梁在受力弯曲后, 其原来的横截面仍为平面, 并绕垂直于纵对称面的某一轴旋转, 且仍垂直于梁变形后的轴线)的束缚提出了剪切梁理论, Timoshenko 梁考虑了横向剪切变形, 是 Euler-Bernoulli 梁的推广, 也许受到了 Timoshenko 取得辉煌成就的激励, 文献[9]首次开创性地里程碑式地试图摆脱 Kirchhoff-Love 假定(1850 年提出, 变形前垂直于中面的任一直线线段, 变形后, 仍为直线, 并垂直于变形后的弹性曲面, 且长度不变; 垂直于板中面方向的应力较小, 可略去不计)、Navier 的二重正弦级数(1820 年以报告形式提交给法国科学院, 1823 年对外公布, 开创了弯曲薄板理论问题求解的先河)、Levy 在 1899 年提出的半幅的单傅里叶正弦级数的束缚, 给出薄板弯曲的严格(无任何近似)简明(无任何无限级数与特殊函数)解析解, 如果能真正得到薄板弯曲的严格简明确解, 那将是弹性力学薄板理论的一次划时代进步, 可惜此文除了存在一些基本运算的错误之外, 最致命的缺陷是对初始条件处理不彻底, 没有给出挠度通解(赫赫有名的 Navier 二重正弦级数、Levy 的半幅的单傅里叶正弦级数都给出了挠度的精确通解), 仔细研究此文后发现, 满足初始条件后得到平板法向位移的待求系数方程组无解; 文献[10-12]过分简化了应变边界条件; 由于双壁碳纳米管的半径通常至少为几纳米, 内外管半径的差值与双壁碳纳米管的半径相比非常小, 因此文献[13]认为内外管半径的差值可以忽略不计, 令 $R_1 \approx R_2$ 。文献[14]采用过分简化关系式 $R_1 \approx R_2$ 时, 发现角频率的平方 - 剪切膜力关系是直线关系; 采用精确关系式 $R_1 = R_2 - h$ 时, 发现角频

率的平方 - 剪切膜力关系是曲线关系, 还发现了一个令人吃惊的反常情况: 高阶弯曲模态(6, 4)对应的角频率反而小于低阶弯曲模态(5, 4)对应的角频率, 这在单模态领域是不可想象的(因为在单模态领域, 高阶模态对应的角频率一定大于低阶模态对应的角频率), 文献[14]没有出现这个反常情况, 可以推测文献[14]采用的是过分简化关系式 $R_1 \approx R_2$ 。第二个不足是没有给出时域通解, 例如文献[15]利用矩阵复指数算法推导了当系统受到一假想简谐复激励力时的复位移一般表达式, 但没有给出实位移一般表达式, 事实上使用这种假想方法根本就不能得到实位移一般表达式, 因为线性微分方程的系数会出现复数; 文献[16]给出了梁两端的统一混合边界条件矩阵形式

$M_b \eta(0, s) + N_b \eta(L, s) = \gamma(s)$, 但没有给出 $\eta(0, s)$ 、 $\eta(L, s)$ 、 $\gamma(s)$ 的具体值, 局限在频域, 不能通过 Laplace 反变换得到时域解, 因此这种仅仅只停留在频域的求解方法是不完整的。

本文全面考虑初始条件, 推导了 Burgers 四参量流体、Kelvin-Maxwell 六参量模型在阶跃函数应力作用下的总应变通解。Burgers 四参量流体、Kelvin-Maxwell 六参量模型都可以近似地描述金属材料蠕变曲线的前两个阶段, 但都不能反映第三个阶段。工程实例计算的结果表明, 两种理论预测与实验测量的结果的一致性较好。

2. 粘弹性力学的两种模型

金属在高温下发生显著的蠕变现象。金属材料的蠕变过程常用变形与时间的关系曲线来描述, 这样的曲线称为蠕变曲线。温度较高时原子的活动能力提高, 使得产生塑性变形的位错滑移更为容易, 所以, 在较高温度下低于屈服极限的应力就足以造成材料塑性变形。随着材料的塑性变形, 加工硬化亦随之产生, 材料开始强化, 变形抗力加大。蠕变曲线 ABCD 如图 1 所示, 它可分为瞬时蠕变 AB(应变率 $\frac{\Delta \varepsilon}{\Delta t}$ 随时间增加而减小)、稳态蠕变 BC(应变率 $\frac{\Delta \varepsilon}{\Delta t}$ 几乎为一常值, 这一段是直线, 此时, 变形产生的加工硬化和回复、再结晶同时进行, 材料未进一步硬化)和加速蠕变 CD(应变率 $\frac{\Delta \varepsilon}{\Delta t}$ 随时间增加而迅速增加, 愈来愈大的塑性变形便在晶界形成微孔和裂纹, 试件也开始产生缩颈,

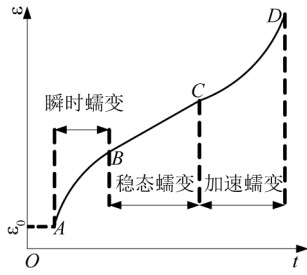


Figure 1. Three stages of creep curve
图 1. 蠕变曲线的三个阶段

试件实际受力面积减小而真实应力加大，最后导致试样断裂三个阶段。图 1 中， ε_0 为初始弹性应变。

图 2 为 Kelvin 链，由 $n+1$ 个 Kelvin 模型串联而成， E_i 、 η_i 、 ε_i 分别为第 i 个 Kelvin 单元的弹性模量、动力粘度、应变； σ 、 ε 分别为应力、总应变。

图 2 的应力 - 应变微分型本构关系为

$$\varepsilon = \left(\frac{1}{\eta_0 D + E_0} + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{\eta_i D + E_i} + \frac{1}{\eta_n D + E_n} \right) \sigma \quad (1)$$

式中， $D = \frac{d}{dt}$ 表示对牛顿时间 t 的微分算子。

当 $\eta_0 = E_n = 0$ 时，图 2 变为图 3。

此时本构方程(1)变为

$$\varepsilon = \left(\frac{1}{E_0} + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{\eta_i D + E_i} + \frac{1}{\eta_n D} \right) \sigma \quad (2)$$

由式(2)得

$$\eta_n D \prod_{i=1}^{n-1} (\eta_i D + E_i) \varepsilon = \left[\frac{\eta_n D \prod_{i=1}^{n-1} (\eta_i D + E_i) + \eta_n D \prod_{i=1}^{n-1} (\eta_i D + E_i) \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{\eta_i D + E_i} + \prod_{i=1}^{n-1} (\eta_i D + E_i) \right] \sigma \quad (3)$$

2.1. Burgers 四参量流体

当 $n = 2$ 时，图 3 变为图 4。

此时式(3)变为

$$\begin{aligned} & (\eta_1 D^2 + E_1 D) \eta_2 \varepsilon \\ & = \left[\frac{\eta_1 \eta_2}{E_0} D^2 + \left(\eta_1 + \eta_2 + \frac{E_1}{E_0} \eta_2 \right) D + E_1 \right] \sigma \end{aligned} \quad (4)$$

当 $\sigma = \sigma_0 u(t)$ 为阶跃函数时，由式(4)的 Laplace 变换得

$$s^2 (\eta_1 s + E_1) \eta_2 \Phi(s) = \eta_1 \eta_2 \varepsilon_0 s^2 + (E_1 \varepsilon_0 + \eta_1 \dot{\varepsilon}_0) \eta_2 s + E_1 \sigma_0 \quad (5)$$

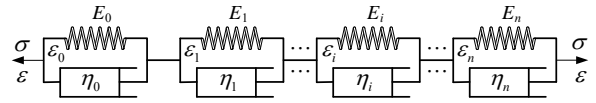


Figure 2. Extended Kelvin model
图 2. 广义 Kelvin 模型

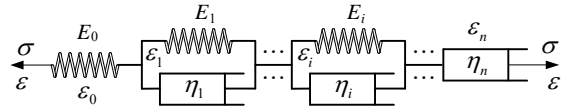


Figure 3. Series of extended Kelvin model with one Maxwell model
图 3. 广义 Kelvin 模型和 1 个 Maxwell 模型串联

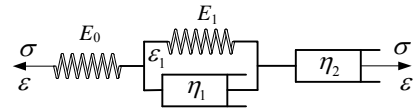


Figure 4. Series of one Kelvin model with one Maxwell model
图 4. 1 个 Kelvin 模型和 1 个 Maxwell 模型串联

式中， $\Phi(s)$ 为 $\varepsilon(t)$ 的 Laplace 变换。

由式(5)得频域总应变为

$$\Phi(s) = \frac{k_{11}}{s^2} + \frac{k_{12}}{s} + \frac{k_2}{s + \frac{1}{\tau_1}} \quad (6)$$

式中，

$$k_{11} = \frac{\sigma_0}{\eta_2} \quad (7)$$

$$k_{12} = \varepsilon_0 - k_2 \quad (8)$$

$$\tau_1 = \frac{\eta_1}{E_1} \quad (9)$$

$$k_2 = (k_{11} - \dot{\varepsilon}_0) \tau_1 \quad (10)$$

由式(6)的 Laplace 反变换可得时域总应变为

$$\varepsilon(t) = k_{11} t + k_{12} + k_2 e^{-\frac{t}{\tau_1}} \quad (11)$$

由式(11)可得蠕变柔量为

$$J(t) = \varepsilon(t) \Big|_{\sigma_0=1, \varepsilon_0=\frac{1}{E_0}, \dot{\varepsilon}_0=\frac{1}{\eta_1} + \frac{1}{\eta_2}} = \frac{1}{E_0} + \frac{t}{\eta_2} + \frac{1}{E_1} \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau_1}} \right) \quad (12)$$

式(12)对 t 的一阶导数为

$$j(t) = \frac{1}{\eta_2} + \frac{1}{\eta_1} e^{-\frac{t}{\tau_1}} \quad (13)$$

式(12)恰好是 Maxwell 和 Kelvin 模型的蠕变柔量

之和, 这是意料中的结果, 与文献[17]的蠕变柔量经典解一致。因此文献[17]的蠕变柔量经典解是式(11)的一种特殊情况。式(12)说明有瞬时弹性变形, 蠕变柔量是随时间 t 而单调增加的函数, 材料可以逐渐地且无限地产生变形, 这是流体的特征。由式(13)可见, 应变率随时间增加而减小(瞬时蠕变阶段), 当 t 很大时应变率几乎为一常值 $\frac{1}{\eta_2}$ (稳态蠕变阶段), 因此式

(11)可以近似地描述金属材料蠕变曲线的前两个阶段。但式(11)不能反映第三个阶段, 因为第三个阶段涉及塑性变形, 超出了本文的研究范围——粘弹性力学。

2.2. Kelvin-Maxwell 六参量模型

当 $n=3$ 时, 图 3 变为图 5。

此时式(3)变为

$$\begin{aligned} & \left[\eta_1 \eta_2 D^3 + (E_1 \eta_2 + E_2 \eta_1) D^2 + E_1 E_2 D \right] \eta_3 \varepsilon \\ &= \left[\frac{\eta_1 \eta_2 \eta_3}{E_0} D^3 + \left(\eta_1 \eta_2 + \eta_2 \eta_3 + \eta_3 \eta_1 + \frac{E_1 \eta_2 + E_2 \eta_1}{E_0} \eta_3 \right) D^2 \right. \\ & \left. + \left(E_1 \eta_2 + E_1 \eta_3 + E_2 \eta_1 + E_2 \eta_3 + \frac{E_1 E_2}{E_0} \eta_3 \right) D + E_1 E_2 \right] \sigma \end{aligned} \quad (14)$$

当 $\sigma = \sigma_0 u(t)$ 时, 由式(14)的 Laplace 变换得

$$\begin{aligned} & s^2 (\eta_1 s + E_1) (\eta_2 s + E_2) \eta_3 \Phi(s) \\ &= \eta_1 \eta_2 \eta_3 \varepsilon_0 s^3 + \left[(E_1 \eta_2 + E_2 \eta_1) \varepsilon_0 + \eta_1 \eta_2 \dot{\varepsilon}_0 \right] \eta_3 s^2 \\ & \quad + \left[E_1 E_2 \varepsilon_0 + (E_1 \eta_2 + E_2 \eta_1) \dot{\varepsilon}_0 + \eta_1 \eta_2 \ddot{\varepsilon}_0 \right] \eta_3 s + E_1 E_2 \sigma_0 \end{aligned} \quad (15)$$

式中, $\Phi(s)$ 为 $\varepsilon(t)$ 的 Laplace 变换。

由式(15)可得频域总应变为

$$\Phi(s) = \frac{K_{11}}{s^2} + \frac{K_{12}}{s} + \frac{K_2}{s + \frac{1}{t_1}} + \frac{K_3}{s + \frac{1}{t_2}} \quad (16)$$

式中,

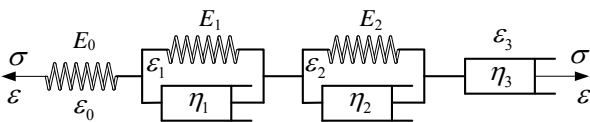


Figure 5. Series of extended Kelvin model with one Maxwell model
图 5. 广义 Kelvin 模型和 1 个 Maxwell 模型串联

$$K_{11} = \frac{\sigma_0}{\eta_3} \quad (17)$$

$$K_{12} = \varepsilon_0 - K_2 - K_3 \quad (18)$$

$$t_1 = \frac{\eta_1}{E_1} \quad (19)$$

$$t_2 = \frac{\eta_2}{E_2} \quad (20)$$

$$K_2 = (K_{11} - \dot{\varepsilon}_0 - t_2 \ddot{\varepsilon}_0) \frac{t_1^2}{t_1 - t_2} \quad (21)$$

$$K_3 = (K_{11} - \dot{\varepsilon}_0 - t_1 \ddot{\varepsilon}_0) \frac{t_2^2}{t_2 - t_1} \quad (22)$$

由式(16)的 Laplace 反变换可得时域总应变为

$$\varepsilon(t) = K_{11} t + K_{12} + K_2 e^{-\frac{t}{t_1}} + K_3 e^{-\frac{t}{t_2}} \quad (23)$$

由式(23)可得蠕变柔量为

$$\begin{aligned} J(t) &= \varepsilon(t) \Big|_{\sigma_0=1, \varepsilon_0=\frac{1}{E_0}, \dot{\varepsilon}_0=\frac{1}{\eta_1} + \frac{1}{\eta_2} + \frac{1}{\eta_3}, \ddot{\varepsilon}_0=-\frac{1}{t_1 \eta_1} - \frac{1}{t_2 \eta_2}} \\ &= \frac{1}{E_0} + \frac{t}{\eta_3} + \frac{1}{E_1} \left(1 - e^{-\frac{t}{t_1}} \right) + \frac{1}{E_2} \left(1 - e^{-\frac{t}{t_2}} \right) \end{aligned} \quad (24)$$

式(24)对 t 的一阶导数为

$$\dot{J}(t) = \frac{1}{\eta_3} + \frac{1}{\eta_1} e^{-\frac{t}{t_1}} + \frac{1}{\eta_2} e^{-\frac{t}{t_2}} \quad (25)$$

式(24)也恰好是 Maxwell 和 Kelvin 链的蠕变柔量之和。同样式(23)可以近似地描述蠕变曲线的前两个阶段, 但不能反映第三个阶段。

当 $E_2 \rightarrow +\infty$ 且 $\eta_2 \rightarrow 0$ 时, 式(17)~(22)变为

$$K_{11} = \frac{\sigma_0}{\eta_3} \quad (26)$$

$$K_{12} = \varepsilon_0 - K_2 \quad (27)$$

$$t_1 = \frac{\eta_1}{E_1} \quad (28)$$

$$t_2 \rightarrow 0 \quad (29)$$

$$K_2 = (K_{11} - \dot{\varepsilon}_0) t_1 \quad (30)$$

$$K_3 \rightarrow 0 \quad (31)$$

此时式(7)~(10)分别与式(26)~(28), (30)一致。因此式(11)是式(23)的一种特殊情况。

3. 工程实例与结果分析

Mar-M200 是真空感应炉熔炼和真空铸造的沉淀强化型镍基铸造合金，含有相当高的固溶强化元素钨和提高 γ' 强化相固溶温度的元素钴。合金主要作用是铸造涡轮叶片，其工作温度可达 1040℃。在铸造技术上采用定向结晶和单晶工艺，可改善合金的高温拉伸强度、塑性、热冲击性能、冲击韧性和蠕变性能。直径 19 毫米棒材，铸态，试样取自 76 毫米定向结晶钢锭 PWA664，接近[001]方向的拉伸轴的单晶材料 Ni-12W-10Co-9Cr-5Al-2Ti-1Cb+B+Zr 在 760℃， $\sigma_0 = 70 \text{ kgf/mm}^2$ 作用下的蠕变曲线如图 6 所示^[18,19]。

$$E_0 = 13000 \text{ kgf/mm}^2, \quad \varepsilon_0 = \frac{\sigma_0}{E_0},$$

从图 6 测量获得 B 点的时间 $t_B = 200 \text{ h}$ ，A 点的初始应变率 $\dot{\varepsilon}_0 = 0.00025 \text{ h}^{-1}$ 。

式(11)中参数的选取。取延迟时间 $\tau_1 = \frac{t_B}{2}$ ，从图 6 测量获得 B 点的应变率 $\dot{\varepsilon}_B = 0.000029 \text{ h}^{-1}$ ，由式(13)可得应变率为

$$\dot{\varepsilon}(t) = \dot{J}(t)\sigma_0 = \left(\frac{1}{\eta_2} + \frac{1}{\eta_1} e^{-\frac{t}{\tau_1}} \right) \sigma_0 \quad (32)$$

动力粘度可近似取为

$$\eta_2 = \frac{\sigma_0}{\dot{\varepsilon}(+\infty)} \approx \frac{\sigma_0}{\dot{\varepsilon}_B} \quad (33)$$

按式(11)可得理论预测的蠕变曲线如图 7 所示。

式(23)中参数的选取。A 点的初始应变加速度近似为

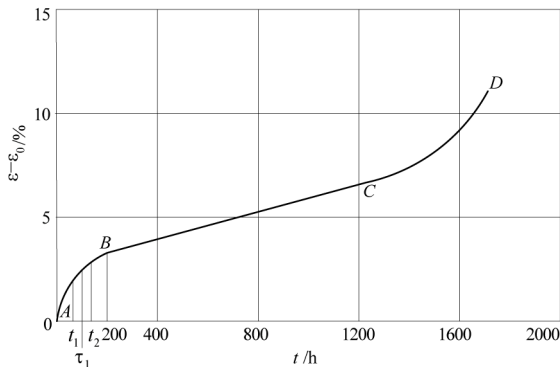


Figure 6. Creep curve of uniaxial extensional experiment about Mar-M200
图 6. Mar-M200 的单向拉伸试验蠕变曲线

$$\ddot{\varepsilon}_0 \approx \frac{0.000125 - \dot{\varepsilon}_0}{\tau_1} \quad (34)$$

由式(25)得

$$\dot{\varepsilon}(t) = \dot{J}(t)\sigma_0 = \left(\frac{1}{\eta_3} + \frac{1}{\eta_1} e^{-\frac{t}{\tau_1}} + \frac{1}{\eta_2} e^{-\frac{t}{\tau_2}} \right) \sigma_0 \quad (35)$$

动力粘度可近似取为

$$\eta_3 = \frac{\sigma_0}{\dot{\varepsilon}(+\infty)} \approx \frac{\sigma_0}{\dot{\varepsilon}_B} \quad (36)$$

取第一延迟时间 $t_1 = \frac{t_B}{3}$ ，第二延迟时间 $t_2 = \frac{2t_B}{3}$ 。

按式(23)可得理论预测的蠕变曲线如图 8 所示。

实验测量与理论预测的蠕变应变见表 1。Burgers

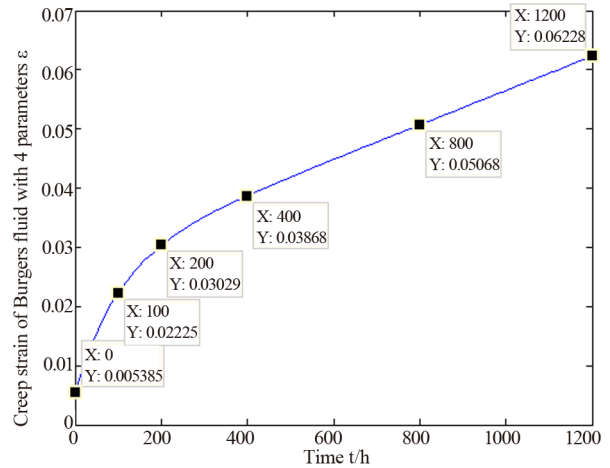


Figure 7. Creep curve of Burgers fluid with four parameters
图 7. Burgers 四参量流体的蠕变曲线

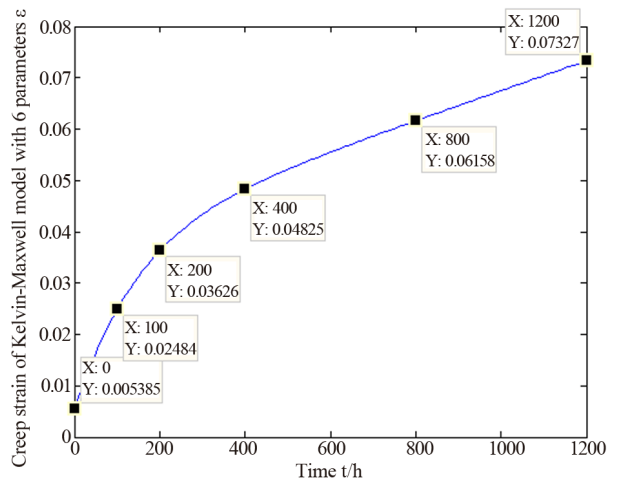


Figure 8. Creep curve of Kelvin-Maxwell model with six parameters
图 8. Kelvin-Maxwell 六参量模型的蠕变曲线

Table 1. Creep strains of experimental measurement and theoretical prediction
表 1. 实验测量与理论预测的蠕变应变

t/h	0	100	200	400	800	1200
ε of creep experiment	0.005385	0.025385	0.037385	0.048385	0.058385	0.072385
ε of Equation (11)	0.0053846	0.0222545	0.0302937	0.0386798	0.0506772	0.0622845
relative error of Equation (11)/%	0.0074280	12.332086	18.968303	20.058283	13.201679	13.953858
ε of Equation (23)	0.0053846	0.0248406	0.0362625	0.0482547	0.0615825	0.0732690
relative error of Equation (23)/%	0.0074280	2.1445736	3.0025411	0.2692983	-5.4765779	-1.2212475

四参量流体理论预测式(11)的最大相对误差为20.058283%，Kelvin-Maxwell六参量模型理论预测式(23)的最大相对误差为5.4765779%，后者的理论预测与实验测量的结果的一致性很好。

4. 结论

考虑初始条件，推导了 Burgers 四参量流体、Kelvin-Maxwell 六参量模型在阶跃函数应力作用下的总应变通解。Burgers 四参量流体、Kelvin-Maxwell 六参量模型都可以近似地描述金属材料蠕变曲线的前两个阶段，但都不能反映第三个阶段。工程实例计算的结果表明，两种理论预测与实验测量的结果的一致性较好，特别是 Kelvin-Maxwell 六参量模型的最大相对误差仅为 5.4765779%。

参考文献 (References)

- [1] M. R. Falvo, R. M. Taylor II, A. Helder, et al. Nanometre-scale rolling and sliding of carbon nanotubes. *Nature*, 1999, 397(6716): 236-238.
- [2] Q. Wang, V. K. Varadan and S. T. Quek. Small scale effect on elastic buckling of carbon nanotubes with nonlocal continuum models. *Physics Letters A*, 2006, 357(2): 130-135.
- [3] Y. Q. Zhang, G. R. Liu and X. Y. Xie. Free transverse vibrations of double-walled carbon nanotubes using a theory of nonlocal elasticity. *Physical Review B*, 2005, 71(19): 195404-1-195404-7.
- [4] 徐斌, 欧进萍, 姜节胜等. 经典阻尼系统响应求解的分离变换辛解法[J]. *机械强度*, 2008, 30(1): 001-005.

- [5] 冯振宇. 四种粘弹性模型薄板的自由振动[J]. *西安公路交通大学学报*, 1998, 18(3): 59-63.
- [6] 祝彦知, 程楠, 薛保亮. 四种粘弹性地基上弹性地基板的自由振动解[J]. *强度与环境*, 2001, 3: 31-41.
- [7] 祝彦知, 薛保亮, 王广国. 粘弹性地基上粘弹性地基板的自由振动解析[J]. *岩土力学与工程学报*, 2002, 21(1): 112-118.
- [8] C. M. Wang. Timoshenko beam-bending solutions in terms of Euler-Bernoulli solutions. *Journal of Engineering Mechanics*, 1995, 121(6): 763-765.
- [9] 李元媛, 蔡睿贤. 矩形薄板弯曲的严格简明解析解[J]. *机械工程学报*, 2008, 44(10): 72-76.
- [10] A. A. Pisano, P. Fuschi. Closed form solution for a nonlocal elastic bar in tension. *International Journal of Solids and Structures*, 2003, 40(1): 13-23.
- [11] X. C. Zhao, Y. J. Lei and J. P. Zhou. Strain analysis of nonlocal viscoelastic Kelvin bar in tension. *Applied Mathematics and Mechanics (English Edition)*, 2008, 29(1): 67-74.
- [12] 赵雪川, 雷勇军, 周建平. 非局部 Kelvin 粘弹性直杆受轴向拉力作用的应变分析[J]. *应用数学和力学*, 2008, 29(1): 62-68.
- [13] Y. Q. Zhang, G. R. Liu and X. Han. Effect of small length scale on elastic buckling of multi-walled carbon nanotubes under radial pressure. *Physics Letters A*, 2006, 349(5): 370-376.
- [14] C. Q. Sun, K. X. Liu and G. X. Lu. Dynamic torsional buckling of multi-walled carbon nanotubes embedded in an elastic medium. *Acta Mechanica Sinica*, 2008, 24(5): 541-547.
- [15] 诸德超, 邢誉峰. *工程振动基础*[M]. 北京: 北京航空航天大学出版社, 2004: 89-96.
- [16] 赵雪川, 雷勇军, 唐国金. 传递函数法在非局部弹性梁动力学分析中的应用[J]. *振动与冲击*, 2007, 26(5): 4-7.
- [17] 杨挺青. *粘弹性力学*[M]. 武汉: 华中理工大学出版社, 1990: 24-28.
- [18] 申鸿恩. 粘弹性理论应用一例[J]. *力学与实践*, 1984, 6(5): 18-21.
- [19] 冶军. *美国镍基高温合金*[M]. 北京: 科学出版社, 1978: 340-350.