

Intuitionistic Trapezoidal Fuzzy Number Portfolio Model Based on Yager Entropy and Its Empirical Study

Kunjie Sun

College of Mathematics and Information Science, Guangxi University, Nanning Guangxi
Email: 2640279843@qq.com

Received: May 10th, 2019; accepted: May 23rd, 2019; published: May 30th, 2019

Abstract

In this paper, based on intuitionistic fuzzy numbers, the non-subordinate degree and hesitation degree are used to describe the fuzzy uncertainty of things. The uncertain yield, risk value and turnover rate of fuzzy portfolios are represented by intuitionistic trapezoidal fuzzy numbers. According to the expectation value definition of intuitionistic trapezoidal fuzzy number, the fuzzy uncertain return rate, risk value and turnover rate are defuzzified. Based on the idea of Yager entropy to spread risk, an intuitive trapezoidal fuzzy number portfolio model based on Yager entropy is established. Finally, an example is given to illustrate the validity of the model.

Keywords

Fuzzy Uncertainty, Intuitionistic Fuzzy Number, Yager Entropy, Fuzzy Portfolio

基于Yager熵的直觉梯形模糊数投资组合模型及实证

孙坤杰

广西大学, 数学与信息科学学院, 广西 南宁
Email: 2640279843@qq.com

收稿日期: 2019年5月10日; 录用日期: 2019年5月23日; 发布日期: 2019年5月30日

摘要

本文基于直觉模糊数采用非隶属度和犹豫度刻画事物的模糊不确定性,对模糊投资组合的不确定收益率、

风险值、换手率等均用直觉梯形模糊数来表示,并根据直觉梯形模糊数的期望值定义,对模糊不确定收益率、风险值、换手率进行去模糊化,利用Yager熵分散风险的思想,建立基于Yager熵的直觉梯形模糊数投资组合模型。最后,通过实例分析说明模型的有效性。

关键词

模糊不确定性, 直觉模糊数, Yager熵, 模糊投资组合

Copyright © 2019 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

模糊集概念考虑隶属度这一个参数来刻画事物的模糊不确定性。1986年, Atanassov [1]给出直觉模糊集的概念,对模糊集进行扩充与延伸,增加非隶属函数和犹豫度函数新的属性参数,更灵活的反映模糊客观实际。后来很多专家对直觉模糊环境下的决策问题进行了大量研究。Li等[2]构造线性规划模型给出了基于直觉模糊集的多准则决策问题的解决方法。Shu等[3]给出了直觉三角模糊数的定义,并将其对故障树分析进行应用。万树平和董九英[4]对直觉梯形模糊数的期望值进行了定义,专家的评价信息利用直觉梯形模糊数来表达,为多属性决策问题提供了一种新的方法。在投资组合中,分散风险也是投资者关心的一个问题。周荣喜等[5]引入Yager熵对资金分配进行约束达到分散风险的目的,考虑三角模糊数,建立基于模糊熵-Yager熵的三角模糊投资组合模型。本文基于直觉梯形模糊数的隶属、非隶属、犹豫度函数围成区域的横坐标定义的期望值,对证券的不确定收益率、风险值、换手率进行去模糊化,利用Yager熵分散风险的思想,建立基于Yager熵的直觉梯形模糊数投资组合模型,最后运用Lingo软件进行求解。

2. 直觉梯形模糊数和熵的相关知识

2.1. 直觉梯形模糊数及相关定义

定义 2.1 [6]: 设有一非空集合 X , 称 $\tilde{B} = \{ \langle x, u(x) \rangle | x \in X \}$ 为模糊集, 其中 $u(x)$ 是 \tilde{B} 的隶属函数, $u: X \rightarrow [0, 1], x \mapsto u(x)$, $u(x)$ 表示 X 中元素 x 属于 \tilde{B} 的隶属度。

定义 2.2 [1]: 设 X 是一个集合, 且 $X \neq \emptyset$, 则称 $\tilde{A} = \{ \langle x, u(x), v(x) \rangle | x \in X \}$ 为 X 上的直觉模糊集, 其中 $u(x), v(x) (0 \leq u(x) \leq 1, 0 \leq v(x) \leq 1)$ 分别为 X 中的元素 x 属于 \tilde{A} 的隶属度和非隶属度, 记 $\pi(x) = 1 - u(x) - v(x) (0 \leq \pi(x) \leq 1)$ 为 x 属于 \tilde{A} 的犹豫度或不确定度。

定义 2.3 [7]: 设 \tilde{R} 是一直觉梯形模糊数, 且 $\tilde{R} \in R$, 其隶属函数为

$$u(x) = \begin{cases} \frac{x-a}{b-a}u, & a \leq x < b \\ u, & b \leq x < c \\ \frac{d-x}{d-c}u, & c \leq x < d \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

非隶属函数为

$$v(x) = \begin{cases} \frac{b-x+v(x-a_1)}{b-a_1}, & a_1 \leq x < b \\ v, & b \leq x < c \\ \frac{x-c+v(d_1-x)}{d_1-c}, & c \leq x < d_1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

记 $\tilde{R} = \langle ([a, b, c, d]; u), ([a_1, b, c, d_1]; v) \rangle$ 为直觉梯形模糊数, 其中 $0 \leq u \leq 1, 0 \leq v \leq 1, 0 \leq u+v \leq 1, a, b, c, d, a_1, d_1 \in R$ 。

相对于梯形模糊数, 直觉梯形模糊数增加了非隶属度函数和犹豫度函数。其中, 非隶属函数表示元素 x 不属于 $[a_1, b, c, d_1]$ 的程度, 犹豫度函数表示不确定元素 x 是否属于 $[a, b, c, d]$ 的程度。当 $b = c$ 时, 直觉梯形模糊数就退化为直觉三角模糊数。一般地, 在直觉梯形模糊数 \tilde{R} 中如果有 $[a, b, c, d] = [a_1, b, c, d_1]$, 则记 $\tilde{R} = ([a, b, c, d]; u, v)$ 。以下无特殊说明均为此类直觉梯形模糊数。

2.2. 直觉梯形模糊数期望值和决策指标标准化

定义 2.4 [4]: 设直觉梯形模糊数 $\tilde{R} = ([a, b, c, d]; u, v)$ 的隶属、非隶属、犹豫度函数所包含的区域重心坐标为 $P_1(x_l, y_l), P_2(x_f, y_f), P_3(x_d, y_d)$, 则 \tilde{R} 的期望值 $E(\tilde{R})$ 为

$$E(\tilde{R}) = (x_l + x_f + x_d) / 3 \tag{1}$$

利用数学分析微积分知识二重积分[8]密度分布为 $\rho(x, y)$ 的平面薄板 D 的质心坐标是

$$\bar{x} = \frac{\iint_D x \rho(x, y) d\sigma}{\iint_D \rho(x, y) d\sigma}, \bar{y} = \frac{\iint_D y \rho(x, y) d\sigma}{\iint_D \rho(x, y) d\sigma}$$

当平面薄板 D 的密度均匀时, 即 ρ 是常数时, 则有

$$\bar{x} = \frac{1}{\Delta D} \iint_D x d\sigma, \bar{y} = \frac{1}{\Delta D} \iint_D y d\sigma$$

这里 ΔD 为平面薄板 D 的面积。

隶属函数重心横坐标:

$$\begin{aligned} x_l &= \frac{1}{\Delta D} \iint_D x d\sigma = \frac{1}{\Delta D} \int_0^u du(x) \int_{\frac{(b-a)u}{u} - u(x)+a}^{d - \frac{(d-c)u}{u} - u(x)} x dx = \frac{1}{\Delta D} \int_0^u du(x) \left[\frac{1}{2} x^2 \Big|_{\frac{(b-a)u}{u} - u(x)+a}^{d - \frac{(d-c)u}{u} - u(x)} \right] \\ &= \frac{1}{2\Delta D} \int_0^u \left(d - a - \frac{(d-c+b-a)u(x)}{u} \right) \left(d + a + \frac{(b-a-d+c)u(x)}{u} \right) du(x) \\ &= \frac{1}{2\Delta D} \left[(d^2 - a^2)u(x) \Big|_0^u + \frac{1}{2} u^2(x) \frac{(d-a)(b-a-d+c)}{u} \Big|_0^u \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2} u^2(x) \frac{(d+a)(d-c+b-a)}{u} \Big|_0^u - \frac{u^3(x)}{3u^2} (d-c+b-a)(b-a-d+c) \Big|_0^u \right] \\ &= \frac{1}{2\Delta D} \left[(d^2 - a^2)u + (dc + a^2 - d^2 - ab)u - \frac{1}{3} u (a^2 + b^2 - c^2 - d^2 + 2dc - 2ab) \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{u(c+d-b-a)} \left(\frac{1}{3}c^2 + \frac{1}{3}d^2 - \frac{1}{3}a^2 - \frac{1}{3}b^2 + \frac{1}{3}dc - \frac{1}{3}ab \right) u \\
 &= \frac{c^2 + d^2 - a^2 - b^2 + dc - ab}{3(c+d-b-a)}
 \end{aligned} \tag{2}$$

同理可以计算得出，非隶属函数重心横坐标：

$$x_f = \frac{-v(a^2 + b^2 + ab - c^2 - d^2 - dc) - 2a^2 + b^2 + ab - c^2 + 2d^2 - cd}{3v(c+d-a-b) + 3(b+d-a-c)} \tag{3}$$

犹豫度函数重心横坐标：

$$x_d = \frac{c^2 + d^2 - a^2 - b^2 + dc - ab}{3(c+d-b-a)} \tag{4}$$

指标体系中各指标有不同量纲，这就给综合评价带来很多不便，将不同量纲的指标，通过适当变换，化为无量纲的标准化指标，就是决策指标的标准化[9]。决策指标根据指标变化方向分为效益型指标(正向)和成本型指标(逆向)，效益型指标越大越优，成本型指标越小越优。对于多属性群决策问题来说，比较常见的属性类型有效益型和成本型两种类型。物理量纲不同对决策结果会有一定的影响，为了消除这一因素的影响，利用极差变换法对其进行标准化处理[9]：

对于效益型准则：

$$y_{ij} = \frac{x_{ij} - \min_{1 \leq i \leq m} x_{ij}}{\max_{1 \leq i \leq m} x_{ij} - \min_{1 \leq i \leq m} x_{ij}} \quad (1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n) \tag{5}$$

对于成本型准则：

$$y_{ij} = \frac{\max_{1 \leq i \leq m} x_{ij} - x_{ij}}{\max_{1 \leq i \leq m} x_{ij} - \min_{1 \leq i \leq m} x_{ij}} \quad (1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n) \tag{6}$$

通过对成本型指标进行标准化处理，把极小型指标变成极大型指标，越大越好。

2.3. 熵的相关概念

1995年，Yager [10]引入加权平均算子(OWA)的概念，并由OWA算子推导出熵的度量。Yager定义加权平均算子为： $F: R^n \rightarrow R$ 且加权向量为

$$W = \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \vdots \\ \omega_n \end{bmatrix}$$

其中， $0 \leq \omega_i \leq 1, \sum_{i=1}^n \omega_i = 1$ ，而

$$F(a_1, a_2, \dots, a_n) = \sum_i \omega_i b_i \tag{7}$$

其中， b_i 代表 a_i 中第 $i(i=1, 2, \dots, n)$ 大的值。

OWA算子有以下几个性质：

1) 当 $\omega_1 = 1$ 时, $F(a_1, a_2, \dots, a_n) = \max_i [a_i]$ 。

2) 当 $\omega_n = 1$ 时, $F(a_1, a_2, \dots, a_n) = \min_i [a_i]$ 。

3) 当 $a_i = a$ 时, $F(a_1, a_2, \dots, a_n) = a$ 。

这也是 OWA 算子的幂等性。

扩展 OWA 算子概念:

$$\omega_i = g_i(b_1, b_2, \dots, b_n)$$

加入 BADD-OWA 权重 $\omega_i = \frac{b_i^\alpha}{\sum_i b_i^\alpha}, \alpha \geq 1$, 将 BADD-OWA 权重代入公式(7)得

$$F(a_1, a_2, \dots, a_n) = \frac{\sum_i b_i^{\alpha+1}}{\sum_i b_i^\alpha} = \frac{\sum_i a_i^{\alpha+1}}{\sum_i a_i^\alpha}, \alpha \geq 1 \quad (8)$$

假设 a_i 是概率分布 P 的元素, 且 $a_i = P_i, \sum P_i = 1, 0 \leq P_i \leq 1$, 则

$$F_\alpha(P) = F_\alpha(P_1, P_2, \dots, P_n) = \frac{\sum_i P_i^{\alpha+1}}{\sum_i P_i^\alpha}, \alpha \geq 1 \quad (9)$$

$$\text{i) 当 } \alpha = 1 \text{ 时, } F_1(P) = \sum P_i^2 \quad (10)$$

$$\text{ii) 当 } \alpha \rightarrow \infty \text{ 时, } F_\infty(P) = \max_i [P_i] \quad (11)$$

因为 $F_\alpha(P) = \frac{\sum_i P_i^{\alpha+1}}{\sum_i P_i^\alpha} = \frac{\sum_i (P_i/P^*)^\alpha P_i}{\sum_i (P_i/P^*)^\alpha}$, 其中, $P^* = \max_i P_i, P_i < P^*, (P_i/P^*)^\alpha = 1$,

所以 $F_\alpha(P) = \frac{\sum_{i.s.t.} P_i = P^*}{\sum_{i.s.t.(1), P_i = P^*} (P_i)} (P_i) = P^* = \max_i P_i$ 。

当 $P_i = \frac{1}{n}$ 时, 代入公式(9), 得 $F_\alpha(P) = \frac{\sum_i (P_i)^{\alpha+1}}{\sum_i (P_i)^\alpha} = \frac{1}{n}$ 。

利用拉格朗日乘数法, 可以知道当 $P_i = \frac{1}{n}$ 时, $F_\alpha(P)$ 取得最小值。

由 BADD-OWA 的性质得到熵的度量公式:

$$H_\alpha(P) = 1 - F_\alpha(P) \quad (12)$$

① 当 $\alpha = 1$ 时, 代入公式(12)和(10), 得 $H_1(P) = 1 - \sum_i P_i^2$, 也即 $H_1(P) = 1 - \sum_i P_i^2 = \sum_i P_i(1 - P_i)$ 。

② 当 $\alpha = \infty$ 时, 代入公式(12)和(11), 得 $H_\infty(P) = 1 - \max_i [P_i]$, 也即 $H_\infty(P) = 1 - \max_i [P_i] = \min_i [\bar{P}_i]$ 。

考虑一个函数 $Q(P)$, 它度量概率分布 P 在 n 维空间中与向量 $[1/n]$ 的距离。在某种意义上, 这个距离可以被看作是 与概率分布相关的确定性的度量。将 $Q(P)$ 作为负熵的度量。

首先假设使用欧几里得度量熵:

$$Q(P) = D\left(P, \left[\frac{1}{n}\right]\right) = \left(\sum_i \left(p_i - \frac{1}{n}\right)^2\right)^{1/2}$$

考虑

$$R(P) = \sum_i \left(p_i - \frac{1}{n} \right)^2 = \sum_i \left(p_i^2 - \frac{2}{n} p_i + \frac{1}{n^2} \right) = \sum_i p_i^2 - \frac{2}{n} \sum_i p_i + \frac{1}{n}$$

其中 $\sum P_i = 1, P_i \geq 0$ ，所以 $R(P) = \sum_i p_i^2 - \frac{2}{n} + \frac{1}{n} = \sum_i p_i^2 - \frac{1}{n}$ 。

当 $P = [I]$ 时， $R([I]) = 1 - \frac{1}{n}$ ，构建熵的度量：

$$H(P) = R([I]) - R(P) = \left(1 - \frac{1}{n} \right) - \left(\sum_i p_i^2 - \frac{1}{n} \right) = 1 - \sum_i p_i^2.$$

更一般地，考虑 Minkowski 距离：

$$D(A, B) = \left(\sum_i (a_i - b_i)^z \right)^{1/z}, z \geq 1$$

负熵度量：

$$Q(P) = D \left(P, \left[\frac{1}{n} \right] \right) = \left(\sum_i \left| p_i - \frac{1}{n} \right|^z \right)^{1/z}$$

$$Q([I]) = \left(\left(\frac{n-1}{n} \right)^z + (n-1) \left(\frac{1}{n} \right)^z \right)^{1/z}$$

Yager 熵的定义：

$$H(P) = Q(I) - Q(P)$$

第一种情况：

当 $z = 1$ 时， $Q(P) = \sum \left| p_i - \frac{1}{n} \right|, Q(I) = 2 \frac{(n-1)}{n}$ ，所以 $H(P) = 2 \frac{(n-1)}{n} - \sum \left| p_i - \frac{1}{n} \right|$ 。

第二种情况：

当 $\alpha \rightarrow \infty$ 时， $Q(P) = \max_i \left[\left| p_i - \frac{1}{n} \right| \right] = \max_i [P_i] - \frac{1}{n}, Q(I) = 1 - \frac{1}{n}$ ， $H(P) = Q(I) - Q(P) = 1 - \max_i [P_i]$ 。

根据最大熵原理，当且仅当 $\omega_i = 1/n, i = 1, 2, \dots, n$ 时，Yager 熵取得最大。各投资组合的投资比例比较分散，没有集中在一支股票上，可以降低风险，所谓不把所有的鸡蛋放到同一个篮子里就是这个意思。

2009 年，Wu 等[11]给出了基于 Yager 熵的线性规划组合模型，对 Yager 熵的应用进一步拓宽了，其模型形式为：

$$\begin{aligned} \min & \quad \sum_{i=1}^n (e_i^+ + e_i^-) \\ \text{s.t.} & \quad \omega_i - \frac{1}{n} - e_i^+ + e_i^- = 0, e_i^+ \geq 0, e_i^- \geq 0 \\ & \quad \sum_{i=1}^n \omega_i = 1, i = 1, 2, \dots, n, \omega_i \in [0, 1] \end{aligned} \tag{13}$$

其中 e_i^+ 和 e_i^- 分别为 $1/n$ 的正负偏差变量，目标函数是使正负偏差变量和最小，正负偏差变量和的大小代表着对资金分配分散程度大小的约束。

3. 基于 Yager 熵的直觉梯形模糊数投资组合模型

证券的收益、风险、换手率往往都是一个不确定的随时变化的量都是模糊变量，考虑用直觉梯形模糊数刻画证券的收益、风险、换手率，将收益、风险、换手率作为评价指标，这其实是一个求收益、风险、换手率 3 个准则下最优投资组合的多属性决策问题。

考虑 Yager 熵约束投资比例，使得资金投资比较分散，降低集中投资在一支股票上的风险，综合考虑直觉梯形模糊数和 Yager 熵，将两者结合起来，建立基于 Yager 熵的直觉梯形模糊数投资组合模型。

假设投资者计划将资产分配在 n 个风险资产之间，其投资资产的投资比例为

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_n),$$

其中 $\sum_{i=1}^n x_i = 1, x_i$ 表示投资资产 $i (i = 1, 2, \dots, n)$ 的投资分配比例。对于直觉梯形模糊数多属性决策问题，此时有 3 个决策准则证券的收益率 f_1 、证券的风险值 f_2 、证券的流动性 f_3 ，将这 3 个决策准则作为评价指标，各指标均用直觉梯形模糊数表示，有 n 个备选方案。其中， $W = (\omega_1, \omega_2, \omega_3), \sum_{j=1}^3 \omega_j = 1$ 是指标权重向量， $\tilde{R} = (\tilde{R}_{ij})_{n \times 3}$ 是方案集 N 在证券的收益率、风险值、流动性 3 个决策下的直觉梯形模糊评价矩阵。投资组合方案 n 在 3 个评价指标下的属性值为 $\tilde{R}_{ij} = ([m_{ij}^1, m_{ij}^2, m_{ij}^3, m_{ij}^4]; u_j, v_j) (i = 1, 2, \dots, n; j = 1, 2, 3)$ ，且 $m_{ij}^1 \leq m_{ij}^2 \leq m_{ij}^3 \leq m_{ij}^4, 0 \leq u_j \leq 1, 0 \leq v_j \leq 1, 0 \leq u_j + v_j \leq 1$ 。

根据极差变换法效益型准则、成本型准则公式对 \tilde{R} 进行标准化处理，其中将收益率 \tilde{R}_{i1} 和流动性 \tilde{R}_{i2} 代入效益型准则公式(5)进行标准化，而对风险 \tilde{R}_{i3} 代入成本型准则公式(6)式进行标准化。

$$\begin{aligned} \tilde{R}'_{i1} &= \left(\left[\frac{m_{i1}^1 - \min m_{i1}^1}{\max m_{i1}^4 - \min m_{i1}^1}, \frac{m_{i1}^2 - \min m_{i1}^1}{\max m_{i1}^4 - \min m_{i1}^1}, \frac{m_{i1}^3 - \min m_{i1}^1}{\max m_{i1}^4 - \min m_{i1}^1}, \frac{m_{i1}^4 - \min m_{i1}^1}{\max m_{i1}^4 - \min m_{i1}^1} \right]; u_1, v_1 \right) \\ \tilde{R}'_{i2} &= \left(\left[\frac{\max m_{i2}^4 - m_{i2}^4}{\max m_{i2}^4 - \min m_{i2}^1}, \frac{\max m_{i2}^4 - m_{i2}^3}{\max m_{i2}^4 - \min m_{i2}^1}, \frac{\max m_{i2}^4 - m_{i2}^2}{\max m_{i2}^4 - \min m_{i2}^1}, \frac{\max m_{i2}^4 - m_{i2}^1}{\max m_{i2}^4 - \min m_{i2}^1} \right]; u_2, v_2 \right) \\ \tilde{R}'_{i3} &= \left(\left[\frac{m_{i3}^1 - \min m_{i3}^1}{\max m_{i3}^4 - \min m_{i3}^1}, \frac{m_{i3}^2 - \min m_{i3}^1}{\max m_{i3}^4 - \min m_{i3}^1}, \frac{m_{i3}^3 - \min m_{i3}^1}{\max m_{i3}^4 - \min m_{i3}^1}, \frac{m_{i3}^4 - \min m_{i3}^1}{\max m_{i3}^4 - \min m_{i3}^1} \right]; u_3, v_3 \right) \end{aligned}$$

标准化后的矩阵为 $\tilde{R}' = (\tilde{R}'_{i1}, \tilde{R}'_{i2}, \tilde{R}'_{i3})$ ，其中 $\tilde{R}'_{ij} = ([m_{ij}^1, m_{ij}^2, m_{ij}^3, m_{ij}^4]; u_j, v_j)$ 。

根据重心横坐标公式(2)、(3)、(4)计算 $\tilde{R}'_{ij} (i = 1, 2, \dots, n; j = 1, 2, 3)$ 的隶属函数、非隶属函数、犹豫度函数对应的重心横坐标，然后利用期望值公式(1)计算直觉梯形模糊数 $\tilde{R}'_{ij} (i = 1, 2, \dots, n; j = 1, 2, 3)$ 的期望值 $E(\tilde{R}'_{ij})$ 。

为了防止资金全部投在一支股票上或者资金过分集中在一种资产上，为了降低风险，合理的对资金进行分配，引入熵约束，利用 Yager 熵分散风险的思想，可以允许有一定的分散不能过于集中在某一两支股票上，可以允许有一定的偏差，投资比例不是简单的平均，不是简单的 $x_n = 1/n$ 。经过标准化的风险值评价指标为极大型指标(越大越好)，兼顾收益和风险综合考虑这两个方面，假设投资者可以接受的投资比例上限为 u_0 ，投资者主观意愿上对收益的满意程度权重为 α ，对风险的接受满意程度权重为 $1-\alpha$ ，综合考虑以收益尽可能大和风险尽可能小为目标函数，建立如下基于 Yager 熵的直觉梯形模糊数投资组合模型：

$$\begin{aligned}
 \max \quad & \alpha \sum_{i=1}^n E(\tilde{R}'_{i1})x_i + (1-\alpha) \sum_{i=1}^n E(\tilde{R}'_{i2})x_i \\
 \text{s.t.} \quad & \sum_{i=1}^n x_i = 1 \\
 & 0 \leq x_i \leq u_0, i = 1, 2, \dots, n \\
 & x_i - \frac{1}{n} - e_i^+ + e_i^- = 0 \\
 & 0 < \sum_{i=1}^n (e_i^+ + e_i^-) \leq \theta \\
 & e_i^+ \geq 0, e_i^- \geq 0
 \end{aligned} \tag{14}$$

其中 x_i 表示在资产 i 上的投资比例，目标函数中 $E(\tilde{R}'_{i1})$ 表示经过标准化处理的收益期望值， $E(\tilde{R}'_{i2})$ 表示经过标准化处理的风险期望值， e_i^+, e_i^- 表示 $1/n$ 的正负偏差变量， θ 表示正负偏差总和上限，投资者可以根据自己分散投资的要求和承受能力不断调节 θ 值，达到分散投资风险的目的。最后，可以运用优化软件求解该模型。

4. 实证分析

选取沪深 A 股三个不同行业中具有代表性的股票：中国平安(601318)、贵州茅台(600519)和格力电器(000651)，这三支股票分别记为股票 g_1 、股票 g_2 和股票 g_3 ，其对应的投资比例为 x_1, x_2, x_3 ，股票收益率、风险值、流动性(用换手率刻画)分别记作 f_1, f_2, f_3 ，用 f_1, f_2, f_3 作为评价指标，其中包括基于成本的评价指标 f_2 和基于效益的评价指标 f_1, f_3 。从同花顺软件上下载这 3 支股票近两年来(2017 年 1 月~2019 年 3 月)的历史周交易数据，用直觉梯形模糊数表达收益、风险和换手率，用客观模糊频数统计法[12]得到股票周收益率直方图，各股票周收益率、风险、换手率频数分布直方图分别如下：(图 1~9)

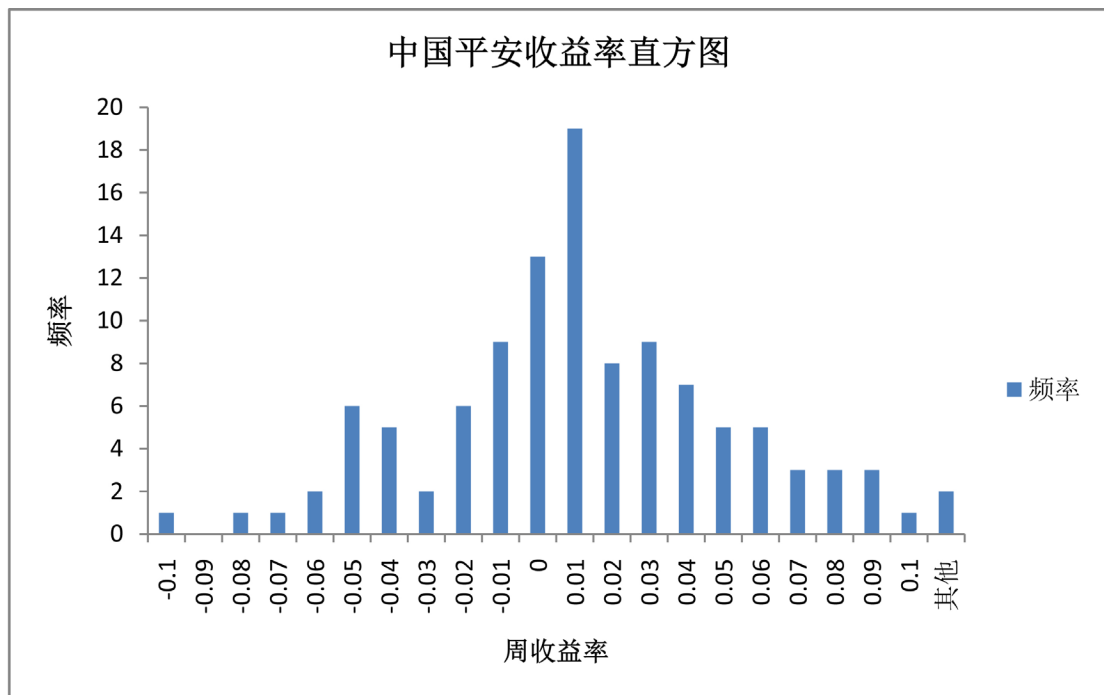


Figure 1. Frequency distribution map of China Pingan's weekly profit
图 1. 中国平安的周收益率频数分布图

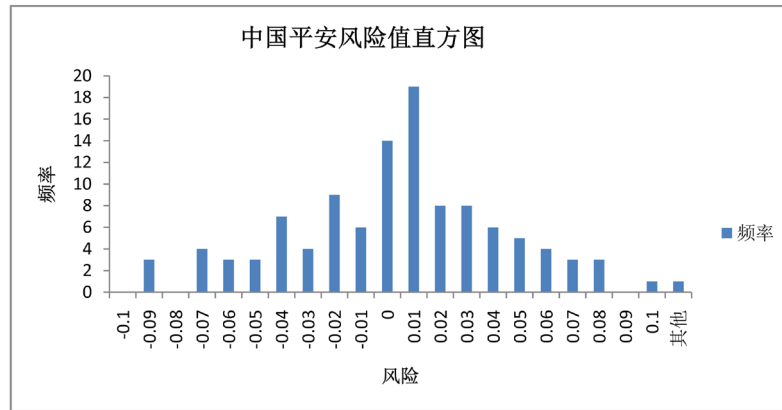


Figure 2. Frequency distribution map of China Pingan's risk
图 2. 中国平安的风险频数分布图

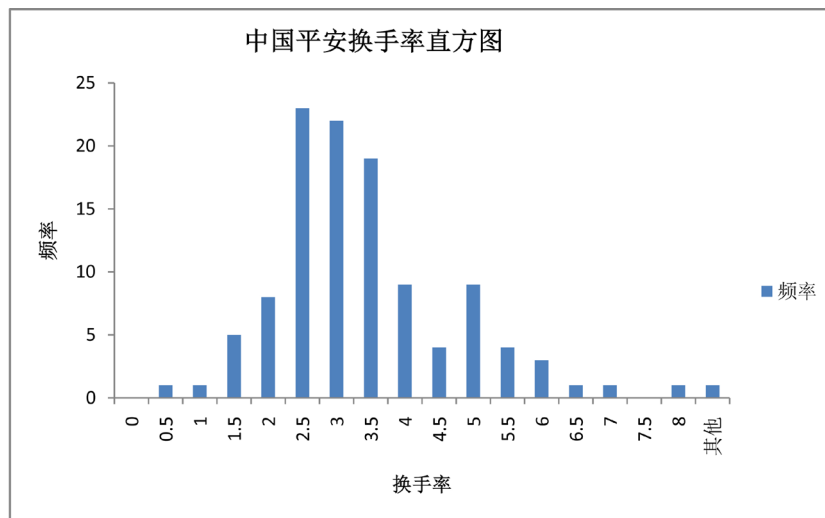


Figure 3. Frequency distribution map of China Pingan's turnover rate
图 3. 中国平安的换手率频数分布图

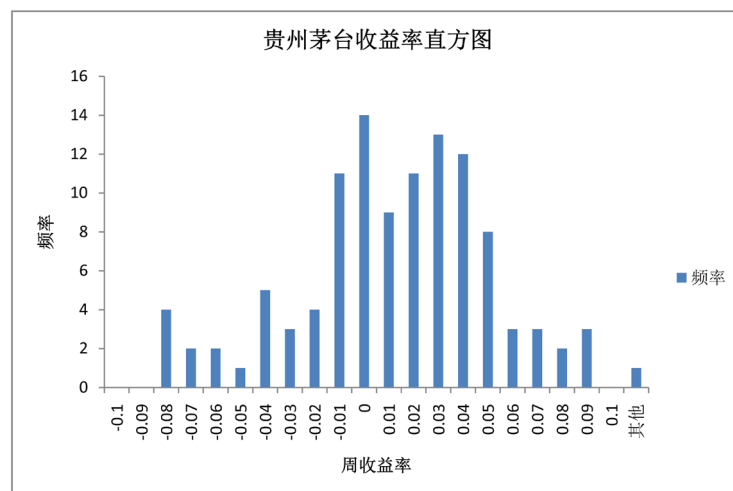


Figure 4. Frequency distribution map of Guizhou Maotai's weekly profit
图 4. 贵州茅台的周收益率频数分布图

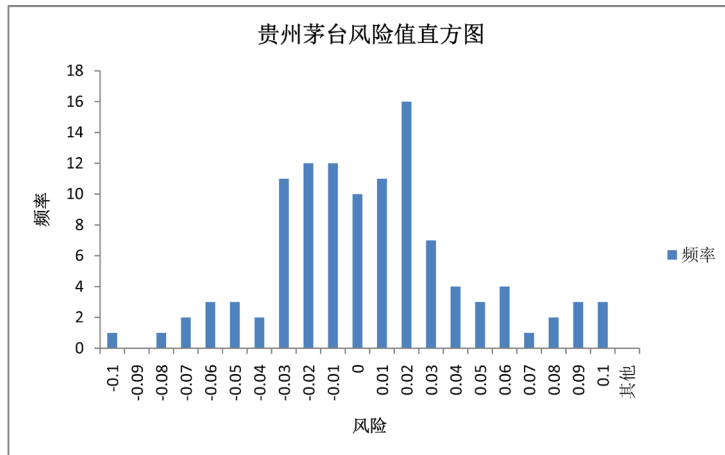


Figure 5. Frequency distribution map of Guizhou Maotai's risk
图 5. 贵州茅台的风险频数分布图

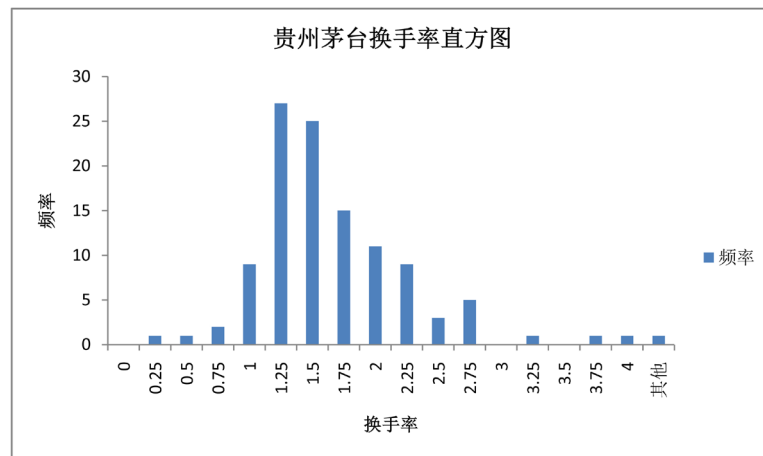


Figure 6. Frequency distribution map of Guizhou Maotai's turnover rate
图 6. 贵州茅台的换手率频数分布图

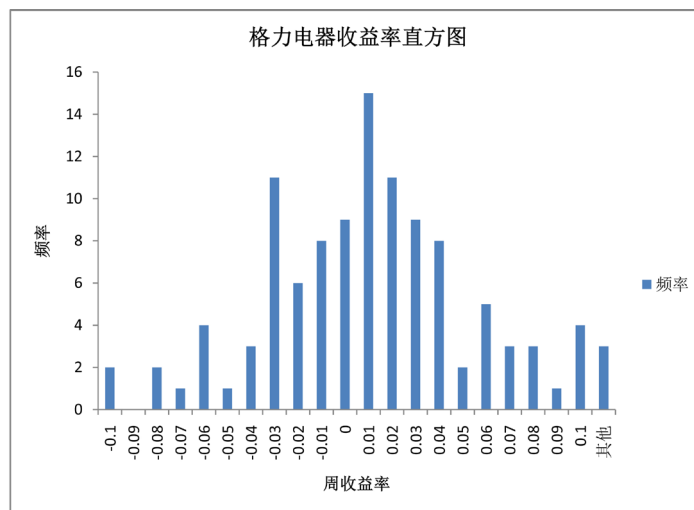


Figure 7. Frequency distribution map of Gree electric appliances' weekly profit
图 7. 格力电器的周收益率频数分布图

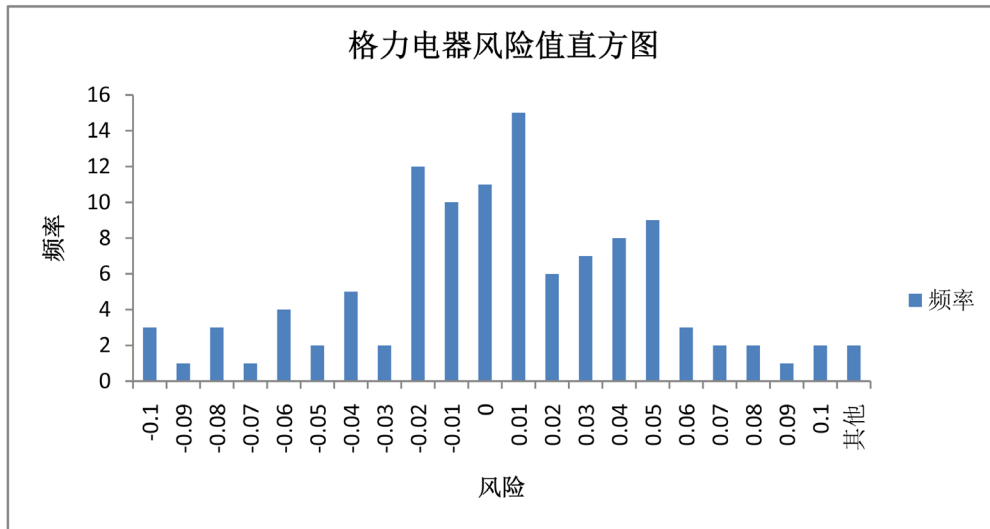


Figure 8. Frequency distribution map of Gree electric appliances' risk
图 8. 格力电器的风险频数分布图

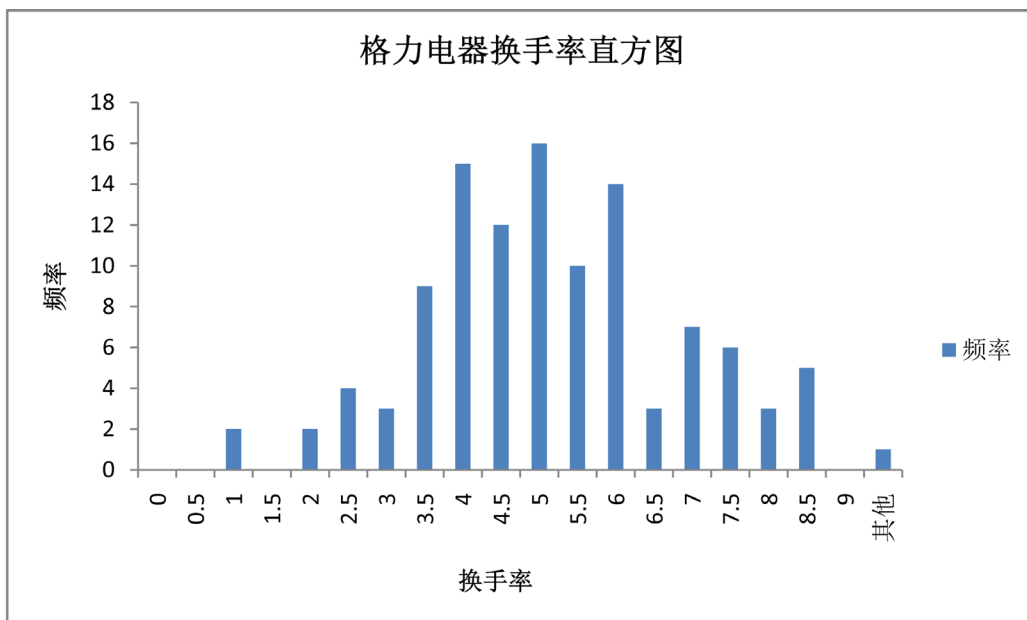


Figure 9. Frequency distribution map of Gree electric appliances' turnover rate
图 9. 格力电器的换手率频数分布图

根据客观模糊频数统计法[12]近似估计出中国平安的直觉梯形模糊数收益为 $([-0.07, 0, 0.03, 0.1]; 0.9, 0.05)$ ，风险为 $([-0.07, -0.02, 0.03, 0.08]; 0.9, 0.05)$ ，换手率为 $([0.005, 0.025, 0.035, 0.065]; 0.9, 0.05)$ ，同样方法可以得到贵州茅台和格力电器的模糊收益、模糊风险、模糊换手率水平，得出直觉梯形模糊矩阵 \tilde{R} ，如下表 1。

第一步：用公式对矩阵 \tilde{R} 进行规范化，规范化后的矩阵为 \tilde{R}' ，规范化后得表 2。

第二步：利用直觉梯形模糊数的重心横坐标公式(2)、(3)、(4)计算直觉梯形模糊数 \tilde{R}'_{ij} 隶属、非隶属、犹豫度函数所包含的区域重心横坐标，如表 3。

第三步：利用直觉梯形模糊数期望值定义(1)计算 \tilde{R}'_{ij} 的期望值，如表 4。

Table 1. Evaluation value information of intuitionistic trapezoidal fuzzy numbers of stocks
表 1. 各股票的直觉梯形模糊数的评价值信息

股票指标	f_1	f_2	f_3
g_1	$([-0.07, 0, 0.03, 0.1]; 0.9, 0.05)$	$([-0.07, -0.02, 0.03, 0.08]; 0.9, 0.05)$	$([0.005, 0.025, 0.035, 0.065]; 0.9, 0.05)$
g_2	$([-0.08, -0.01, 0.04, 0.09]; 0.9, 0.05)$	$([-0.08, -0.03, 0.02, 0.1]; 0.8, 0.1)$	$([0.0025, 0.0125, 0.015, 0.0275]; 0.95, 0)$
g_3	$([-0.08, -0.03, 0.03, 0.1]; 0.9, 0.05)$	$([-0.08, -0.02, 0.05, 0.1]; 0.8, 0.1)$	$([0.02, 0.04, 0.06, 0.085]; 0.7, 0.2)$

Table 2. Evaluation value information of normalized intuitionistic ladder fuzzy numbers
表 2. 规范化后的直觉梯形模糊数的评价值信息

股票指标	f_1	f_2	f_3
g_1	$([\frac{1}{18}, \frac{8}{18}, \frac{11}{18}, 1]; 0.9, 0.05)$	$([\frac{2}{18}, \frac{7}{18}, \frac{12}{18}, \frac{17}{18}]; 0.9, 0.05)$	$([\frac{25}{825}, \frac{225}{825}, \frac{325}{825}, \frac{625}{825}]; 0.9, 0.05)$
g_2	$([0, \frac{7}{18}, \frac{12}{18}, \frac{17}{18}]; 0.9, 0.05)$	$([0, \frac{8}{18}, \frac{13}{18}, 1]; 0.8, 0.1)$	$([0, \frac{100}{825}, \frac{125}{825}, \frac{250}{825}]; 0.95, 0)$
g_3	$([0, \frac{5}{18}, \frac{11}{18}, 1]; 0.9, 0.05)$	$([0, \frac{5}{18}, \frac{12}{18}, 1]; 0.8, 0.1)$	$([\frac{175}{825}, \frac{375}{825}, \frac{575}{825}, 1]; 0.7, 0.2)$

Table 3. Gravity abscissa of membership, non-membership and hesitation functions of intuitionistic trapezoidal fuzzy numbers
表 3. 直觉梯形模糊数隶属、非隶属、犹豫度函数重心横坐标

股票 \ (x_f, x_g) 横坐标	$f_1(x_f, x_g)$	$f_2(x_f, x_g)$	$f_3(x_f, x_g)$
g_1	$(\frac{19}{36}, \frac{19}{36}, \frac{19}{36})$	$(\frac{19}{36}, \frac{19}{36}, \frac{19}{36})$	$(\frac{257}{693}, \frac{407}{963}, \frac{257}{693})$
g_2	$(\frac{49}{99}, \frac{514}{1179}, \frac{49}{99})$	$(\frac{221}{414}, \frac{139}{306}, \frac{221}{414})$	$(\frac{53}{363}, \frac{47}{297}, \frac{53}{363})$
g_3	$(\frac{103}{216}, \frac{1283}{2376}, \frac{103}{216})$	$(\frac{677}{1350}, \frac{421}{810}, \frac{677}{1350})$	$(\frac{111}{187}, \frac{634}{1023}, \frac{111}{187})$

Table 4. Intuitionistic trapezoidal fuzzy number expectation
表 4. 直觉梯形模糊数期望值

股票指标	f_1	f_2	f_3
g_1	0.5278	0.5278	0.3881
g_2	0.4753	0.5073	0.1501
g_3	0.4979	0.5076	0.6023

假设 $\alpha = 0.6$ ，且投资比例上限 $u_0 = 0.65$ 根据模型(14)，将数据代入得到

$$\begin{aligned} \max \quad & 0.6 \times (0.5278x_1 + 0.4753x_2 + 0.4979x_3) + 0.4 \times (0.5278x_1 + 0.5073x_2 + 0.5076x_3) \\ \text{s.t.} \quad & \sum_{i=1}^3 x_i = 1 \\ & 0 \leq x_1 \leq 0.65 \\ & 0 \leq x_2 \leq 0.65 \\ & 0 \leq x_3 \leq 0.65 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
x_1 - \frac{1}{3} - e_1^+ + e_1^- &= 0 \\
x_2 - \frac{1}{3} - e_2^+ + e_2^- &= 0 \\
x_3 - \frac{1}{3} - e_3^+ + e_3^- &= 0 \\
0 < \sum_{i=1}^3 (e_i^+ + e_i^-) &\leq \theta \\
e_1^+ \geq 0, e_2^+ \geq 0, e_3^+ \geq 0 \\
e_1^- \geq 0, e_2^- \geq 0, e_3^- \geq 0
\end{aligned}$$

运用 Lingo 软件可求解该模型。当 θ 取不同值时，得到结果对比如下表 5：

Table 5. Investment proportion under different θ value

表 5. 不同 θ 值下的投资比例

θ	x_1	x_2	x_3
0.2	0.43	0.24	0.33
0.3	0.48	0.19	0.33
0.4	0.53	0.14	0.33
0.5	0.58	0.09	0.33
0.6	0.63	0.04	0.33

结果分析：由表 5 可以看出，最优投资组合分散投资在各支股票上。当 θ 值从 0.2 取到 0.6 时，投资者在股票 2 贵州茅台上的投资比例越来越低，在股票 1 股票 3 上的投资比例越来越高，越来越集中投资在股票 1 股票 3 上。当 θ 值越来越小时，即熵约束越来越强，投资股票资金比例有一定程度的分散，避免了资金分配过于集中，这就大大减少了由于资金过于集中在一支股票上带来风险的可能性。因此，投资者可以通过调节 θ 值的大小(熵约束性的强弱)，合理的调整自己的资金投资方案。

同样假设 $\alpha = 0.6$ ，且投资比例上限 $u_0 = 0.65$ ，此时没有加入熵约束条件，模型为：

$$\begin{aligned}
\max \quad & \alpha \sum_{i=1}^n E(\tilde{R}'_{i1})x_i + (1-\alpha) \sum_{i=1}^n E(\tilde{R}'_{i2})x_i \\
\text{s.t.} \quad & \sum_{i=1}^n x_i = 1 \\
& 0 \leq x_i \leq u_0, i=1, 2, \dots, n
\end{aligned} \tag{15}$$

将数据代入模型(15)得到

$$\begin{aligned}
\max \quad & 0.6 \times (0.5278x_1 + 0.4753x_2 + 0.4979x_3) + 0.4 \times (0.5278x_1 + 0.5073x_2 + 0.5076x_3) \\
\text{s.t.} \quad & \sum_{i=1}^3 x_i = 1 \\
& 0 \leq x_1 \leq 0.65, 0 \leq x_2 \leq 0.65, 0 \leq x_3 \leq 0.65
\end{aligned}$$

求解该模型，得到三支股票的投资比例分别为 0.65, 0, 0.35，此时投资在中国平安、格力电器两支股票上，对比加入熵约束条件模型(14)，都投资在中国平安、贵州茅台、格力电器三支股票上，且投资比例更加分散，避免了资金过于集中。对比可知，本文提出的模型更符合投资者投资的心理，降低了投资组

合的风险。

5. 结语

本文利用直觉梯形模糊数表示证券的收益、风险、换手率,采用隶属函数、非隶属函数、犹豫度函数重心横坐标的期望值表达收益,加入 Yager 熵约束条件,使得投资比例更加分散,给出基于 Yager 熵的直觉梯形模糊数组合投资模型。

直觉梯形模糊数比模糊数增加考虑了非隶属函数、犹豫度函数,可以更加准确的描述客观世界的本质,对客观现实更好的刻画。

基金项目

广西研究生教育创新计划项目资助(JGY2015007)。

参考文献

- [1] Atanassov, K.T. (1986) Intuitionistic Fuzzy Sets. *Fuzzy Sets & Systems*, **20**, 87-96. [https://doi.org/10.1016/S0165-0114\(86\)80034-3](https://doi.org/10.1016/S0165-0114(86)80034-3)
- [2] Li, D.F. (2005) Multiattribute Decision Making Models and Methods Using Intuitionistic Fuzzy Sets. *Journal of Computer and System Sciences*, **70**, 73-85. <https://doi.org/10.1016/j.jcss.2004.06.002>
- [3] Shu, M.H., Cheng, C.H. and Chang, J.R. (2006) Using Intuitionistic Fuzzy Sets for Fault-Tree Analysis on Printed Circuit Board Assembly. *Microelectronics Reliability*, **46**, 2139-2148. <https://doi.org/10.1016/j.microrel.2006.01.007>
- [4] 万树平, 董九英. 多属性群决策的直觉梯形模糊数法[J]. 控制与决策, 2010, 25(5): 773-776.
- [5] 周荣喜, 王迪, 展宇, 等. 基于模糊熵和 Yager 熵的投资组合优化模型[J]. 北京化工大学学报(自然科学版), 2015, 42(5): 124-128.
- [6] 胡宝清. 模糊理论基础[M]. 武汉: 武汉大学出版社, 2010.
- [7] 王坚强, 张忠. 基于直觉模糊数的信息不完全的多准则规划方法[J]. 控制与决策, 2008, 23(10): 1145-1148.
- [8] 华东师范大学数学系. 数学分析下册[M]. 北京: 高等教育出版社, 2010.
- [9] 赵新泉, 李政兴, 刘勤. 管理决策分析[M]. 北京: 科学出版社, 2014.
- [10] Yager, R.R. (1995) Measures of Entropy and Fuzziness Related to Aggregation Operators. *Information Sciences*, **82**, 147-166. [https://doi.org/10.1016/0020-0255\(94\)00030-F](https://doi.org/10.1016/0020-0255(94)00030-F)
- [11] Wu, J., Sun, B.L., Liang, C.Y., et al. (2009) A Linear Programming Model for Determining Ordered Weighted Averaging Operator Weights with Maximum Yager's Entropy. *Computers & Industrial Engineering*, **57**, 742-747. <https://doi.org/10.1016/j.cie.2009.02.001>
- [12] 房勇, 汪寿阳. 模糊投资组合优化: 理论与方法[M]. 北京: 高等教育出版社, 2005.

知网检索的两种方式:

1. 打开知网页面 <http://kns.cnki.net/kns/brief/result.aspx?dbPrefix=WWJD>
下拉列表框选择: [ISSN], 输入期刊 ISSN: 2163-1476, 即可查询
2. 打开知网首页 <http://cnki.net/>
左侧“国际文献总库”进入, 输入文章标题, 即可查询

投稿请点击: <http://www.hanspub.org/Submission.aspx>

期刊邮箱: orf@hanspub.org