

# Mathematical Description of a Class of Linear Negative Feedback Systems

Wendong Ma

Jiangsu Huaibei Middle School, Suqian Jiangsu  
Email: bestwd2018@126.com

Received: Apr. 9<sup>th</sup>, 2019; accepted: Apr. 28<sup>th</sup>, 2019; published: May 5<sup>th</sup>, 2019

---

## Abstract

A linear negative feedback equation is constructed. The simplified mathematical description of the system's own maintenance and adaptability to the environment of the system is made during the evolution of the closed system from one state to another.

## Keywords

Closed System, Negative Feedback, Mathematical Model

---

# 一类线性负反馈系统的数学描述

马文东

江苏省淮北中学, 江苏 宿迁  
Email: bestwd2018@126.com

收稿日期: 2019年4月9日; 录用日期: 2019年4月28日; 发布日期: 2019年5月5日

---

## 摘 要

本文构建了线性负反馈方程, 对封闭系统从一个状态到另一个状态演变过程中, 系统自身的维持和对系统内环境的适应性作了简化性的数学描述。

## 关键词

封闭系统, 负反馈, 数学模型

---



## 1. 引言

反馈现象源自于电子放大电路的“反馈”概念，主要是指信号经过放大电路时，输出信号回授至输入端时所引起的输出信号加强(正反馈)或减弱(负反馈)现象。目前有关反馈现象的研究，除去电子放大电路之外，还常见于系统动力学的基本理论研究[1]。但有关负反馈方程的研究仅局限于电子线路中的放大器，并且多以实验性测试而进行的定性或半定量分析为主[2]，缺少具体的反馈机制性的研究。反馈机制的复杂程度是显而易见的，本文所要讨论的是反馈现象中的负反馈现象，并且仅限于反馈因子是线性的线性负反馈。

在电子放大电路中，负反馈是通过反馈信号使得净输入量减小，从而提高增益的稳定性，减小非线性失真[3]。许多现象表明，负反馈在系统从平衡态被破坏到新平衡态建立过程中，同样起着重要的作用，在诸如燃烧、落体运动、LR 电路等系统中都有负反馈现象发生。

本文旨在建立一类线性负反馈的数学模型，完整反映封闭系统中相关物理量变化的规律。

## 2. 线性负反馈问题

### 2.1. 燃烧现象中的负反馈

我们观察到，在一个封闭系统中，燃烧生成物  $\text{CO}_2$  气体对燃烧的进程会有阻碍作用。由反应方程式  $\text{C} + \text{O}_2 = \text{CO}_2$  知，随着  $\text{CO}_2$  气体浓度的升高， $\text{O}_2$  的浓度在下降，因它们的浓度变化比例相同。由燃烧规律，设  $\text{CO}_2$  气体浓度的变化率和  $\text{O}_2$  浓度成正比，且  $\text{O}_2$  起始浓度为  $\rho_0$ ，产生的  $\text{CO}_2$  气体浓度为  $\rho$ ，则有  $\frac{d\rho}{dt} = k(\rho_0 - \rho)$ ，其中  $k$  为比例系数。

即

$$k\rho_0 - k\rho = \frac{d\rho}{dt} \quad (1)$$

分离变量并积分有

$$\int \frac{d\rho}{k\rho_0 - k\rho} = \int dt$$

得

$$-\frac{1}{k} \ln(k\rho_0 - k\rho) = t + C_1$$

即

$$\rho = \rho_0 + Ce^{-kt} \quad (\text{其中 } C = -\frac{e^{-kC_1}}{k}) \quad (2)$$

将初始条件  $\rho|_{t=0} = 0$  代入(2)式，得  $C = -\rho_0$ 。于是所求  $\text{CO}_2$  浓度的解为

$$\rho = \rho_0(1 - e^{-kt}) \quad (3)$$

由(3)式可以看出，随着时间  $t$  的增加， $\text{CO}_2$  气体浓度  $\rho$  逐渐接近于常数  $\rho_0$ ，且不会超过  $\text{O}_2$  的开始浓

度  $\rho_0$ ， $\text{CO}_2$  达到一定浓度，燃烧就会停止。

## 2.2. 自由落体中的负反馈

在物体自由下落过程中，我们注意到，随着物体速度的增大，物体所受空气阻力也会增大，最终速度趋于稳定值，冰雹、雨滴的运动都是这样的。

现有质量为  $m$  的物体在空气中自由下落，若物体所受空气阻力与速度成正比，根据牛顿第二定律，有

$$mg - kv = m \frac{dv}{dt} \quad (4)$$

注意到  $v|_{t=0} = 0$ ，易知方程(4)的解[4]为

$$v = \frac{mg}{k} \left( 1 - e^{-\frac{k}{m}t} \right) \quad (5)$$

从(5)式可以看出，随着时间  $t$  的增加，物体下落的速度逐渐接近于常数  $\frac{mg}{k}$ ，最后物体的运动趋于匀速下降。

## 2.3. LR 电路中的负反馈

当线圈中的电流变化时，它所激发的磁场通过线圈自身的磁通量也在变化[5]，线圈自身通过产生感应电动势来减弱这一变化。法拉第电磁感应定律就是对这一负反馈现象的描述。

如图 1 所示，电阻  $R$  和电感  $L$  都是常量(电感  $L$  的电阻不计)，当开关  $S$  闭合时，电路中的电流开始增加。由法拉第电磁感应定律知，当电流  $i$  变化时， $L$  上有感应电动势  $-L \frac{di}{dt}$ 。由回路电压定律可得

$$E - iR = L \frac{di}{dt} \quad (6)$$

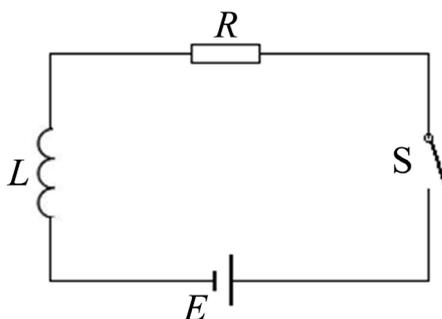


Figure 1. RL circuit  
图 1. RL 电路

注意到  $i|_{t=0} = 0$ ，解方程(6)可得

$$i = \frac{E}{R} \left( 1 - e^{-\frac{R}{L}t} \right) \quad (7)$$

从(7)式看出，随着时间  $t$  的增大，电路中电流  $i$  逐渐稳定于常数  $\frac{E}{R}$ 。

### 3. 线性负反馈数学模型

#### 3.1. 模型的建立

从式(1)、(4)、(6)式看出,在线性负反馈中,都有一个稳定的诱导量  $I$  (如以上各式中的  $k\rho_0$ 、 $mg$  和  $E$ ), 反馈量  $kf$  (如上述各式中的  $k\rho$ 、 $k\nu$  和  $Ri$ ), 以及内禀常数  $m$  (如以上(4)、(6)式中的  $m$ ,  $L$ , (1)式中的常数为 1)。由此, 负反馈标准方程可经验地表示为

$$I - kf = m \frac{df}{dt} \quad (8)$$

这个方程的一个特解是

$$f = \frac{I}{k} \left( 1 - e^{-\frac{k}{m}t} \right) \quad (9)$$

#### 3.2. 模型讨论及意义

##### 3.2.1. 负反馈方程的性质

负反馈方程(8)是具有线性反馈因子  $kf$  的一阶微分方程。“负反馈”概念虽然来自于电子放大电路, 很明显, 本文所建立的负反馈方程远远超出了电子放大器所研究的范围, 其意义更广, 范围也更大。需要说明的是, 相比于那些非线性反馈因子  $kf^n$  ( $n > 1$ ), 本文所讨论的线性负反馈是最简单的一种类型。在涉及速度负反馈问题中, 指的是低速反馈现象[6]。

由于负反馈方程(8)中的相关物理量在不同事件中的意义不同, 所以说负反馈方程式(8), 更多意义上表达的是, 不同负反馈现象中相关因素的一种结构关系。在诸多负反馈现象中, 凡反馈方程可以表达成形如式(8)的, 说明他们都有相同的反馈结构。对于同一反馈类型, 反馈因子  $k$  是相同的常数。但在不同形式的反馈中, 常数  $k$  又是不同的, 它的大小由具体的反馈实验测量而得。

##### 3.2.2. 负反馈方程的意义

1) 系统从一个平衡态到另一个平衡态发展的过程中, 负反馈方程

$$I - kf = m \frac{df}{dt}$$

能帮助我们清楚这一演变的过程。在燃烧现象中, 一个封闭系统, 燃烧生成物  $\text{CO}_2$  气体浓度的增加, 是由碳在氧气中燃烧导致的, 但随着  $\text{CO}_2$  气体浓度的增加, 又对燃烧的进程起阻碍作用。当  $\text{CO}_2$  气体达到一定浓度时, 燃烧就会停止, 系统进入平衡态; 在自由落体现象中, 物体速度的增加是由重力引起的, 但随着物体速度的增大, 物体所受空气阻力也会增大, 当阻力和重力平衡时, 速度就趋于稳定值; 同样, 在  $LR$  电路中, 感应电流  $i$  是由电动势  $E$  引起的, 但随着电流  $i$  的产生, 电感线圈中就会出现反向的感应电动势, 这个感应的电动势削减了  $E$  的作用。由此看出, 诱导量  $I$  促使物理量  $f$  的产生, 但通过反馈因子  $k$  又对物理量  $f$  的产生起到抑制作用, 保持了系统状态的相对稳定性。

2) 物体质量是物体惯性大小的量度, 这一论断在负反馈方程的解

$$f = \frac{I}{k} \left( 1 - e^{-\frac{k}{m}t} \right)$$

中得到了明确的、强有力的理论说明: 内禀常数  $m$  的大小, 决定了系统在诱导量  $I$  的作用下, 重新达到稳定性的快慢。常数  $m$  越大, 系统到达新平衡态越迟, 体现的是系统保持原有状态不变的性质, 即物体的惯性。

$LR$  电路中的电感系数  $L$ , 和内禀常数  $m$  相比, 同样起到延缓电流  $i$  增长的作用。

3) 在负反馈方程中, 当诱导量  $I$  消失后, 方程就和法拉第电磁感应定律方程形式相同, 意义也相同。反馈系数  $k$  的符号, 对应的是楞次定律的思想。当环境中反馈因子不存在时, 方程就和牛顿第二定律形式相同。

4) 在封闭系统内, 反馈系数  $k$  削减了诱导量  $I$  的作用, 最终使  $f$  稳定在  $\frac{I}{k}$  的大小。和内禀常数  $m$  相比,  $k$  是由系统内环境因素决定的。内禀常数  $m$  和反馈系数  $k$ , 反映了在系统演化过程中, 当一个平衡态被破坏后, 在到达新的平衡态前, 系统对自身稳定性的维持(通过  $m$  体现)和对环境适应性调整(通过  $k$  体现)的规律性。

5) 线性负反馈模型可以为更加复杂的非线性负反馈研究提供理论基础。

#### 4. 结论

在系统平衡态演变过程中, 存在负反馈现象。负反馈不但延缓了系统到达新平衡态的时间, 同时也影响着系统新平衡态的状态。对于一些简单的系统, 其平衡态演变过程可以用简化的数学模型表达出来。

#### 参考文献

- [1] 钟永光, 贾晓菁, 钱颖. 系统动力学[M]. 第2版. 北京: 科学出版社, 2018: 103-107.
- [2] 胡斌. 电子线路轻松入门[M]. 第2版. 北京: 人民邮电出版社, 2006: 287.
- [3] 冯军, 谢嘉奎. 电子线路(线性部分)[M]. 第5版. 北京: 高等教育出版社, 2010: 292-318.
- [4] 同济大学数学教研室. 高等数学(下册)[M]. 第2版. 北京: 高等教育出版社, 1982: 315-316.
- [5] 赵凯华, 陈熙谋. 电磁学[M]. 第2版. 北京: 高等教育出版社, 2006: 209.
- [6] 包景东, 等. 从简化模型中悟出质点动力学的真谛[J]. 大学物理, 2017, 36(3): 1-4.

#### 知网检索的两种方式:

1. 打开知网页面 <http://kns.cnki.net/kns/brief/result.aspx?dbPrefix=WWJD>  
下拉列表框选择: [ISSN], 输入期刊 ISSN: 2161-0916, 即可查询
2. 打开知网首页 <http://cnki.net/>  
左侧“国际文献总库”进入, 输入文章标题, 即可查询

投稿请点击: <http://www.hanspub.org/Submission.aspx>

期刊邮箱: [mp@hanspub.org](mailto:mp@hanspub.org)