Pure Mathematics 理论数学, 2013, 3, 234-239
http://dx.doi.org/10.12677/pm.2013.33035 Published Online May 2013 (http://www.hanspub.org/journal/pm.html)

Superconvergence Analysis for a Class of Sine-Gordon Equations with Strong Damping on Anisotropic Meshes*

Baomin Qiao

College of Mathematics and Information Science, Shangqiu Normal Univerity, Shangqiu
Email: bmqiao@126.com

Received: Mar. 1st, 2013; revised: Mar. 17th, 2013; accepted: Apr. 5th, 2013

Abstract: The aim of this paper is to study the convergence analysis for a class of Sine-Gordon equations with strong damping by parabolic element under anisotropic meshes. Result of superclose about the nerve transmission signal can be acquired by virtue of the property that the interpolated operator is accordance with the Ritz projection. Finally, the corresponding global superconvergence is got by taking the advantage of the technique of the post-processing operator.

Keywords: Anisotropic Meshes; Sine-Gordon Equations; Strong Damping; Parabolic Element; Error Estimate; Superconvergence

一类具有强阻尼 Sine-Gordon 方程异性网格上的超收敛分析*

乔保民

商丘师范学院数学与信息科学学院，商丘
Email: bmqiao@126.com

收稿日期：2013 年 3 月 1 日；修回日期：2013 年 3 月 17 日；录用日期：2013 年 4 月 5 日

摘　要：在异性网格下，利用双二次有限元逼近对一类具有强阻尼 Sine-Gordon 方程半离散格式进行了收敛性分析。同时，利用插值算子与 Ritz 投影相一致的性质给出了超逼近性质。最后，通过使用插值后处理技巧得到了它的整体超收敛结果。

关键词：各向异性网格；Sine-Gordon 方程；强阻尼；双二次元；误差估计；超收敛

1. 引言

具有强阻尼 Sine-Gordon 方程是物理学中很有用的数学模型，这类方程具有深刻的实际背景，它在超导体中领域中有着广泛的应用[1]，由于其具有很强的应用价值，因此是近年来很多学者研究的热点方程之一[1-5]。

文[1]利用代数分析法给出方程精确解的存在性与唯一性；文[2,3]研究了解的性态问题，证明了方程整体吸引子的存在性，并给出了吸引子的维数估计；文[4]求出了方程的整体解并进行了数值计算；文[5]用差分方法对此方程进行了数值模拟。然而，利用有限方法对此类方程做收敛性分析目前很少见到此方面的结果。

文[6,7]等分别研究了线性有限元和双二次元的超收敛现象，但是上述结果都是基于对网格的经典假设基础上，也就是对剖分的正则性假设或一致性假设，即

*资助项目：河南省自然科学基金资助项目(No:122300410199)。

$$h_K/\rho_K \le C \text{ 或 } h/\hat{h} \le C\text{，}\quad \forall K \in J_h\text{，}$$

其中 J_h 是 Ω 的一个凸剖分簇，$h=\max\limits_{K\in J_h} h_K$，$\hat{h}=\min\limits_{K\in J_h} h_K$，而 h_K、ρ_K 分别是一般单元 K 的最大直径和最大内切圆直径，这里及以后出现的 C 均表示一个常数且与 h 无关，不同的地方可以取不同的值。但是，随着有限元方法在诸多领域及越来越复杂问题中的应用，上述假设成为了一个很大的缺陷。为了解决这些问题，一些学者近年来开始在各向异性网格上进行了一些研究并得到很多好的结果[8-15]。

本文在各向异性网格条件下，考虑下面具有强阻尼广义 Sine-Gordon 方程

$$\begin{cases} u_{tt}+\alpha(x)u_t-\gamma\Delta u+\beta(x)\sin u = f(x,t),(x,t)\in\Omega\times(0,T], \\ u(x,t)=0,(x,t)\in\partial\Omega\times(0,T], \\ u(x,0)=\varphi(x), x\in\Omega, \\ u_t(x,0)=\phi(x), x\in\Omega. \end{cases} \tag{1}$$

其中 Ω 为 R^2 上的一个有界闭区域，$\partial\Omega$ 为其光滑边界。

本文首先给出了双二次有限元空间的单元构造，并构造出该有限元空间上的插值算子，同时给出了插值算子的性质。第三和第四部分，利用双二次有限元逼近对问题(1)在半离散格式进行了收敛性分析，同时，利用插值算子与 Ritz 投影相一致的性质给出了超逼近性质。最后，通过使用插值后处理技巧得到了它的整体超收敛结果。

2. 单元构造

为简单起见，不妨假设 Ω 是 R^2 上的一个有界凸多边形区域，其边界分别平行于坐标轴 x-轴 y-轴。J_h 为 Ω 的一个矩形单元剖分族，对任意的 $K\in J_h$，单元 K 的中心设为 (x_K, y_K)，沿 x-轴方向和 y-轴方向的两条边的边长分别记为 $2h_x$ 和 $2h_y$，单元 K 四个顶点分别为 $Z_1(x_K-h_x, y_K-h_y)$，$Z_2(x_K+h_x, y_K-h_y)$，$Z_3(x_K+h_x, y_K+h_y)$，$Z_4(x_K-h_x, y_K+h_y)$，单元 K 的四个边分别为 $l_i=\overline{Z_iZ_{i+1}}(\bmod 4), i=1,2,3,4$。记 $h=\max\limits_{K\in J_h}\{h_x,h_y\}$，但该剖分不要求满足正则性或拟一致假设。

在 K 上定义有限元 (K,P_K,Σ_K) 如下：

$$\Sigma_K=\{v_i, i=1,2,\cdots,9\}\text{，}\quad P_K=span\{1,x,y,x^2,y^2,xy,x^2y,y^2x,x^2y^2\}\text{，}$$

其中

$$v_i=v(a_i)\text{，}\quad v_{i+4}=\frac{1}{|l_i|}\int_{l_i} v\mathrm{d}s\text{，}\quad i=1,2,3,4,\text{，}\quad v_9=\frac{1}{|K|}\int_K v\mathrm{d}x\mathrm{d}y\text{。}$$

有限元空间定义为

$$V^h=\{v^h; v^h|_K\in P_K, \forall K\in J_h, v^h|_{\partial\Omega}=0\}\text{。}$$

插值算子 $I_h: H^2(\Omega)\to V^h$ 定义如下：

$$I_h|_K=I_K\text{，}\quad I_K:\begin{cases} I_Kv(Z_i)=v(Z_i), i=1,2,3,4, \\ \int_{l_i}(I_Kv-v)\mathrm{d}s=0, i=1,2,3,4, \\ \int_K(I_Kv-v)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0. \end{cases} \tag{2}$$

关于此插值算子 I_h，在各向异性网格下还具有下列性质：

引理 1[8]　$\forall u\in H_0^1(\Omega)\cap H^3(\Omega)$，则有

$$\|u-I_hu\|_0+h\|u-I_hu\|_1\le Ch^3|u|_3\text{。} \tag{3}$$

更进一步，如果 $u\in H^6(\Omega)$，则 $\forall v\in V^h$，有

$$\left(\nabla\left(u-I_h u\right),\nabla v\right)\le Ch^4\|u\|_4\|v\|_0\text{。}\tag{4}$$

3. 方程的有限元逼近

假定问题(1)中的 $0<\alpha_1\le\alpha(x)\le\alpha_2$，$0<\beta_1\le\beta(x)\le\beta_2$，$0<\gamma_1\le\gamma(x)\le\gamma_2$，则问题(1)的等价变分形式可写为：

对任意的 $t\ge0$，求 $u(t)\in H_0^1(\Omega)$，使得 $\forall v\in H_0^1(\Omega)$

$$\begin{cases}\left(u_{tt},v\right)+\left(\alpha(x)u_t,v\right)+\left(\gamma(x)\nabla u,\nabla v\right)+\left(\beta(x)\sin u,v\right)=\left(f(x,t),v\right),\\ u_t(0)=\phi(x),\\ u(0)=\varphi(x),\end{cases}\tag{5}$$

其中

$$(u,v)=\int_\Omega uv\mathrm{d}x\mathrm{d}y\text{，}\quad u_t(0)=u_t(x,0)\text{，}\quad u(0)=u(x,0)\text{。}$$

于是(5)式有限元半离散格式为：求 $u^h\in V^h$，使得 $\forall v\in V^h$

$$\begin{cases}\left(u_{tt}^h,v\right)+\left(\alpha(x)u_t^h,v\right)+\left(\gamma(x)\nabla u^h,\nabla v\right)+\left(\beta(x)\sin u^h,v\right)=\left(f(x,t),v\right),\\ u_t^h(0)=\phi(x),\\ u^h(0)=\varphi(x).\end{cases}\tag{6}$$

引理 2 上述问题(6)的解是存在唯一的。

证：设 $\{v_i\}$ 是 V^h 的一组基，令

$$u^h(x,t)=\sum_{l=1}^N\xi_l(t)v_l\text{，}$$

则(6)式变为

$$\begin{cases}G\xi''+B\xi'+E\xi=F(\xi),\\ \xi_j'(0)=a_j,\\ \xi_j(0)=b_j,\end{cases}\tag{7}$$

其中：

$$\boldsymbol{G}=\left\{G_{i,j}\right\}_{n\times n},G_{i,j}=\left(v_i,v_j\right)\text{，}\quad B=\left\{B_{i,j}\right\}_{n\times n},B_{i,j}=\left(\alpha(x)v_i,v_j\right)\text{，}$$

$$E=\left\{E_{i,j}\right\}_{n\times n},E_{i,j}=\left(\gamma(x)\nabla v_i,\nabla v_j\right)\text{，}$$

$$F(\xi)=\left\{F_j(\xi)\right\}_{n\times1},F_j(\xi)=-\left(\beta(x)\sin\left(\sum_{l=1}^N\xi_l(t)v_l\right),v_j\right)+\left(f(x,t),v_j\right)\text{，}$$

a_j,b_j 由 $u_t^h(0),u^h(0)$ 确定。

因为 $\boldsymbol{G}$ 是对称正定矩阵，由常微分方程的 Carathëodory 定理知，当 $t>0$ 时，方程组存在唯一解。□

4. 方程收敛性分析

下面我们给出第一个主要结果收敛性分析：

定理 1 设 u 是问题(5)的解，且 $u\in H_0^1(\Omega)\cap H^3(\Omega)$，$u^h\in V^h$ 是问题(6)的有限元解，则

$$\left\|u-u^h\right\|_1 \le Ch^2\left[\left|u\right|_3+\int_0^t\left(\left|u_{tt}\right|_3^2+\left|u_t\right|_3^2\right)^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}t\right]; \tag{8}$$

$$\left\|u_t-u_t^h\right\|_0 \le Ch^2\left[\left|u_t\right|_3+\left|u\right|_3+\int_0^t\left(\left|u_{tt}\right|_3^2+\left|u_t\right|_3^2\right)^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}t\right]。 \tag{9}$$

证：$\forall v\in V^h$，由方程(5)和(6)得误差方程

$$\left(u_{tt}^h-u_{tt},v\right)+\left(\alpha(x)\left(u_t^h-u_t\right),v\right)+\left(\gamma(x)\nabla\left(u^h-u\right),\nabla v\right)=\left(\beta(x)\left(\sin u-\sin u^h\right),v\right)。 \tag{10}$$

令 $w=u-I_hu$，$\theta=u^h-I_hu$，那么误差方程(10)变为

$$\begin{aligned}&\left(\theta_{tt},v\right)+\left(\alpha(x)\theta_t,v\right)+\left(\gamma(x)\nabla\theta,\nabla v\right)\\&=\left(w_{tt},v\right)+\left(\alpha(x)w_t,v\right)+\left(\gamma(x)\nabla w,\nabla v\right)+\left(\beta(x)\left(\sin u-\sin u^h\right),v\right)。\end{aligned} \tag{11}$$

取 $v=\theta_t$，则方程(11)变为

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\left\|\theta_t\right\|_0^2+C\left\|\theta\right\|_1^2\right)+C'\left\|\theta_t\right\|_0^2\\&\le\left(w_{tt},v\right)+\left(\alpha(x)w_t,v\right)+\left(\gamma(x)\nabla w,\nabla v\right)+\left(\beta(x)\left(\sin u-\sin u^h\right),v\right)。\end{aligned} \tag{12}$$

(12)式两边对 t 从 0 到 t 积分，注意到 $\theta(0)=\theta_t(0)=0$，有

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\left(\left\|\theta_t\right\|_0^2+C\left\|\theta\right\|_1^2\right)+C'\int_0^t\left\|\theta_t\right\|_0^2\mathrm{d}t\\&\le\int_0^t\left(w_{tt},\theta_t\right)\mathrm{d}t+\int_0^t\left(\alpha(x)w_t,\theta_t\right)\mathrm{d}t\\&\quad+\int_0^t\left(\gamma(x)\nabla w,\nabla\theta_t\right)\mathrm{d}t+\int_0^t\left(\beta(x)\left(\sin u-\sin u^h\right),\theta_t\right)\mathrm{d}t\\&=\sum_{i=1}^4G_i,\end{aligned} \tag{13}$$

其中，

$$G_1=\int_0^t\left(w_{tt},\theta_t\right)\mathrm{d}t，\quad G_2=\int_0^t\left(\alpha(x)w_t,\theta_t\right)\mathrm{d}t，\quad G_3=\int_0^t\left(\gamma(x)\nabla w,\nabla\theta_t\right)\mathrm{d}t，\quad G_4=\int_0^t\left(\beta(x)\left(\sin u-\sin u^h\right),\theta_t\right)\mathrm{d}t。$$

下面我们借助不等式(3)对 $G_i\ (i=1,\cdots,4)$ 逐项进行估计：

$$G_1=\int_0^t\left(w_{tt},\theta_t\right)\mathrm{d}t\le\int_0^t\left\|w_{tt}\right\|_0\left\|\theta_t\right\|_0\mathrm{d}t\le Ch^6\int_0^t\left|u_{tt}\right|_3^2\mathrm{d}t+\varepsilon\int_0^t\left\|\theta_t\right\|_0^2\mathrm{d}t；$$

$$G_2=\int_0^t\left(\alpha(x)w_t,\theta_t\right)\mathrm{d}t\le\alpha_2\int_0^t\left\|w_t\right\|_0\left\|\theta_t\right\|_0\mathrm{d}t\le Ch^6\int_0^t\left|u_t\right|_3^2\mathrm{d}t+\varepsilon\int_0^t\left\|\theta_t\right\|_0^2\mathrm{d}t；$$

$$\begin{aligned}G_3&=\int_0^t\left(\gamma(x)\nabla w,\nabla\theta_t\right)\mathrm{d}t\le\left(\gamma(x)\nabla w,\nabla\theta\right)-\int_0^t\left(\gamma(x)\nabla w_t,\nabla\theta\right)\mathrm{d}t\\&\le Ch^4\left|u\right|_3^2+C\left\|\theta\right\|_1^2+Ch^4\int_0^t\left|u_t\right|_3^2\mathrm{d}t+C\int_0^t\left\|\theta\right\|_1^2\mathrm{d}t\end{aligned}；$$

$$G_4=\int_0^t\left(\beta(x)\left(\sin u-\sin u^h\right),\theta_t\right)\mathrm{d}t\le\varepsilon\int_0^t\left\|\theta_t\right\|_0^2\mathrm{d}t。$$

取适当的 ε，整理可得

$$\left\|\theta_t\right\|_0^2+\left\|\theta\right\|_1^2\le Ch^4\left(\left|u\right|_3^2+\int_0^t\left(\left|u_{tt}\right|_3^2+\left|u_t\right|_3^2\right)\mathrm{d}t\right)+C\int_0^t\left(\left\|\theta_t\right\|_0^2+\left\|\theta\right\|_1^2\right)\mathrm{d}t。 \tag{14}$$

利用 Gronwall 不等式，则有

$$\|\theta_t\|_0 \le Ch^2\left(|u|_3^2+\int_0^t\left(|u_{tt}|_3^2+|u_t|_3^2\right)\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{2}}; \tag{15}$$

$$\|\theta\|_1 \le Ch^2\left(|u|_3^2+\int_0^t\left(|u_{tt}|_3^2+|u_t|_3^2\right)\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{2}}。 \tag{16}$$

由引理 1 并利用三角不等式，定理得证。□

定理 2 设 u 是问题(5)的解，且 $u\in H_0^1(\Omega)\cap H^6(\Omega)$，$u^h\in V^h$ 是问题(6)的有限元解，I_hu 是 u 的有限元插值，则

$$\left\|u^h-I_hu\right\|_1 \le Ch^3\left(|u|_4^2+\int_0^t\left(|u_{tt}|_3^2+|u_t|_4^2\right)\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{2}}。 \tag{17}$$

证：利用引理 1 中的(4)式，对定理 1 中的 G_3 重新估计，有

$$\begin{aligned}G_3&=\int_0^t\left(\gamma(x)\nabla w,\nabla\theta_t\right)\mathrm{d}t\le\left(\gamma(x)\nabla w,\nabla\theta\right)-\int_0^t\left(\gamma(x)\nabla w_t,\nabla\theta\right)\mathrm{d}t\\&\le Ch^8|u|_4^2+C\|\theta\|_1^2+Ch^6\int_0^t|u_t|_4^2\,\mathrm{d}t+C\int_0^t\|\theta\|_1^2\,\mathrm{d}t。\end{aligned}$$

利用定理 1 的证明方法，(16)则变为

$$\|\theta\|^1 \le Ch^3\left(|u|_4^2+\int_0^t\left(|u_{tt}|_3^2+|u_t|_4^2\right)\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{2}}。 \tag{18}$$

从而定理得证。□

5. 各向异性网格下的超收敛分析

为了得到整体超收敛结果，我们把相邻4个小单元 K_1,K_2,K_3,K_4 合并成的一个大单元 $\tilde{K}$ (如图1)。

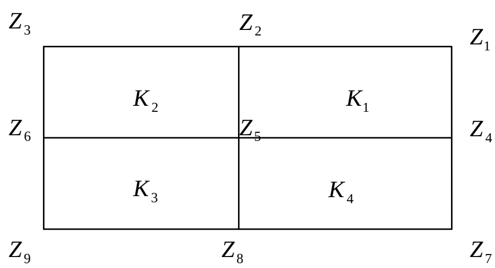

Figure 1. Big element $\tilde{K}$
图1. 大单元 $\tilde{K}$

在 $\tilde{K}$ 上，需要构造如下插值后处理算子 I_{2h}：

$$I_{2h}\omega\big|_{\tilde{K}}\in Q_2(\tilde{K}),\quad \forall\omega\in C(\tilde{K}),$$

这里，$Q_2(\tilde{K})$ 为 $\tilde{K}$ 上双二次多项式空间，为 $\tilde{K}$ 上连续函数空间。且 I_{2h} 满足

$$I_{2h}\omega(Z_i)=\omega(Z_i),\ i=1,\cdots,9 \tag{19}$$

由[9]知，上述插值后处理算子 I_{2h} 具有有各向异性特征，即 $\forall\alpha=(\alpha_1,\alpha_2)$，当 $|\alpha|=1$ 时，有

$$\left|\hat{D}^\alpha\left(\hat{v}-I_{2h}\hat{v}\right)\right|_{0,\tilde{K}}\le C\left|\hat{D}^\alpha\hat{v}\right|_{2,\tilde{K}},\ \forall\hat{v}\in H^3(\tilde{K})。 \tag{20}$$

引理3[10] $\forall u\in H^4(\Omega)$，插值算子 I_{2h} 满足

$$I_{2h}I_h u = I_{2h}u \text{ ,} \tag{21}$$

$$\left\|I_{2h}u - u\right\|_1 \le Ch^3 \left|u\right|_4 \text{ ,} \tag{22}$$

$$\left\|I_{2h}v\right\|_1 \le C\left\|v\right\|_1, \ \forall v \in V^h \text{ 。} \tag{23}$$

在超逼近结果(17)和引理3的基础上，有下面的整体超收敛结果：

定理3 对任意 $u \in H_0^1(\Omega) \cap H^6(\Omega)$，有下面的整体超收敛

$$\left\|I_{2h}u^h - u\right\|_1 \le Ch^3 \left(\left|u\right|_4^2 + \int_0^t \left(\left|u_{tt}\right|_3^2 + \left|u_t\right|_4^2\right)\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{2}} \text{ 。} \tag{24}$$

证：由定理2和引理3，可得

$$\begin{aligned} \left\|I_{2h}u^h - u\right\|_1 &\le \left\|I_{2h}u^h - I_{2h}I_h u\right\|_1 + \left\|I_{2h}I_h u - u\right\|_1 \le \left\|I_{2h}\left(u^h - I_h u\right)\right\|_1 + Ch^3\left|u\right|_4 \\ &\le \left\|u^h - I_h u\right\|_1 + Ch^3\left|u\right|_4 \le Ch^3\left(\left|u\right|_4^2 + \int_0^t \left(\left|u_{tt}\right|_3^2 + \left|u_t\right|_4^2\right)\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned} \text{ 。}$$

定理得证。□

本文在各向异性网格下研究了问题(1)的双二次有限元逼近，讨论了其在半离散格式下解的收敛性，

同时，利用插值算子与 Ritz 投影相一致的性质给出了其超逼近性质。最后，通过使用插值后处理技巧得到了它的整体超收敛结果。本文的结果对于探索后验估计方法和进一步设计数值求解此类方程的自适应算法有一定的帮助。

参考文献 (References)

[1] 张建文, 王旦霞等. 一类广义强阻尼 Sine-Gordon 方程的整体解[J]. 物理学报, 2008, 57(4): 2021-2025.

[2] 周盛凡. 有阻尼 Sine-Gordon 方程的全局吸引子的维数[J]. 数学学报, 1996, 39(5): 597-601.

[3] 李全国. 非齐次边界条件下 Sine-Gordon 型二阶非线性系统的全局吸引子及能稳性[J]. 应用数学学报, 2006, 29(6): 1119-1124.

[4] Z. Q. Liang. The global solution and numerical computation of the generalized nonlinear Sine-Gordon equation. Mathematics Applicate, 2003, 16(4): 40-49.

[5] 许秋滨, 张路明. 二维有阻尼方程的一个交替方向隐格式[J]. 应用数学学报, 2007, 30(5): 1111-1114.

[6] V. Thomee, J. C. Xu and N. Y. Zhang. Superconvergence of the gradient in piecewise linear finite element approximation to a parabolic problem. SIAM Journal on Numerical Analysis, 1989, 26: 553-573.

[7] Q. Lin, J. H. Pan. $O(h^4)$ superconvergence for biquadratic elements in parabolic problem. Hong Kong: Hong Kong Great Wall Culture Publish Co., 1991: 217-229.

[8] 石东洋, 龚伟. 各向异性网格上抛物方程全离散格式的高精度分析[J]. 数学物理学报, 2009, 29A(4): 898-911.

[9] D. Y. Shi, S. P. Mao and H. Liang. Anisotropic biquadratic finite with superclose results. Journal of Systems Science and Complexity, 2006, 19(4): 566-576.

[10] 石东洋, 任金城等. Sobolev 型方程各向异性下 Wilson 元的高精度分析[J]. 高等学校计算数学学报, 2009, 31(2): 169-171.

[11] 石东洋, 张熠然. 非定常 Stokes 问题的矩形 Crouzeix-Rawiart 型各向异性非协调元变网格方法[J]. 数学物理学报, 2006, 26A(5): 659-670.

[12] D. Y. Shi, S. P. Mao and S. C. Chen. An anisotropic nonconforming finite with some superconvergence results. Journal of Computational Mayhematics, 2005, 23(3): 261-274, 280.

[13] 石东洋, 谢丽萍, 陈绍春. 双曲积分微分方程的各向异性非协调有限元逼近[J]. 应用数学学报, 2007, 30(4): 1-13.

[14] 石东洋, 谢萍丽. Sobolev 方程的一类各向异性非协调有限元逼近 [J]. 系统科学与数学, 2009, 29(1): 116-128.

[15] 石东洋, 高新慧. 抛物问题各向异性有限元的超收敛分析[J]. 应用数学, 2007, 20(4): 27-33.

