Pure Mathematics 理论数学, 2013, 3, 244-247
http://dx.doi.org/10.12677/pm.2013.34037 Published Online July 2013 (http://www.hanspub.org/journal/pm.html)

Properties of a Class of Meromorphic Solutions of Differential Riccati Equations

Sheng Li, Baoqin Chen

College of Science, Guangdong Ocean University, Zhanjiang
Email: lish_ls@sina.com, cbqchen@126.com

Received: Apr. 16th, 2013; revised: May 3rd, 2013; accepted: May 17th, 2013

Abstract: For the meromorphic solution of differential Riccati equations whose coefficients are all rational functions, we give sharp estimates of the order of growth of it, and the exponents of convergence of the zeros, poles and fixed points of it for certain special cases.

Keywords: Riccati Differential Equation; Zeros; Poles; Fixed Points

一类 Riccati 微分方程亚纯解的性质

李　升，陈宝琴

广东海洋大学理学院，湛江
Email: lish_ls@sina.com, cbqchen@126.com

收稿日期：2013 年 4 月 16 日；修回日期：2013 年 5 月 3 日；录用日期：2013 年 5 月 17 日

摘　要：对系数均为有理函数的 Riccati 微分方程，我们在某些特殊条件下，给出了其亚纯解的增长级，极点收敛指数，零点收敛指数和不动点收敛指数的精确估计。

关键词：Riccati 微分方程；零点；极点；不动点

1. 引言

在本文中，我们将使用 Nevanlinna 理论[1-3]的标准记号。设 $f(z)$ 为亚纯函数，分别用 $\sigma(f)$, $\lambda(f)$, $\lambda(1/f)$ 和 $\tau(f)$ 表示 $f(z)$ 的增长级，极点收敛指数，零点收敛指数和不动点收敛指数。

设 $f(z)$ 为 Riccati 微分方程

$$f' = a_0 + a_1 f + a_2 f^2 \tag{1}$$

的亚纯解，其中 a_1, a_2, a_2 为亚纯函数且 $a_2 \not\equiv 0$。

当 $f(z)$ 为有理函数时，显然有 $\sigma(f) = \lambda(f) = 0$。

假设 $f(z)$ 为超越亚纯函数且方程(1)的系数 a_0, a_1, a_2 为有理函数。由方程(1)可得

$$ff = \frac{f'}{a_2} - \frac{a_1 f}{a_2} - \frac{a_0}{a_2}.$$

应用 Clunie 引理可知 $m(r,f) = S(r,f)$。这就给出了 $T(r,f) = N(r,f) + S(r,f)$，进而有

$$\lambda(f) = \sigma(f).$$

事实上，在有理函数系数的条件下，文献[2]证明了 $\lambda(f)=\sigma(f)<\infty$。

定理 1[2]设 a_0,a_1,a_2 为有理函数，则方程(1)的亚纯解的级 $\sigma(f)<\infty$。

一个自然的问题是：当 a_0,a_1,a_2 为有理函数时，能否给出方程(1)亚纯解的级 $\sigma(f)$ 的精确估计，而对 $\lambda(f),\lambda(1/f)$ 又有何结果？考虑这个问题，我们证明了如下结果。

定理 2 设 $A(z)$ 为有理函数，$u(z)$ 为方程

$$u'=A(z)+u^2 \tag{2}$$

的亚纯解，则 $\lambda(u)=\sigma(u)<\infty$。特别地，如果 $A(z)$ 为 n 次多项式，则

a) 当 n 为奇数时，$\lambda(1/u)=\lambda(u)=\sigma(u)=\dfrac{n+2}{2}$;

b) 当 n 为偶数时，或者 $u(z)$ 为 $\dfrac{n}{2}$ 次多项式或者 $u(z)$ 为超越亚纯函数且 $\lambda(1/u)=\lambda(u)=\sigma(u)=\dfrac{n+2}{2}$。

定理 3 设 a_0,a_1,a_2 为有理函数，$f(z)$ 为方程(1)的亚纯解，则 $\lambda(f)=\sigma(f)<\infty$。特别地，如果 $a_2\equiv c\neq 0$，a_0,a_1 为多项式且满足

$$A(z)=ca_0(z)-\frac{a_1(z)^2}{4}+\frac{a_{1'}(z)}{2}\not\equiv 0\,. \tag{3}$$

记 $n=\deg A(z)$，则

a) 当 n 为奇数时，$\lambda(1/f)=\lambda(f)=\sigma(f)=\dfrac{n+2}{2}$;

b) 当 n 为偶数时，或者 $f(z)$ 为 $\dfrac{n}{2}$ 次多项式，或者 $\lambda(1/f)=\lambda(f)=\sigma(f)=\dfrac{n+2}{2}$。

最后，我们进一步考虑方程(1)和方程(2)的亚纯解的不动点，得到以下结果。

定理 4 设 $A(z)$ 为 n 次多项式，且 n 为奇数，$u(z)$ 为方程(2)的亚纯解，则 $\tau(u)=\sigma(u)=\dfrac{n+2}{2}$。

定理 5 设 $a_2\equiv c\neq 0$，a_0,a_1 为多项式且满足(3)，$n=\deg A(z)$ 为奇数，$f(z)$ 为方程(1)的亚纯解。则

$$\tau(f)=\sigma(f)=\frac{n+2}{2}\,.$$

下文组织如下：第二节给出证明所需的引理，第三节给出定理 2 的证明，第四节给出定理 3 的证明，最后一节证明定理 4 和定理 5。

2. 引理

引理 1[4]设 $f(z)$ 为有限级亚纯函数满足 $\sigma(f)=\sigma<\infty$，则对任意给定的 $\varepsilon>0$，存在具有限对数测度的集合 $E\subset(1,\infty)$，满足对所有 $|z|=r\notin E\cup[0,1]$，有

$$\left|\frac{f'(z)}{f(z)}\right|<|z|^{\sigma-1+\varepsilon}\,.$$

引理 2[5]设 $f(z)$ 为有限级亚纯函数满足 $\sigma(f)=\sigma<\infty$，则对任意给定的 $\varepsilon>0$，存在具有限线测度的集合 $E\subset(1,\infty)$，满足对所有 $|z|=r\notin E\cup[0,1]$，当 r 充分大时，有

$$\exp\left\{-r^{\sigma+\varepsilon}\right\}\leq|f(z)|\leq\exp\left\{r^{\sigma+\varepsilon}\right\}.$$

引理 3[6]设 $A(z)\not\equiv 0$ 为 n 次多项式，$f(z)$ 满足方程 $f''+A(z)f=0$。则

a) $\sigma(f)=\dfrac{n+2}{2}$；

b) 当 n 为奇数时，$\sigma(f)=\dfrac{n+2}{2}$；

c) 当 n 为偶数时，或者 $\lambda(f)=\frac{n+2}{2}$，或者 $f(z)$ 至多只有有限个零点。

3. 定理 2 的证明

由 Clunie 引理，我们容易证明 $\lambda(u)=\sigma(u)$。下面考虑 $A(z)$ 是 n 多项式的情形。由定理 A，有 $\sigma(u)<\infty$。由方程(2)可知，$u(z)$ 的极点都是简单极点且 $u(z)$ 在每个极点处的残数均为 -1，故存在有限级整函数 $g(z)$，其零点都是简单零点，使得

$$u=-\frac{g'}{g}. \tag{4}$$

由(4)可知，$\sigma(u)\le\sigma(g)$。

1) z_0 为 $u(z)$ 的极点当且仅当 z_0 为 $g(z)$ 的零点，进而有 $\lambda(u)=\lambda(1/g)$；

2) z_0 为 $u(z)$ 的 m 阶零点当且仅当 z_0 为 $g'(z)$ 的 m 阶零点，进而有 $\lambda(1/u)=\lambda(1/g')$。

将(4)代入(2)得到

$$g''+Ag=0. \tag{5}$$

由引理 3 可知 $\sigma(g)=\frac{n+2}{2}$。

情况 1) n 为奇数，此时 $\lambda(1/g)=\sigma(g)=\frac{n+2}{2}$。注意到

$$\sigma(g')=\sigma(g)=\frac{n+2}{2}\notin\mathbb{N},$$

因此 $\lambda(1/u)=\lambda(1/g')=\sigma(g')=\frac{n+2}{2}$。

情况 2) n 为偶数，此时仍然有 $\sigma(g)=\frac{n+2}{2}$。如果 $\lambda(1/g)=\frac{n+2}{2}$，则 $\lambda(u)=\lambda(1/g)$。否则，由引理 3，$g(z)$ 至多只有有限个零点。由 Hadamard 分解定理可知

$$g(z)=P(z)\mathrm{e}^{h(z)},$$

其中，$P(z),h(z)$ 为多项式满足 $\deg P(z)=p, \deg h(z)=\frac{n+2}{2}$。结合(5)即得

$$u=-\frac{P'+h'P}{P}. \tag{6}$$

如果 $p=0$，则 $u(z)=-h'$ 为多项式，其次数为 $\deg u(z)=\frac{n}{2}$。

如果 $p\ge1$，则由(2)和(5)可知

$$AP^2=-\left(P''P+h''P^2+2h'PP'+(h')^2\right)$$

这导出矛盾式：

$$n+2p=\deg AP^2=\deg\left\{P''P+h''P^2+2h'PP'+(h')^2\right\}\le n+2p-2.$$

这就完成了定理 2 的证明。

4. 定理 3 的证明

注意到，利用变换

$$f=\frac{1}{a_2}u-\frac{a_1}{2a_2}-\frac{a_2'}{2a_2^2}. \tag{7}$$

可由(1)得到(2)，此时

$$A = a_0 a_2 - \frac{a_1^2}{4} + \frac{a_1'}{2} - \frac{3}{4}\left(\frac{a_2'}{a_2}\right)^2 - \frac{a_1}{2}\frac{a_2'}{a_2} - \frac{1}{2}\frac{a_2''}{a_2}.$$

由假设，$A(z)$为$n(\geq 1)$有理函数。由(7)及定理 1 可得，$\lambda(f)=\lambda(u)=\sigma(u)=\sigma(f)$。

特别地，当$a_2 \equiv c \neq 0$，a_0, a_1为多项式且满足(3)时，$A(z)$为n次多项式，则再由定理 1 易得

1) 当n为奇数时，$\lambda(1/f)=\lambda(f)=\sigma(f)=\dfrac{n+2}{2}$；

2) 当n为偶数时，或者$f(z)$为$\dfrac{n}{2}$次多项式，或者$\lambda(1/f)=\lambda(f)=\sigma(f)=\dfrac{n+2}{2}$。

定理 3 证完。

5. 定理 4 和定理 5 的证明

注意到，将$u=g+z$代入(2)可得$g'=(A+z^2-1)+2zg+g^2$。注意到$\tau(u-z)=\lambda(1/g)$，对上式应用定理 3 即得定理 4 结论。同理可证定理 5 结论成立。

6. 致谢

感谢审稿人和编辑对本文提出的修改意见。

参考文献 (References)

[1] W. Hayman. Meromorphic functions. Oxford: Clarendon Press, 1964.

[2] I. Laine. Nevanlinna theory and complex differential equations. Berlin: W.de Gruyter, 1993.

[3] 杨乐. 值分布论及其新研究[M]. 北京: 科学出版社, 1982.

[4] G. Gundersen. Estimates for the logarithmic derivative of a meromorphic function, plus similar estimates. Journal of The London Mathematical Society-Second Series,1988, 37(2): 88-104.

[5] Z.-X. Chen, C.-C. Yang. Some oscillation theorems for linear differential equations with meromorphic coefficients. Southeast Asian Bulletin of Mathematics, 1999, 23: 409-417.

[6] S. Bank, J. Langley. On the oscillation theory of $f''+Af=0$ where A is entire. Transactions of the American Mathematical Society, 1982, 273: 351-363.

