Operations Research and Fuzziolgy 运筹与模糊学, 2012, 2, 42-52
http://dx.doi.org/10.12677/orf.2012.23006 Published Online August 2012 (http://www.hanspub.org/journal/orf.html)

Rank Game

Zhi Lin

Schools of Science, Chongqing Jiaotong University, Chongqing
Email: linzhi7525@163.com

Received: Jul. 6th, 2012; revised: Jul. 15th, 2012; accepted: Aug. 12th, 2012

Abstract: In this paper, we introduce the concept of the rank game by an agon and propose its mathematical model, and prove two theorems for two-person rank game. Moreover, by some examples, we also show the difference of Nash equilibrium point and rank equilibrium point.

Keywords: Rank Game; Rank Equilibrium; Rank; Nash Equilibrium

名次博弈

林　志

重庆交通大学理学院，重庆
Email: linzhi7525@163.com

收稿日期：2012 年 7 月 6 日；修回日期：2012 年 7 月 15 日；录用日期：2012 年 8 月 12 日

摘　要：通过一场有奖竞赛活动，本文介绍了名次博弈的基本概念及数学模型，给出了 2 人–名次博弈的两个基本结论；文中通过一些例子，指出了名次均衡与 Nash 均衡的差异。

关键词：名次博弈；名次均衡；名次数；Nash 均衡

1. 一场有奖竞赛活动

某电视台举办了一场大型有奖竞赛活动，活动涉及知识问答、智力游戏等诸多内容，共有 18 名选手参加，该活动由预赛和决赛两阶段构成，在预赛阶段有三轮比赛，第一轮比赛 18 名选手同场竞技，根据各自的表现每人获得某一分数，然后进入第二轮比赛，在这一轮比赛中，18 名选手随机分组，3 人一组，总共分成 6 组，各组在不同地点同时进行比赛，比赛结果每人又获得某一分数值，两轮所得分数之和，即为选手预赛第二轮的累积积分，根据比赛规则，在预赛的第二轮比赛结束后，各组累积积分第一的选手将直接进入决赛，这样有 6 名选手将直接进入决赛，其他 12 名选手将参加预赛的第三轮比赛，其中，各组累积积分第二的选手(共 6 名)将组成 A 组进行比赛，各组累积积分第三的选手(共 6 名)将组成 B 组进行比赛，比赛结束后，各组依据选手预赛第三轮累积积分(第二轮累积积分与第三轮比赛得分之和)从高到低分别进行排序，A 组排前三名的选手获得进入决赛的资格，B 组排第一名的选手获得进入决赛的资格。各选手在每一轮比赛结束后，都知道自己及其他选手的累积积分(以及已经结束的每一轮比赛得分)。主办方赛前公告，凡进入决赛的选手，将获得 1 万至 500 万不等的奖励。另外，预赛的每一轮比赛前，主持人当着各选手的面，抽签决定比赛题目；比赛规则规定任何两个选手都不能结盟以针对第三人，假定所有选手都遵守这一规定；比赛规则还规定，在决赛阶段，若两选手的累积积分相同，则将按他们预赛阶段累积积分的高低来排名次；以上信息是公开的，假定每一个选手都知道这些信息。目前，假设比赛进入预赛的第二轮，某组中 A、B、C 三位选手玩如下的智力游戏：选手 A 有 α_1、α_2 两个策略可供选择，选手 B 有 β_1、β_2 两个策略可供选择，选手 C 有 γ_1、γ_2 两个策略可供选择，支付表见表 1~2，表格

中的第一个数字表示选手 A 的得分，第二个数字表示选手 B 的得分，第三个数字表示选手 C 的得分。

现在，面临如下问题：

1) 如果预赛的第一轮比赛，选手 A 获得 10 分，选手 B 获得 30 分，选手 C 获得 0 分，那么在这一场比赛中，三位选手会如何选择？最终的结果如何？

2) 如果预赛的第一轮比赛三位选手有相同得分，那么在这一场比赛中，三位选手又会如何选择？最终的结果又如何？

Table 1. Player C chooses strategy γ_1
表 1. 若选手 C 选择策略 γ_1

		选手 B	
		β_1	β_2
选手 A	α_1	(60, 110, 90)^R	(50, 40, 61)
	α_2	(30, 35, 37)	(40, 15, 60)

Table 2. Player C chooses strategy γ_2
表 2. 若选手 C 选择策略 γ_2

		选手 B	
		β_1	β_2
选手 A	α_1	(120, 110, 92)	(90, 70, 88)
	α_2	(130, 150, 100)	(250, 290, 330)

很明显，这是一个 3 人－非合作博弈问题，但与传统的非合作博弈问题比较，该博弈问题又有其独特之处。

在文献[1,2]中，Nash 用不动点定理证明了 n 人非合作博弈均衡局势的存在性，由此奠定了非合作博弈的理论基础。在非合作博弈中，各局中人被假定总是极大化自己的支付(收益)值(在混合策略情形为支付期望值)，而不关心其他局中人的支付(收益)值是多少，换句话说，各局中人被假定只关心自己支付值的绝对数，而不关心自己支付值的相对数，而在实践中，这一假定经常并不成立，例如，对上面的有奖竞赛活动第二轮预赛中的选手 A、B 和 C 来说，他们尽管也关心自己得分的绝对数，但显然他们更关心自己得分的相对数(严格地说，他们更关心自己累积积分的相对数)，因为他们三人中的累积积分第一者，将直接进入决赛，而累积积分第二者进入决赛的概率是累积积分最低者的三倍。上面的例子看起来像虚构的，但类似的情形在现实中十分常见，比如“在若干个职工中评选几个优秀职工给予奖励”，“在若干个投标者中选择几个中标者”，等等，都属于这类问题；近年来，在国际关系中，大国间的博弈也开始出现类似的苗头，老大希望自己永远是老大，老二、老三等自然不甘落后，希望后来居上，这本身十分正常，但重视排名的博弈思想，与已有的重视支付(收益)绝对数的博弈思想是完全不同的，在重视排名思想指导下的局中人，行为经常也显得与众不同，有时甚至显得很怪异、不可捉摸，事实上，只要了解了其博弈思路，其行为不单不怪异，而且十分正常，事先预测也完全可能。

2. 名次博弈

1) 名次博弈的基本要素

局中人、策略集、支付函数是经典的非合作博弈的三大基本要素，也是名次博弈的基本要素，但名次博弈中，局中人的选择，不单与博弈中的(相对)支付(收益)值有关，还与博弈前局中人的支付(收益)的初始值有关，强者(支付的初始值大者)与弱者(支付的初始值小者)在同一博弈中显然有不同的选择，换句话说，名次博弈是根据局中人博弈后的累积支付值(博弈前的初始支付值与博弈后获得的支付值之和)来排名的，因此，名次博弈还有第四大基本要素：局中人的初始支付(收益)值。

2) 名次博弈的几个基本概念

用 $I=\{1,2,\cdots,n\}$ 表示局中人集合。对任何 $i\in I$，用 K_i 表示局中人 i 的策略集，用实值函数 $f_i:K\mapsto R$ 表示局中人 i 的支付(收益)函数，用 f_i^0 表示局中人 i 的初始支付值。记 $K=\prod_{i=1}^{n}K_i, K_{\hat{i}}=\prod_{j\neq i,j=1}^{n}K_j, f^0=\left(f_1^0,f_2^0,\cdots,f_n^0\right), f\left(x\right)=\left(f_1\left(x\right),f_2\left(x\right),\cdots,f_n\left(x\right)\right), \forall x\in K$。对任何 $x\in K$，可记为 $x=\left(x_i,x_{\hat{i}}\right)$。对任何 $i\in I, x\in K$，记 $Q_i=\left\{j\in I: f_j^0+f_j\left(x\right)>f_i^0+f_i\left(x\right)\right\}, P_i=\left\{j\in I: f_j^0+f_j\left(x\right)=f_i^0+f_i\left(x\right)\right\}$，$m_i=\left|Q_i\right|+1$，$l_i=\left|P_i\right|$，其中 $|\bullet|$ 表示集合中的元素个数，记

$$h_i=\frac{l_i-1}{l_i},\ u_i=m_i+h_i.$$

显然，m_i 和 l_i 都是正整数，并且 $n\ge m_i,l_i,u_i\ge 1>h_i\ge 0$。注意，对任何 $i\in I$，$x\in K$，$u_i\left(x\right)=u_i\left(f^0,f\left(x\right)\right)$。

定义 2.1. 对任何 $i\in I$，$x\in K$，m_i 被称为局中人 i 在点 $x\in K$ 处的名次整数，h_i 被称为局中人 i 在点 $x\in K$ 处的名次余数，u_i 被称为局中人 i 在点 $x\in K$ 处的名次数。对任何 $x\in K$，$u\left(x\right)=\left(u_1\left(x\right),u_2\left(x\right),\cdots,u_n\left(x\right)\right)$(简记，$u=\left(u_1,u_2,\cdots u_n\right)$)被称为在点 $x\in K$ 处的名次列，$f\left(x\right)=\left(f_1\left(x\right),f_2\left(x\right),\cdots,f_n\left(x\right)\right)$(简记，$f=\left(f_1,f_2,\cdots,f_n\right)$)被称为在点 $x\in K$ 处的支付列，$F\left(x\right)=\left(F_1\left(x\right),F_2\left(x\right),\cdots,F_n\left(x\right)\right)=f^0+f\left(x\right)=\left(f_1^0+f_1\left(x\right),f_2^0+f_2\left(x\right),\cdots,f_n^0+f_n\left(x\right)\right)$(简记，$F=\left(F_1,F_2,\cdots,F_n\right)$)被称为在点 $x\in K$ 处的累积支付列。如果对任何 $j\left(n\ge j\ge 1\right)$，存在 $i\in I$，使 $u_i=j$，那么，$\left(u_1,u_2,\cdots,u_n\right)$ 被称为一个全名次列，否则被称为一个非全名次列。

容易验证：对任何 $i,j\in I,x\in K,u_i=\left(<,>\right)u_j$ 当且仅当 $F_i\left(x\right)=\left(>,<\right)F_j\left(x\right)$。

3) 名次博弈的基本规则

名次博弈的博弈规则是：局中人总是力图使排名在自己之前(博弈后累积支付值比自己的大)的局中人数最少，在满足这一条件的基础上，局中人总是力图使与自己排名相同(博弈后累积支付值与自己的相等)的局中人数最少，在满足上述两个条件的基础上，局中人总是力图使自己博弈中获得的支付值最大；等价地，名次规则还可表述为：局中人总是力图使排名在自己之前的局中人数最少，在满足这一条件的基础上，局中人总是力图使排名在自己之后(博弈后累积支付值比自己的小)的局中人数最多，在满足上述两个条件的基础上，局中人总是力图使自己博弈中获得的支付值最大。

名次博弈属于非合作博弈范畴，Nash 博弈关于局中人是理性的、信息是对称的等假设条件，也都是名次博弈的假设条件。名次博弈与 Nash 博弈的主要区别是：在 Nash 博弈中，各局中人被假定总是极大化自己的支付值，而不关心其他局中人的支付值，而在名次博弈中，各局中人被假定总是极小化自己的名次数，在名次数达到最小的前提下，再极大化自己的支付值。

Nash 博弈适合于局中人无竞争关系情形，而名次博弈适合于局中人间存在竞争关系情形。

4) 名次博弈的数学模型

用 $I=\{1,2,\cdots,n\}$ 表示局中人集合。对任何 $i\in I$，用 K_i,f_i^0,f_i 分别表示局中人 i 的策略集、初始支付值和支付函数。

名次博弈是：寻找 $x^*=\left(x_1^*,x_2^*,\cdots,x_n^*\right)\in K$ 满足：对任何 $i\in I$，$y_i\in K_i$，

$$u_i\left(f^0+f\left(x_i^*,x_{\hat{i}}^*\right)\right)=\min_{y_i\in K_i}u_i\left(f^0+f\left(y_i,x_{\hat{i}}^*\right)\right),$$

并且，如果 $u_i\left(f^0+f\left(x_i^*,x_{\hat{i}}^*\right)\right)=u_i\left(f^0+f\left(y_i,x_{\hat{i}}^*\right)\right)$，则有

$$f_i\left(x_i^*,x_{\hat{i}}^*\right)\ge f_i\left(y_i,x_{\hat{i}}^*\right).$$

x^* 被称为名次博弈的一个名次均衡点；名次博弈通常被表示为 $\Gamma=\left\{K_i,f_i^0,f_i\right\}_{i\in I}$。对任何 $i\in I$，如果 K_i 是一个有限集，那么 $f_i\left(F_i\right)$ 可以用矩阵或表格来表示，这被称为支付(累积支付)矩阵或支付(累积支付)表，在这种情况下，名次博弈被称为有限名次博弈，否则称为无限名次博弈。若名次博弈的支付函数满足条件：$\forall x\in K$，

$\sum_{i\in I} f_i(x)=0$，则称为零和名次博弈。

对名次博弈问题 $\Gamma=\left\{K_i, f_i^0, f_i\right\}_{i\in I}$，如果进行 Nash 博弈(此时初始支付值不起作用)，则可表示为 $\tilde{\Gamma}=\left\{K_i, f_i\right\}_{i\in I}$，称 $\tilde{\Gamma}$ 为名次博弈 Γ 对应的 Nash 博弈问题。显然，一个名次博弈问题对应惟一一个 Nash 博弈问题，而一个 Nash 博弈问题，因初始支付值的不同，不能对应惟一的名次博弈问题。

由名次博弈模型易知，如果名次博弈 $\Gamma^1=\left\{K_i, f_i^0, f_i\right\}_{i\in I}$ 的所有局中人的初始支付减去同一个数 a 后，得到名次博弈 $\Gamma^2=\left\{K_i, f_i^0-a, f_i\right\}_{i\in I}$，那么，名次博弈 Γ^1 和 Γ^2 有相同的名次均衡集，并且对任何一个名次均衡(如果存在)，其在 Γ^1 和 Γ^2 中有相同的中的名次列和支付列，累积支付列有如下关系：$\forall i\in I, F_i^1=F_i^2+a$。

需要说明的是，在有限策略集情形，尽管名次博弈也可以用定义混合策略的方式，将策略集扩充为混合策略集，然后按照期望支付值来计算名次数，进行名次博弈，但这不是本文讨论的内容，为叙述方便，本文所提及的所有策略均为纯策略，所有 Nash 均衡及名次均衡均为纯策略均衡，不含混合策略均衡。

5) 名次博弈的几个结果

定理 2.1. 对 2 人－(有限或无限)名次博弈 Γ，如果存在两个名次均衡 $x^{1*}=\left(x_1^{1*}, x_2^{1*}\right), x^{2*}=\left(x_1^{2*}, x_2^{2*}\right)\in K$，那么

$$u^{1*}=u^{2*},$$

其中 $u^{1*}=\left(u_1\left(f^0+f\left(x^{1*}\right)\right), u_2\left(f^0+f\left(x^{1*}\right)\right)\right), u^{2*}=\left(u_1\left(f^0+f\left(x^{2*}\right)\right), u_2\left(f^0+f\left(x^{2*}\right)\right)\right)$。

证明：对 2 人－名次博弈 Γ，只有如下三种情况：

1) $u^{1*}=(1,2)$。因 x^{1*} 是一个名次均衡，那么，$u_2\left(f^0+f\left(x_1^{1*}, x_2^{2*}\right)\right)\ge u_2\left(f^0+f\left(x_1^{1*}, x_2^{1*}\right)\right)=2$，于是有

$$u_2\left(f^0+f\left(x_1^{1*}, x_2^{2*}\right)\right)=2, u_1\left(f^0+f\left(x_1^{1*}, x_2^{2*}\right)\right)=1.$$

因 x^{2*} 也是一个名次均衡，那么，

$$u_1\left(f^0+f\left(x_1^{2*}, x_2^{2*}\right)\right)\le u_1\left(f^0+f\left(x_1^{1*}, x_2^{2*}\right)\right)=1,$$

于是有 $u_1\left(f^0+f\left(x_1^{2*}, x_2^{2*}\right)\right)=1, u_2\left(f^0+f\left(x_1^{2*}, x_2^{2*}\right)\right)=2$，即：

$$u^{2*}=u^{1*}=(1,2).$$

2) $u^{1*}=(1,2)$。用类似的方法，可以得到：$u^{2*}=u^{1*}=(2,1)$。

3) $u^{1*}=\left(1\frac{1}{2},1\frac{1}{2}\right)$。因 x^{1*} 是一个名次均衡，那么 $u_2\left(f^0+f\left(x_1^{1*}, x_2^{1*}\right)\right)\le u_2\left(f^0+f\left(x_1^{1*}, x_2^{2*}\right)\right)$，即有：$u_2\left(f^0+f\left(x_1^{1*}, x_2^{2*}\right)\right)=1\frac{1}{2}$ 或 2。

如果 $u_2\left(f^0+f\left(x_1^{1*}, x_2^{2*}\right)\right)=2$，则有 $u_1\left(f^0+f\left(x_1^{1*}, x_2^{2*}\right)\right)=1$。因 x^{2*} 是名次均衡，那么，$u_1\left(f^0+f\left(x_1^{2*}, x_2^{2*}\right)\right)\le u_1\left(f^0+f\left(x_1^{1*}, x_2^{2*}\right)\right)=1$，得到 $u_1\left(f^0+f\left(x_1^{2*}, x_2^{2*}\right)\right)=1$，即 $u^{2*}=(1,2)$。再次因 x^{2*} 是名次均衡，得 $u_2\left(f^0+f\left(x_1^{2*}, x_2^{1*}\right)\right)\ge u_2\left(f^0+f\left(x_1^{2*}, x_2^{2*}\right)\right)=2$，于是 $u_2\left(f^0+f\left(x_1^{2*}, x_2^{1*}\right)\right)=2$，$u_1\left(f^0+f\left(x_1^{2*}, x_2^{1*}\right)\right)=1$，即 $u\left(f^0+f\left(x_1^{2*}, x_2^{1*}\right)\right)=(1,2)$，这与 x^{1*} 是名次均衡矛盾，即：

$$u^{2*}=u^{1*}=\left(1\frac{1}{2},1\frac{1}{2}\right)$$

证毕。

下面的例子说明，如果 $n\ge 3$，定理 2.1 未必成立。在本文中，只要不引起混淆，Nash 均衡都用上标“N”标出，名次均衡都用上标“R”标出。

例 2.1. 考虑如下 3 人－有限名次博弈，其中 $f_1^0=f_2^0=f_3^0=0$，支付表为(表 3 和 4)：

Table 3. Player 3 chooses strategy γ_1
表 3. 若局中人 3 选择策略 γ_1

		局中人 2		
		β_1	β_2	β_3
局中人 1	α_1	$(5, 4, 3)^R$	(3, 2, 2)	(4, 2, 8)
	α_2	(4, 4, 8)	(1, 1, 1)	(2, 1, 8)
	α_3	(3, 2, 8)	(4, 3, 8)	(6, 5, 7)

Table 4. Player 3 chooses strategy γ_2
表 4. 若局中人 3 选择策略 γ_2

		局中人 2		
		β_1	β_2	β_3
局中人 1	α_1	(4, 3, 2)	(3, 2, 1)	(1, 2, 4)
	α_2	(3, 3, 2)	(2, 3, 4)	(2, 3, 4)
	α_3	(4, 4, 5)	(3, 4, 6)	$(4, 5, 9)^R$

累积支付表与支付表相同。容易验证：$x^{1*}=(\alpha_1,\beta_1,\gamma_1)$ 和 $x^{2*}=(\alpha_3,\beta_3,\gamma_2)$ 都是名次均衡，但 $u^{1*}=(1,2,3)$，$u^{2*}=(3,2,1)$。

定理 2.2. 对 2 人－(有限或无限)零和名次博弈 $\Gamma=\{K_1,K_2,f_1^0,f_2^0,f_1,f_2\}(f_1+f_2=0)$，设名次均衡点集为 S，其对应 2 人－Nash 零和博弈 $\tilde{\Gamma}=\{K_1,K_2,f_1,f_2\}(f_1+f_2=0)$，设其 Nash 均衡点集为 $\tilde{S}$，则有

$$S=\tilde{S}$$

证明：不失一般性，假定 $f_1^0=0,\ f_2^0=a$ (相当于 $a=f_2^0-f_1^0$)。用 F_1,F_2 分别表示局中人 1 和 2 的累积支付函数。若 $S=\varnothing$，则 $S\subset\tilde{S}$ 成立，假定 $S\neq\varnothing$ 。$\forall x^R=(x_1^R,x_2^R)\in S$，

1) $u(x_1^R,x_2^R)=(1,2)$。此时

$$F_1(x_1^R,x_2^R)=f_1^0+f_1(x_1^R,x_2^R)=f_1(x_1^R,x_2^R)>F_2(x_1^R,x_2^R)=f_2^0+f_2(x_1^R,x_2^R)=a-f_1(x_1^R,x_2^R).$$

如果存在 $y_1\in K_1$，使 $f_1(y_1,x_2^R)>f_1(x_1^R,x_2^R)$，那么有：

$$F_2(y_1,x_2^R)=a+f_2(y_1,x_2^R)=a-f_1(y_1^R,x_2^R)<a-f_1(x_1^R,x_2^R)<f_1(x_1^R,x_2^R)<f_1(y_1,x_2^R)=F_1(y_1,x_2^R),$$

即 $u(y_1,x_2^R)=(1,2)$，这与 x^R 是名次均衡矛盾。如果存在 $z_2\in K_2$，使 $f_2(x_1^R,z_2)>f_2(x_1^R,x_2^R)$，则有

$$F_2(x_1^R,z_2)>F_2(x_1^R,x_2^R),$$

那么，无论 $u(x_1^R,z_2)=(1,2),(2,1),\left(1\frac{1}{2},1\frac{1}{2}\right)$，都与 x^R 是名次均衡矛盾。

这说明，无论 a 取何值，x_1^R 都使 $f_1(y_1,x_2^R)$ 达到最大值，x_2^R 都使 $f_2(x_1^R,y_2)=-f_1(x_1^R,y_2)$ 达到最大值，即：$x^R\in\tilde{S}$ 。

2) $u(x_1^R,x_2^R)=\left(1\frac{1}{2},1\frac{1}{2}\right)$。此时 $F_1(x_1^R,x_2^R)=F_2(x_1^R,x_2^R)$，于是有 $f_1(x_1^R,x_2^R)=a+f_2(x_1^R,x_2^R)=a-f_1(x_1^R,x_2^R)$，得到 $f_1(x_1^R,x_2^R)=\frac{a}{2}$。如果存在 $y_1\in K_1$，使 $f_1(y_1,x_2^R)>f_1(x_1^R,x_2^R)=\frac{a}{2}$，那么有 $F_1(y_1,x_2^R)=f_1(y_1,x_2^R)>\frac{a}{2}$，$F_2(y_1,x_2^R)=a+f_2(y_1,x_2^R)=a-f_1(y_1,x_2^R)<a-f_1(x_1^R,x_2^R)=\frac{a}{2}$，得到 $F_1(y_1,x_2^R)>F_2(y_1,x_2^R)$，即 $u(y_1,x_2^R)=(1,2)$，

这与 x^R 是名次均衡矛盾。如果存在 $Z_2 \in K_2$，使 $f_2\left(x_1^R, z_2\right) < f_2\left(x_1^R, x_2^R\right) = -f_2\left(x_1^R, x_2^R\right) = -\frac{a}{2}$，那么有 $F_1\left(x_1^R, z_2\right) = f_1\left(x_1^R, z_2\right) = -f_2\left(x_1^R, z_2\right) < \frac{a}{2}$，$F_2\left(x_1^R, z_2\right) = a + f_2\left(x_1^R, z_2\right) > a - \frac{a}{2} = \frac{a}{2}$，得到 $F_1\left(x_1^R, z_2\right) < F_2\left(x_1^R, z_2\right)$，即 $u\left(x_1^R, z_2\right) = (2,1)$，这与 x^R 是名次均衡矛盾。

这说明，无论 a 取何值，x_1^R 都使 $f_1\left(y_1, x_2^R\right)$ 达到最大值，x_2^R 都使 $f_2\left(x_1^R, z_2\right)$ 达到最大值，即：$x^R \in \tilde{S}$。

对 $u\left(x_1^R, x_2^R\right) = (2,1)$ 情形，同理可证上述结论。因此，$S \subset \tilde{S}$。

若 $\tilde{S} = \varnothing$，则 $\tilde{S} \subset S$ 成立，假定 $\tilde{S} \neq \varnothing$。$\forall x^N = \left(x_1^N, x_2^N\right) \in \tilde{S}$，由 Nash 均衡的定义知，$x_1^N$ 使 $f_1\left(y_1, x_2^N\right)$ 最大，x_2^N 使 $f_2\left(x_1^N, z_2\right) = -f_1\left(x_1^N, z_2\right)$ 最大。只需证明 x^N 使局中人 1 和 2 的名次数都最小即可。

1) $u\left(x_1^N, x_2^N\right) = (1,2)$。此时 x^N 已使局中人 1 的名次数最小，现需证明 x^N 使局中人 2 的名次数最小即可。如果存在 $z_2 \in K_2$ 使 $F_1\left(x_1^N, z_2\right) \le F_2\left(x_1^N, z_2\right)$，即：$f_1\left(x_1^N, z_2\right) \le a - f_1\left(x_1^N, z_2\right)$，于是有 $f_1\left(x_1^N, z_2\right) \le \frac{a}{2}$，得到

$$f_2\left(x_1^N, z_2\right) = -f_1\left(x_1^N, z_2\right) \ge -\frac{a}{2}.$$

由 $u\left(x_1^N, x_2^N\right) = (1,2)$，得到

$$F_1\left(x_1^N, x_2^N\right) = f_1^0 + f_1\left(x_1^N, x_2^N\right) = f_1\left(x_1^N, x_2^N\right) > F_2\left(x_1^N, x_2^N\right) = f_2^0 + f_2\left(x_1^N, x_2^N\right) = a - f_1\left(x_1^N, x_2^N\right),$$

即有：$f_1\left(x_1^N, x_2^N\right) > \frac{a}{2}$，得到 $f_2\left(x_1^N, x_2^N\right) = -f_1\left(x_1^N, x_2^N\right) < -\frac{a}{2} \le f_2\left(x_1^N, z_2\right)$，与 x^N 是 Nash 均衡点矛盾，这说明 x^N 已使局中人 2 的名次数最小。因此，$x^N \in S$。

2) $u\left(x_1^N, x_2^N\right) = \left(1\frac{1}{2}, 2\frac{1}{2}\right)$。此时 $F_1\left(x_1^N, x_2^N\right) = F_2\left(x_1^N, x_2^N\right)$，得到 $f_1\left(x_1^N, x_2^N\right) = a - f_1\left(x_1^N, x_2^N\right)$，即 $f_1\left(x_1^N, x_2^N\right) = \frac{a}{2}$。如果存在 $y_1 \in K_1$，使 $F_1\left(y_1, x_2^N\right) > F_2\left(y_1, x_2^N\right)$，那么有：$f_1\left(y_1, x_2^N\right) > a - f_1\left(y_1, x_2^N\right)$，即 $f_1\left(y_1, x_2^N\right) > \frac{a}{2} = f_1\left(x_1^N, x_2^N\right)$，这与 x^N 是 Nash 均衡点矛盾，这说明 x^N 使局中人 1 的名次数最小。如果存在 $z_2 \in K_2$，使 $F_2\left(x_1^N, z_2\right) > F_1\left(x_1^N, z_2\right)$，那么有 $a - f_1\left(x_1^N, z_2\right) > f_1\left(x_1^N, z_2\right)$，即 $f_1\left(x_1^N, z_2\right) < \frac{a}{2}$，于是

$$f_2\left(x_1^N, z_2\right) = -f_1\left(x_1^N, z_2\right) > -\frac{a}{2} = -f_1\left(x_1^N, x_2^N\right) = f_2\left(x_1^N, x_2^N\right),$$

这又与 x^N 是 Nash 均衡点矛盾，这说明 x^N 使局中人 2 的名次数最小。因此，$x^N \in S$。对 $u\left(x_1^N, x_2^N\right) = (2,1)$ 情形，同理可证上述结论。因此，$S \subset \tilde{S}$。所以 $S = \tilde{S}$。证毕。由于 Nash 均衡与初始支付值无关，因此，对 2 人－(有限或无限)零和名次博弈而言，其名次均衡与其初始支付值无关。下面的例子说明，如果 $n \ge 3$，定理 2.2 未必成立。

例 2.2. 考虑如下 3 人－有限零和名次博弈，支付表为(表 5 和 6)：

Table 5. Player 3 chooses strategy γ_1
表 5. 若局中人 3 选择策略 γ_1

		局中人 2	
		β_1	β_2
局中人 1	α_1	(1, 2, –3)	(–4, 3, 1)
	α_2	(3, –5, 2)	(4, –1, –3)

Table 6. Player 3 chooses strategy γ_2
表 6. 若局中人 3 选择策略 γ_2

		局中人 2	
		β_1	β_2
局中人 1	α_1	(5, 4, –9)	$(–5, 3, 2)^R$
	α_2	(–5, 3, 2)	(–6, 8, –2)

当 $f_1^0 = f_2^0 = f_3^0 = 0$ 时，累积支付表与支付表相同，容易验证：$x^R = (\alpha_1, \beta_2, \gamma_2)$ 是惟一的名次均衡。当 $f_1^0 = f_2^0 = 0,\ f_3^0 = -5$ 时，累积支付表为(表 7 和 8)：

Table 7. Player 3 chooses strategy γ_1
表 7. 若局中人 3 选择策略 γ_1

		局中人 2	
		β_1	β_2
局中人 1	α_1	(1, 2, –8)	(–4, 3, –4)
	α_2	(3, –5, –3)	(4, –1, –8)

Table 8. Player 3 chooses strategy γ_2
表 8. 若局中人 3 选择策略 γ_2

		局中人 2	
		β_1	β_2
局中人 1	α_1	(5, 4, –14)	(–5, 3, –3)
	α_2	(–5, 3, –3)	$(–6, 8, –7)^R$

容易验证：$x^R = (\alpha_2, \beta_2, \gamma_2)$ 是惟一的名次均衡；这说明对零和名次博弈，其名次均衡同样与支付初始值有关。

在本例中，容易验证，Nash 均衡点不存在。

3. 名次均衡的几个例子

1) 三个经典例子。

下面是著名的囚徒困境问题，见文献[3]。

例 3.1. 警方拘捕了两个犯罪嫌疑人，但没有掌握足够的证据指证其罪行，如果两个犯罪嫌疑人中至少有一个供认犯罪，就能确定罪行成立。警方将两个嫌疑人隔离开来，并分别给他们如下选择：供认或不供认，如果两人都供认，则两人都将被判刑 3 个月；如果两人都不供认，由于缺乏足够的证据，两人将从轻发落，各被判刑 1 个月；如果一个供认而另一个不供认，则供认者释放，不供认者将被判刑 12 个月。此时。两个嫌疑人将会如何行动呢？显然，支付表为(表 9)：

Table 9. The prisoner's dilemma
表 9. 囚徒困境

		嫌疑人 2	
		供认	不供认
嫌疑人 1	供认	$(–3, –3)^{R,N}$	(0, –12)
	不供认	(–12, 0)	(–1, –1)

如果两嫌疑人关心坐牢时间的相对数超过绝对数，上述问题可以看成 2－人有限名次博弈，其中 $f_1^0 = f_2^0 = 0$，此时，该问题累积支付表与支付表相同。

容易验证：(供认，供认)是一个惟一的名次均衡。

假设 $f_1^0 = -10,\ f_2^0 = -1$(这可解释为：嫌疑人 1 将因其它罪行被判坐牢 10 个月，嫌疑人 2 将因其它罪行被判坐牢 1 个月，加上现在指控的罪行，其实际坐牢月数为所有罪行判罚坐牢月数之和)，此时，该问题累积支付表为(表 10)：

Table 10. The prisoner's dilemma
表 10. 囚徒困境

		嫌疑人 2	
		供认	不供认
嫌疑人 1	供认	$(-13, -4)^{R,N}$	(–10, –13)
	不供认	(–22, –1)	(–11, –2)

容易验证(供认，供认)仍是一个惟一的名次均衡。事实上，在囚徒困境问题中，无论各嫌疑人的初始支付值是多少，(供认，供认)不仅是惟一的名次均衡，也是惟一的 Nash 均衡。

该例说明，在名次博弈中，个体理性与集体理性的矛盾，仍然难以协调。实际上，在名次博弈中的局中人之间，本身就存在某种程度的竞争关系，得到这一结果，也在意料之中。

下面的例子被称为性别战问题，见文献[4]。

例 3.2. 一对夫妻，准备安排业余活动，丈夫喜欢看足球比赛，妻子喜欢看歌剧表演，但他们愿意在一起，不愿分开，其支付表如下(表 11)，问他们会如何选择？

Table 11. The battle of sex
表 11. 性别战

		妻子	
		足球	歌剧
丈夫	足球	(3, 2)	(0, 0)
	歌剧	(0, 0)	(2, 3)

如果夫妻间关心各自得分的相对数超过绝对数，上述问题可以看成 2－人有限名次博弈问题，其中 $f_1^0 = f_2^0 = 0$，此时，其累积支付表与支付表相同。容易验证：(足球，歌剧)是一个惟一的名次均衡。

如果$\left| f_1^0 - f_2^0 \right| > 1$，容易验证：(足球，足球)和(歌剧，歌剧)都是名次均衡，如果$1 \ge f_1^0 - f_2^0 > 0$，容易验证：(足球，足球)是一个惟一的名次均衡，如果$0 > f_1^0 - f_2^0 \ge -1$，容易验证：(歌剧，歌剧)是一个惟一的名次均衡。事实上，在性别战问题中，无论夫妻两人的初始支付值是多少，(足球，足球)和(歌剧，歌剧)都是 Nash 均衡。

在性别战中，夫妻双方愿意在一起，不愿分开，那他们之间是不是一定不存在竞争关系呢？未必！比如有的夫妻个性好强，对配偶有支配欲望，这样的夫妻，现实生活中并不少见，因此，夫妻间进行名次博弈也是正常的，更重要的是，性别战问题，主要并不是用于解决夫妻间的问题。当 $f_1^0 = f_2^0 = 0$时，可解释为夫妻间实力相同，任何一方都无力支配另一方，其结果是双方互不让步，各干各的是最可能的选择，即：丈夫看足球比赛，妻子看歌剧表演；当$\left| f_1^0 - f_2^0 \right| > 1$时，可解释为夫妻间实力相差悬殊，不管如何选择，博弈结果不能改变优势方的支配地位，这样双方是容易妥协的，现实生活中也经常看到这种情况，当夫妻双方差异较大时，夫妻关系经常比较和谐。当$1 \ge f_1^0 - f_2^0 > 0$时，这可解释为丈夫比妻子稍强，为了巩固自己的优势地位，不太可能作出让步，而妻子的选择无力改变自己的弱势地位，考虑到夫妻感情而屈从于丈夫是妻子更可能的选择：夫妻双方都看足

球比赛。当$0 > f_1^0 - f_2^0 \ge -1$时，可同样解释。通过名次博弈结果分析说明，对于关心各自支付的相对数超过绝对数的夫妻，当夫妻间差异大(初始支付值相差大)时，夫妻间较和谐，关系较稳定；当夫妻间差异较小(初始支付值相差小)时，强的一方往往有较强的支配欲望，弱的一方无力改变弱势地位，屈从于强势方是最可能的选择；当夫妻双方实力完全相同(初始支付值相同)时，夫妻双方难以相互影响，夫妻关系不易稳定。

下面的例子经过了改动，其原型见文献[5](P55)。

例 3.3. 假定有 A、B 两人，A 拥有$2a$美元，B 拥有 0 美元，A、B 两人共同分配 100 美元，分配规则是：在不事先交流的情况下，A 提出份额$x(100 \ge x \ge 0)$，B 提出份额$y(100 \ge y \ge 0)$，如果$x+y=100$，那么，A 获得x美元，B 获得y美元，否则两人都获得 0 美元。现在的问题是：A 和 B 的会如何选择？

如果 A 和 B 两人关心各自所分得美元的相对数超过绝对数，上述问题可以看成 2-人有限名次博弈问题$\Gamma = \left\{K_i, f_i^0, f_i\right\}_{i\in I}$，其中$I = \{A, B\}$，$K_A = \{x : 100 \ge x \ge 0\}$，$K_B = \{y : 100 \ge y \ge 0\}$，$f^0 = \left(f_A^0, f_B^0\right) = (2a, 0)$，支付函数分别是：

$$f_A = \begin{cases} x & 如果\ x+y=100 \\ 0 & 否则 \end{cases} \qquad f_{\mathrm{B}} = \begin{cases} y & 如果\ x+y=100 \\ 0 & 否则 \end{cases}$$

累积支付函数分别是：$F_A = f_A^0 + f_A$；$F_B = f_B^0 + f_B$，即为：

$$F_A = \begin{cases} 2a+x & 如果\ x+y=100 \\ 2a & 否则 \end{cases} \qquad F_{\mathrm{B}} = \begin{cases} y & 如果\ x+y=100 \\ 0 & 否则 \end{cases}$$

如果$a=0$，容易验证$(50,50)$是一个惟一的名次均衡；如果$50 \ge a > 0$，容易验证名次均衡集合为$\left\{(x,y) : x+y=100, x > 50-a, y \ge 0\right\}$；如果$a > 50$，容易验证名次均衡集合为$\left\{(x,y) : x+y=100, x \ge 0, y \ge 0\right\}$。

注意，无论a的值是多少，Nash 均衡集合都为$\left\{(x,y) : x+y=100, x \ge 0, y \ge 0\right\}$。

需要特别说明的是，当$a=0$时，$(50,50)$是一个惟一的名次均衡，这样的结果对 A 和 B 来说十分公平，换句话说，名次博弈的思想，可以导出公平的结果，而 Nash 博弈则得不到这样明显的结论。

2) 几个反映名次均衡与 Nash 均衡差异的例子

例 3.4. 考虑如下 2－人有限名次博弈问题，支付表如下(表 12)：

Table 12. Exist rank equilibrium and Nash equilibrium, but different
表 12. 名次均衡与 Nash 均衡都存在，但不同

		局中人 2	
		β_1	β_2
局中人 1	α_1	$(2, 4)^R$	$(5, 5)^N$
	α_2	(1, 2)	(3, 2)

如果$f_1^0 = f_2^0 = 0$，其累积支付表与支付表相同。容易验证(α_1, β_1)是一个惟一的名次均衡。

如果$f_1^0 = 1, f_2^0 = 0$，其累积支付表为(表 13)：

Table 13. Exist rank equilibrium and Nash equilibrium, but different
表 13. 名次均衡与 Nash 均衡都存在，但不同

		局中人 2	
		β_1	β_2
局中人 1	α_1	(3, 4)	(6, 5)
	α_2	$(2, 2)^R$	(4, 2)

容易验证(α_2,β_1)是一个惟一的名次均衡。需要说明的是，无论各局中人的初始支付值是多少，(α_1,β_2)都是一个惟一的 Nash 均衡。

例 3.5. 考虑如下 2 – 人有限名次博弈问题，其中 $f_1^0 = f_2^0 = 0$，支付表如下(表 14)：

Table 14. No rank equilibrium and Nash equilibrium
表 14. 名次均衡与 Nash 均衡都不存在

		局中人 2	
		β_1	β_2
局中人 1	α_1	(3, 4)	(4, 2)
	α_2	(5, 1)	(2, 3)

其累积支付表与支付表相同。容易验证：名次均衡和 Nash 均衡都不存在。

例 3.6. 考虑如下 2 – 人有限名次博弈问题，其中 $f_1^0 = f_2^0 = 0$，支付表如下(表 15)：

Table 15. Exist Nash equilibrium, no rank equilibrium
表 15. 存在 Nash 均衡，不存在名次均衡

		局中人 2	
		β_1	β_2
局中人 1	α_1	$(3, 4)^N$	(1, –2)
	α_2	(1, –1)	$(2, 3)^N$

其累积支付表与支付表相同。容易验证：(α_1,β_1)和(α_2,β_2)都是 Nash 均衡，但不存在名次均衡。

例 3.7. 考虑如下 2 – 人有限名次博弈，其中 $f_1^0 = f_2^0 = 0$，支付表如下(表 16)：

Table 16. Exist rank equilibrium, no Nash equilibrium
表 16. 存在名次均衡，不存在 Nash 均衡

		局中人 2	
		β_1	β_2
局中人 1	α_1	$(4, 4)^R$	(3, 2)
	α_2	(5, 6)	(2, 7)

其累积支付表与支付表相同。容易验证：(α_1,β_1)是惟一的名次均衡，但不存在 Nash 均衡。

4. 结论

现在，让我们来回答文章开始时提出的问题，它可以被看成一个 3 – 人名次博弈。对问题(1)，初始值为 $f_1^0 = 10,\ f_2^0 = 30,\ f_3^0 = 0$，累积支付表为(表 17 和 18)：

Table 17. Player C chooses strategy γ_1
表 17. 若选手 C 选择策略 γ_1

		选手 B	
		β_1	β_2
选手 A	α_1	(70, 140, 90)	(60, 70, 61)
	α_2	(40, 65, 37)	(50, 45, 60)

Table 18. Player C chooses strategy γ_2
表 18. 若选手 C 选择策略 γ_2

		选手 B	
		β_1	β_2
选手 A	α_1	(130, 140, 92)	(100, 100, 88)
	α_2	$(140, 180, 100)^R$	$(260, 320, 330)^N$

容易验证 $x^* = (\alpha_2, \beta_1, \gamma_2)$ 是一个惟一的名次均衡，即：选手 A 的最佳策略是 α_2，选手 B 的最佳策略是 β_1，选手 C 的最佳策略是 γ_2，博弈结果名次列为 $u^* = (2,1,3)$，也就是说，在预赛的第二轮结束后，选手 B 将直接进入决赛，选手 A 和 C 需要进入预赛的第三轮比赛，其中，选手 A 进入决赛的概率大约是 $\frac{1}{2}$，选手 C 进入决赛的概率大约是 $\frac{1}{6}$。

对问题(2)，初始值为 $f_1^0 = f_2^0 = f_3^0 = 0$，其累积支付表与支付表相同(见表 1~2)。容易验证 $x^* = (\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$ 是一个惟一的名次均衡，即：选手 A 的最佳策略是 α_1，选手 B 的最佳策略是 β_1，选手 C 的最佳策略是 γ_1，博弈结果名次列为 $u^* = (3,1,2)$，也就是说，在预赛的第二轮结束后，选手 B 将直接进入决赛，选手 A 和 C 需要进入预赛的第三轮比赛，其中，选手 C 进入决赛的概率大约是 $\frac{1}{2}$，选手 A 进入决赛的概率大约是 $\frac{1}{6}$。

但是，在上述问题中，$x^* = (\alpha_2, \beta_2, \gamma_2)$ 是惟一的 Nash 均衡点，这意味着无论是问题(1)还是问题(2)，在预赛的第二轮结束后，选手 C 将直接进入决赛，选手 A 和 B 需要进入预赛的第三轮比赛，其中，选手 B 进入决赛的概率大约是 $\frac{1}{2}$，选手 A 进入决赛的概率大约是 $\frac{1}{6}$。根据 Nash 均衡得到的结果，与根据名次均衡得到的结果是完全不同的，那么，究竟哪一个结果更可能发生呢？只要稍作分析就会发现，根据 Nash 均衡得到的结果不太可能真正发生，至少对问题(2)而言，在任何情况下，选手 A 选择策略 α_1 总是比策略 α_2 更有利(或者名次数更小，或者名次数相同但支付值更大)，也就是说，选手 A 不会选择策略 α_2，即 Nash 均衡结果不可能真正发生，名次均衡结果是局中人更合理的选择。

总之，对上面的问题而言，只要各局中人是理性的，名次均衡的结果比 Nash 均衡的结果更合理，更可能发生。

5. 致谢

本研究工作由重庆市科委项目资助，项目编号：CQCSTC(2011AC6104)。

参考文献 (References)

[1] J. Nash. Equilibrium points in N-person games. Proceedings of the National Academic of Sciences, USA, 1950, 36(1): 48-49.
[2] J. Nash. Noncooperative games. Annals of Mathematics, 1951, 54(2): 286-295.
[3] R. Cambeland, L. Sowden, Eds. Paradoxes of rationality and cooperation. Prisoner’s dilemma and Newcomb’s problem. Vancouver: The University of British Columbia Press, 1995: 3.
[4] R. D. Luce, H. Raiffa. Games and decisions: An introduction and critical survey. New York: Wiley Sons, 1957.
[5] 汪贤裕, 肖玉明编著. 博弈论及其应用[M]. 北京: 科学出版社, 2008: 55.