

# 用动能定理对一例弹簧问题的求解

陈海洋

攀枝花学院, 四川 攀枝花

收稿日期: 2021年10月13日; 录用日期: 2021年11月15日; 发布日期: 2021年11月22日

---

## 摘要

弹簧是大学物理教学和学习当中的重要模型之一。本文通过运用动能定理, 对弹簧问题的一个典型例题进行了重新求解。并对比弹簧振子模型, 运用质心运动定理对解题思路进行了详细地阐述。同时指出文中解题思路是对弹簧振子模型的进一步推广。这对于拓宽思路、加深对动能定理和与弹簧模型相关问题的理解具有一定的现实意义。

## 关键词

弹簧, 动能定理, 相对速度, 弹簧振子, 质心运动定理

---

# Solution of a Spring Problem by Kinetic Energy Theorem

Haiyang Chen

Panzhuhua University, Panzhuhua Sichuan

Received: Oct. 13<sup>th</sup>, 2021; accepted: Nov. 15<sup>th</sup>, 2021; published: Nov. 22<sup>nd</sup>, 2021

---

## Abstract

Spring is one of the important models in college physics teaching and learning. In this paper, a typical example of spring problems is resolved by using the kinetic energy theorem. Compared with the spring vibrator model, the idea of solving the problem is described in detail by using the theorem of mass center motion. At the same time, it is pointed out that the problem-solving idea in this paper is a further generalization of the spring vibrator model. This has certain practical significance for broadening the thinking and understanding of the kinetic energy theorem and the problems related to the spring model.

## Keywords

Spring, Kinetic Energy Theorem, Relative Velocity, Spring Vibrator, Center of Mass Motion Theorem

Copyright © 2021 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

## 1. 引言

弹簧是大学物理教学和学习当中的重要模型之一。弹簧产生形变时，会对与它相接触的物体产生弹簧弹性力，弹性力满足胡克定律： $F = -kx$ ，其中  $k$  为劲度系数， $x$  为形变量，负号表示弹性力的方向总是指向弹簧的平衡位置。弹性力属于保守力的一种，弹性力的功只与始、末位置有关，而与弹簧的形变过程无关[1]。弹簧弹性力做功属于变力做功问题。通常与动量和能量相联系，一般以综合题出现。并将动量守恒、动能定理、机械能守恒等结合在一起，以考察学生的综合能力。在对弹簧问题的讲解、学习过程中，我们可以发现，由于弹簧的弹性力和弹簧本身的形变相关——成正比。也就是说，在运动过程中，随着弹簧不断发生形变，与之相连接的物体所受到的力(加速度)、速度等都在发生变化，这使得涉及到弹簧模型的问题较之于其它物理问题的运的过程和运动状态更为复杂化。学生在学习和解题过程中，往往觉得很难把握住问题的本质，对各类弹簧问题感到头疼。如果帮助学生正确掌握了弹簧问题的本质、并能够熟练求解弹簧问题，那么他们对所学各个知识的综合运用能力就会得到一个大的提升。本文运用动能定理[1] [2] [3] [4] [5]对大学物理教材中的一道具体弹簧问题进行了重新求解。文中有别于一般教材中运用动量守恒和机械能守恒定律对该问题的求解，既用过程量而不是用状态量求解同一问题，并得出一致结论。同时，对比弹簧振子模型，根据质心运动定理对解题思路进行了详细地阐述。并指出文中解题思路是对弹簧振子模型的进一步推广。这对于拓宽学生学习思路、加深对动能定理和与弹簧模型相关问题的理解具有一定的现实意义。虽然，我们处理的是两端联结物体的弹簧问题模型，但我们的处理方法对于两物体间电场力、万有引力等问题模型也有着重要的借鉴意义。

## 2. 理论模型和研究方法

弹簧是物理学里较为常见的一种理想化模型之一。涉及到弹簧模型的问题一般包括如下几个方面：1) 弹簧两端存在其他物体或受到力的约束时，弹簧的瞬时问题；2) 涉及到胡克定律的与物体平衡相关的弹簧问题；3) 弹簧相对位置发生变化时，与系统动力学有关的弹簧问题；4) 在弹簧弹性力做功过程中，与能量相关的弹簧问题等[6]。在我们所接触的很多大学物理教材中[1] [7]，都会在质点动力学章节介绍如下例题：两物块  $m_1$  和  $m_2$  分别固结在轻质弹簧的两端，并放置于光滑水平面，如图 1 所示，先将  $m_1$  和  $m_2$  水平拉开至弹簧伸长  $l$  后无初速度释放。已知：两物块质量分别为  $m_1$ ， $m_2$ ，求  $m_1$  和  $m_2$  的最大相对速度(已知弹簧的劲度系数为  $k$ )。

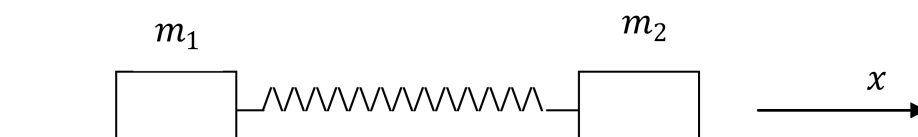


Figure 1. Schematic diagram of spring model of connecting blocks at both ends.

图 1. 两端连接物块的弹簧模型示意图

选地球作为参考系, 从物块  $m_1, m_2$  同时被释放一直到两物块  $m_1, m_2$  达到相对速度最大的过程当中, 两物块  $m_1, m_2$  和弹簧系统的动量守恒。并且, 系统内部没有非保守内力, 所以, 系统机械能守恒。据此确立方程组以后, 可求得  $m_1$  和  $m_2$  的速度和最大相对速度分别为[1]:

$$v_{m_1} = \sqrt{\frac{km_2l^2}{m_1(m_1+m_2)}} \quad (1)$$

$$v_{m_2} = \sqrt{\frac{km_1l^2}{m_2(m_1+m_2)}} \quad (2)$$

$$|v_{m_1} - v_{m_2}| = \frac{m_1+m_2}{m_2} = \sqrt{\frac{(m_1+m_2)kl^2}{m_1m_2}} \quad (3)$$

也可以采用《力学讨论课》[7]一文中的方法: 将此弹簧问题看成有相互作用的二体孤立系统, 以物块  $m_1$  作为相对参考系, 并把二物块的质量转换成为约化质量进行求解。这样, 二物块  $m_1, m_2$  和弹簧组成的系统满足机械能守恒定律, 并且系统的势能与参照系无关, 全部的系统势能都转化成为二物块  $m_1, m_2$  间的最大相对动能, 即:

$$\frac{1}{2}kl^2 = \frac{1}{2} \frac{m_1m_2}{m_1+m_2} v_{12}^2 \quad (4)$$

上述两种方法, 都是用比较简单的方法就得到了正确的结果。但是, 这种直接运用动量守恒定律、机械能守恒定律, 采取状态量求解的方法, 虽然步骤简洁, 却不如运用动能定理, 采取过程量求解的方法使学生易于加深对此类弹簧问题物理过程的理解。

接下来, 我们用动能定理的方法来求解上述问题。根据动能定理: 合外力对物体所做的功, 等于物体动能的变化量。数学表达式为:

$$W = \int_{r_1}^{r_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2 \quad (5)$$

$v_1$  和  $v_2$  分别对应着物体的始末速度。

根据胡克定律, 对于弹簧弹性力:  $\mathbf{F} = kx\mathbf{i}$ 。对于弹簧一端固定的情况, 我们直接将弹簧弹性力表达式代入(1)式即可。但是, 在此例当中, 弹簧两端都不固定。为了运用动能定理正确求解, 我们做如下分析:

因为两物块所受的弹簧力大小相等、方向相反。所以:

$$\mathbf{F}_1 = -\mathbf{F}_2 \Rightarrow m_1\mathbf{a}_1 = -m_2\mathbf{a}_2 \quad (6)$$

可得:

$$m_1\mathbf{x}_1 = -m_2\mathbf{x}_2 \Rightarrow |\mathbf{x}_2| = \left| \frac{m_1\mathbf{x}_1}{m_2} \right| \quad (7)$$

正如我们所知, 弹簧振子模型是弹簧问题最简单的模型, 它所涉及的运动学、动力学问题也是其它弹簧问题模型的基础。

接下来, 我们假设, 当弹簧一端固定的时候, 对于物块  $m_1$  有:

$$\mathbf{F}_1 = kx\mathbf{i} \quad (8)$$

另外, 如题中所设: 当弹簧两端都不固定的时候, 弹簧两端的物块  $m_1$  和  $m_2$  在弹性力作用下都会产生位移, 有:

$$\mathbf{F}_2 = k_2 x_1 \mathbf{i} + k_2 x_2 \mathbf{i} = k_2 x \mathbf{i} \quad (x = x_1 + x_2) \quad (9)$$

令

$$|\mathbf{F}_1| = |\mathbf{F}_2| \quad (10)$$

结合(3)式, 可得:

$$k_2 = \frac{km_2}{m_1 + m_2} \quad (11)$$

对于  $m_1$ , 由(1)式, 可得:

$$\int_{x_1}^{x_2} \mathbf{F}_2 \cdot d\mathbf{x} = \int_{x_1}^{x_2} \frac{km_2 x}{m_1 + m_2} dx = \frac{1}{2} m_1 v_2^2 - \frac{1}{2} m_1 v_1^2 \quad (12)$$

当  $x_1 = 0, v_1 = 0$  时, 可得:

$$v_{m_1} = \sqrt{\frac{km_2 x^2}{m_1(m_1 + m_2)}} \quad (13)$$

同理可得:

$$v_{m_2} = \sqrt{\frac{km_1 x^2}{m_2(m_1 + m_2)}} \quad (14)$$

且

$$|v_{m_1} - v_{m_2}| = \sqrt{\frac{(m_1 + m_2) k x^2}{m_1 m_2}} \quad (15)$$

与书中结果一致[1]。

由(12)式可以看出

$$\mathbf{F}_2 = \frac{km_2 \mathbf{x}}{m_1 + m_2} = k_2 \mathbf{x} \quad (16)$$

对比我们熟知的胡克定律

$$\mathbf{F} = -k\mathbf{x} \quad (17)$$

可以发现, 二式形式相同, 只是倔强系数  $k$  发生了变化, 这是因为对于胡克定律(17)式而言, 弹簧伸长量  $x$  只与所联结的物体自身有关, 这相当于弹簧一端固定, 另一端联结物块的情况而在我们考察的弹簧问题模型里, 在弹簧弹性力的作用下, 联结在弹簧两端的物块  $m_1$ 、 $m_2$  都在发生位移, 也就是说  $m_1$ 、 $m_2$  二者的位移矢量和构成了弹簧总的伸长量。这也可以通过质心运动定理来理解。根据质心运动定理: 对于一个质点系, 它的质心的运动就如同一个位于质心的质点运动, 并且这个质点的质量就等于所考察的质点系的总质量, 而作用在这个质点上面的作用力则等于作用在质点系上所有的外力平行地移到这个质点所处的质心位置上。由于我们考察的二物块和弹簧组成的系统没有受到合外力的作用, 所以在整个过程中, 系统的质心位置保持不变。也就是说两物块分别相对于质心发生位移  $x_1$  和  $x_2$ 。而弹簧总的形变为两物块位移之和, 所以单独考察物块  $m_1$  或  $m_2$  时, 相当于弹簧在不同倔强系数情况下弹簧一端固定, 另一端联结物块的弹簧振子。也可以将对两端联结物块弹簧模型的解决方法看成是对弹簧一端固定, 另一端联结物块的弹簧振子模型的推广。

### 3. 结论

文章运用动能定理, 而不是运用动量守恒和机械能守恒定律对一个具体弹簧问题求解, 既用过程量而不是用状态量求解同一问题。

我们也通过对比弹簧振子模型, 运用质心运动定理对解题思路进行了详细地阐述。同时指出文中解题思路是对弹簧振子模型的进一步推广。这对于拓宽思路、加深对动能定理和与弹簧模型相关问题的理解具有一定的现实意义。另外, 虽然我们处理的是两端联结物体的弹簧问题模型, 但我们的处理方法对于两物体间电场力、万有引力等问题模型也有着重要的借鉴意义。

### 参考文献

- [1] 赵近芳, 王登龙. 大学物理简明教程[M]. 第3版. 北京: 北京邮电大学出版社, 2017: 32.
- [2] 张三慧, 王虎珠. 大学物理学—力学(第一册) [M]. 北京: 清华大学出版社, 1990: 127.
- [3] 程守洙, 江之永. 普通物理学(第一册) [M]. 第3版. 北京: 高等教育出版社, 1978: 103.
- [4] 漆安慎, 杜婵英. 力学[M]. 第3版. 北京: 高等教育出版社, 2012: 129.
- [5] 朗道, 栗弗席兹. 理论物理学教程(第一卷)力学[M]. 第五版. 北京: 高等教育出版社, 2007: 17.
- [6] 李立昌, 刘德才. 高考对弹簧模型的考查[J]. 高中数理化. 2014(Z1): 73-75.
- [7] 清华大学. 力学讨论课(2) [EB/OL]. <https://www.docin.com/p-1339104386.html?docfrom=rrela>, 2015-10-30.