Pure Mathematics 理论数学, 2013, 3, 289-294
http://dx.doi.org/10.12677/PM.2013.35044 Published Online September 2013 (http://www.hanspub.org/journal/pm.html)

The Exact Solutions of a Class of the Nonlinear Diffusion Equations under the Generalized Conditional Symmetry

Qiong Wu, Desheng Li

School of Mathematics and System Sciences, Shenyang Normal University, Shenyang
Email: wuqiong_1116@163.com

Received: Jun. 17th, 2013; revised: Jul. 4th, 2013; accepted: Jul. 28th, 2013

Abstract: This paper will discuss the exact solution of (1 + 1) dimensional nonlinear diffusion equation $u_t=\left(D(u)u_x^n\right)_x+P(x,u)u_x+Q(x,u)$ by using the generalized conditional symmetries method. The convection term $P(x,u)$ and source term $Q(x,u)$ are dependent on the variable *x*. This paper mainly discusses diffusion term $D(u)=\mathrm{e}^u$ and finally it will give the exact solutions by using method of symmetrically reduced and classified.

Keywords: Generalized Conditional Symmetry; A Class of the Nonlinear Diffusion Equation; Exact Solution

在广义条件对称下的一类非线性扩散方程的精确解

吴　琼，李德生

沈阳师范大学数学与系统科学学院，沈阳
Email: wuqiong_1116@163.com

收稿日期：2013 年 6 月 17 日；修回日期：2013 年 7 月 4 日；录用日期：2013 年 7 月 28 日

摘　要：本文利用广义条件对称法讨论了一类(1 + 1)维非线性扩散方程 $u_t=\left(D(u)u_x^n\right)_x+P(x,u)u_x+Q(x,u)$ 的精确解问题。其中，对流项 $P(x,u)$ 与源项 $Q(x,u)$ 都显示的依赖于变量 *x*，本文针对方程的扩散项 $D(u)=\mathrm{e}^u$ 这一重要的情形，对该方程进行对称约化、分类，进而给出方程的精确解。

关键词：广义条件对称；一类非线性扩散方程；精确解

1. 引言

考虑 1 + 1 维非线性扩散方程

$$u_t=\left(D(u)u_x^n\right)_x+P(x,u)u_x+Q(x,u) \tag{1}$$

其中，$D(u)$ 为扩散项，$P(x,u)$ 和 $Q(x,u)$ 分别为对流项与源项，且均为变量 x，u 的光滑函数。该类方程的很多特殊形式的精确解问题，已通过李点对称法[1,2]，非古典方法[3,4]，CK 直接法[5]等方法获得了丰富的结果。

由 Fushchych 和 Zhdanov 最早提出，并由 Fokas 以及 Liu[6]等人完善的广义条件对称法是对称群中求精确解

的行之有效的方法，此方法得到的解一般不能由李点对称法或条件对称法等方法求得。对于本文讨论的方程(1)，当取 $n=1$ 时，即 $u_t=(D(u)u_x)_x+P(x,u)u_x+Q(x,u)$ 时，以及取不显示依赖于变量 x 的对流项与热源项，$u_t=\left(D(u)u_x^n\right)_x+P(u)u_x+Q(u)$ 时，文献[7,8]运用广义条件对称法分别给出了相应方程的一类新的精确解。文献[9]利用广义条件对称法讨论了方程(1)中扩散项 $D(u)=u^m$ 时的精确解，本文将讨论方程(1)中扩散项 $D(u)=\mathrm{e}^u$ 时的精确解。

2. 预备知识以及广义条件对称定理

设 1 + 1 维非线性扩散方程的一般形式为

$$u_t=E\left(x,t,u,u_1,\cdots,u_n\right) \tag{2}$$

其中 $u_i=\dfrac{\partial^i u}{\partial x^i}$，它在非李点无穷小变换群下是不变的，且这个变换群为：

$$\begin{aligned}
u'&=u+\varepsilon\eta\left(t,x,u,u_1,\cdots,u_n\right)+O\left(\varepsilon^2\right)\\
u_t'&=u_t+\varepsilon D_t\eta\left(t,x,u,u_1,\cdots,u_n\right)+O\left(\varepsilon^2\right)\\
u_x'&=u_x+\varepsilon D_x\eta\left(t,x,u,u_1,\cdots,u_n\right)+O\left(\varepsilon^2\right)
\end{aligned}$$

该变换称为方程(2)所允许的群，该群等价于如下的演化向量场 V，其中 η 为 V 的特征：

$$V=\sum_{k=0}^{\infty}D_x^k\eta\frac{\partial}{\partial u_k} \tag{3}$$

其中 $D_x=\dfrac{\partial}{\partial x}+\sum\limits_{k=0}^{\infty}u_{k+1}\dfrac{\partial}{\partial u_k}$，$D_x^{j+1}=D\left(D_x^j\right)$，$D_x^0=1$。

定义 1[10] 向量场(3)被称为方程(2)的广义条件对称，如果满足 $V\left(u_t-E\right)\big|_{L\cap M}=0$。其中 L 表示方程 $\left(u_t-E\right)=0$ 的所有关于 x,t 的微分序列集合，即

$$\left(u_t-E\right)=0,\quad D_x^iD_t^k\left(u_t-E\right)=0,\quad i,k=0,1,2,\cdots,$$

M 表示方程 $\eta=0$ 的所有关于 x 的微分序列集合，即 $D_x^i\eta=0$，$i=0,1,2,\cdots$

命题 1[6,11]方程(2)允许广义条件对称(3)的充分必要条件是存在一个函数 $W\left(t,x,u,\eta\right)$ 满足

$$\frac{\partial\eta}{\partial t}=\left[E,\eta\right]+W\left(t,x,u,\eta\right),\quad W\left(t,x,u,\eta\right)=0$$

其中 $\left[E,\eta\right]=E'\eta-\eta'E$，$'$表示 Gateaux 导数，$W$ 是关于 $t,x,u,u_1,\cdots$ 和 $\eta,D_x\eta,D_x^2\eta,\cdots$ 的解析函数。

推论 1[11]：方程(2)的允许广义条件对称(3)的充分条件是 $D_t\eta=0$。

3. 主要结果

设方程(1)允许的广义条件对称形式如下：

$$\eta=u_{xx}+H\left(u\right)u_x^2+G\left(x,u\right)u_x+F\left(x,u\right) \tag{4}$$

其中，$H\left(u\right)$ 是关于 u 的光滑函数，$G\left(x,u\right)$，$F\left(x,u\right)$ 是关于 x,u 的光滑函数，由推论 1，即 $D_t\eta=0$ 及定义 1，即

$$u_{xx}=-H\left(u\right)u_x^2-G\left(x,u\right)u_x-F\left(x,u\right)$$

可以得到方程(1)和广义条件对称(4)中参数函数的决定方程组：

$$u_x^{n+3}: D''' - (3n+1)D''H - 3nD'H' + n(3n+2)D'H^2 - nDH'' - n^2(n+1)DH^3 + n(3n+1)DHH' = 0$$

$$u_x^{n+2}: -n^2(3n+1)DH^2G - (3n+2)D''G + n(3n+1)DH'G - 3nD'G_u$$
$$+3n(2n+1)D'HG - nDG_{uu} + n(3n-1)DHG_u = 0$$

$$u_x^{n+1}: -nDF_{uu} + 2n(3n+1)D'HF + n(n-2-3n^2)DH^2F - 3nD'F_u + n(3n+1)DH'F$$
$$-3(n+1)D''F + 3n(n-1)DHF_u - 2nDG_{xu} + n(3n-1)DHG_x - (3n+1)D'G_x$$
$$+n(3n+1)D'G^2 - n^2(3n-1)DHG^2 + n(3n-1)DGG_u = 0$$

$$u_x^{n}: n(3n-1)DG_uF + 2n(3n-3n^2-2)DHGF - 2nDF_{xu} + 3n(n-1)DGF_u$$
$$-(3n+1)D'F_x + n(6n+1)D'GF + 3n(n-1)DHF_x + n(3n-1)DGG_x - n^2(n-1)DG^3 - nDG_{xx} = 0$$

$$u_x^{n-1}: n(5n-3n^2-4)DHF^2 + n(n-1)(2-3n)DG^2F + n(3n-1)DG_xF$$
$$+3n^2D'F^2 + 3n(n-1)DFF_u + 3n(n-1)DGF_x - nDF_{xx} = 0$$

$$u_x^{n-2}: 3n(n-1)DFF_x + n(n-1)(3n-4)DGF^2 = 0$$

$$u_x^{n-3}: n(n-1)(n-2)DF^3 = 0$$

$$u_x^{3}: (P_{uu} - HP_u) = 0$$

$$u_x^{2}: H'Q + Q_{uu} - 2P_uG + Q_uH + 2P_{xu} = 0$$

$$u_x^{1}: G_uQ - PG_x - 3P_uF + P_{xx} - P_xG + 2Q_{xu} + 2HQ_x$$

$$u_x^{0}: F_uQ + GQ_x - 2P_xF - Q_uF - PF_x + Q_{xx} = 0$$

根据 n 的选取情况我们分如下 3 种情形对该方程进行讨论：

情形 1：

考虑 n 为任意值时，将扩散项 $D(u)=\mathrm{e}^u$ 代入 u_x^{n+3} 项的系数得到关于 $H(u)$ 的二阶常微分方程，

$$1-(3n+1)H - 3nH' + (3n^2+2n)H^2 - nH'' - n^2(n+1)H^3 + n(3n+1)HH' = 0$$

这里给出该方程的 3 个特解分别为：$\frac{1}{n},\frac{1}{n+1},\frac{1}{n}\left(1-\frac{1}{u}\right)$

1) $H(u)=\frac{1}{n}$

我们得到方程(1)如下的决定方程组：

$$P_{uu} - \frac{1}{n}P_u = 0$$
$$Q_{uu} + \frac{1}{n}Q_u + 2P_{xu} = 0$$
$$P_{xx} + 2Q_{xu} + \frac{2}{n}Q_x = 0$$
$$Q_{xx} = 0$$

解此偏微分方程组可得

$$P(x,u) = \frac{1}{2}C_1x^2 + C_2x + (C_4x + C_5)\mathrm{e}^{\frac{u}{n}} + C_3$$
$$Q(x,u) = -\frac{1}{2}C_1nx + C_8\mathrm{e}^{-\frac{u}{n}}x - nC_4\mathrm{e}^{\frac{u}{n}} - nC_6\mathrm{e}^{-\frac{u}{n}} + C_7$$

方程(1)变成

$$u_t=\left(\mathrm{e}^u u_x^n\right)_x+\left[\frac{1}{2}C_1x^2+C_2x+\left(C_4x+C_5\right)\mathrm{e}^{\frac{u}{n}}+C_3\right]u_x+\left[-\frac{1}{2}C_1nx+C_8\mathrm{e}^{-\frac{u}{n}}x-nC_4\mathrm{e}^{\frac{u}{n}}-nC_6\mathrm{e}^{-\frac{u}{n}}+C_7\right] \tag{5}$$

广义条件对称(4)变成

$$\eta=u_{xx}+\frac{1}{n}u_x^2 \tag{6}$$

那么方程(1)的精确解由方程(6) $\eta=0$ 得

$$u(x,t)=n\ln\left[\frac{\alpha(t)x+\beta(t)}{n}\right],$$

将其代入方程(5)中，得到 $\alpha(t),\beta(t)$ 满足如下方程组：

$$\alpha'(t)=\left(C_2+\frac{1}{n}C_7\right)\alpha-\frac{1}{n}C_4\alpha\beta+\frac{1}{n}C_5\alpha^2-\frac{1}{2}C_1\beta+C_8$$

$$\beta'(t)=\frac{1}{n}\left(C_5\alpha+C_7\right)\beta+C_3\alpha-nC_6-\frac{1}{n}C_4\beta^2$$

这里我们考虑 $C_i=0$，$i\neq 2,5$，那么可得到：

$$\alpha(t)=C_2\left(C_0\mathrm{e}^{-C_2t}-\frac{C_5}{n}\right)^{-1}$$

$$\beta(t)=-C_2t-\ln\left|nC_0\mathrm{e}^{-C_2t}-C_5\right|+C$$

2)：$H(u)=\dfrac{1}{n+1}$

由(1)可同理得到

$$P(x,u)=\frac{1}{2}C_1x^2+C_2x+\left(C_4x+C_5\right)\mathrm{e}^{\frac{u}{n+1}}+C_3$$

$$Q(x,u)=-\frac{1}{2}C_1(n+1)x+C_8\mathrm{e}^{-\frac{u}{n+1}}x-(n+1)C_4\mathrm{e}^{\frac{u}{n+1}}-(n+1)C_6\mathrm{e}^{-\frac{u}{n+1}}+C_7$$

方程(1)变成

$$u_t=\left(\mathrm{e}^u u_x^n\right)_x+\left[\frac{1}{2}C_1x^2+C_2x+\left(C_4x+C_5\right)\mathrm{e}^{\frac{u}{n+1}}+C_3\right]u_x+\left[-\frac{1}{2}C_1(n+1)x+C_8\mathrm{e}^{-\frac{u}{n+1}}x-nC_4\mathrm{e}^{\frac{u}{n+1}}-nC_6\mathrm{e}^{-\frac{u}{n+1}}+C_7\right] \tag{7}$$

广义对称条件(4)变成

$$\eta=u_{xx}+\frac{1}{n+1}u_x^2 \tag{8}$$

那么方程(1)的精确解由方程(8) $\eta=0$ 得

$$u(x,t)=(n+1)\ln\left[\frac{\alpha(t)x+\beta(t)}{n+1}\right]$$

其中 $\alpha(t),\beta(t)$ 满足如下方程组：

$$\alpha'(t)=\left(C_2+\frac{1}{n+1}C_7\right)\alpha-\frac{1}{n+1}C_4\alpha\beta+\frac{1}{n+1}C_5\alpha^2-\frac{1}{2}C_1\beta+C_8$$

$$\beta'(t)=\frac{1}{n+1}\left(C_5\alpha+C_7\right)\beta+C_3\alpha-(n+1)C_6-\frac{1}{n+1}C_4\beta^2$$

3) $H(u)=\frac{1}{n}\left(1-\frac{1}{u}\right)$

由此我们可得到方程(1)的如下决定方程组：

$$\begin{aligned}&P_{uu}-\frac{1}{n}\left(1-\frac{1}{u}\right)P_u=0\\&\frac{1}{nu^2}Q+Q_{uu}+\frac{1}{n}\left(1-\frac{1}{u}\right)Q_u+2P_{xu}=0\\&P_{xx}+2Q_{xu}+\frac{2}{n}\left(1-\frac{1}{u}\right)Q_x=0\\&Q_{xx}=0\end{aligned}$$

解此偏微分方程组可得

$$\begin{aligned}P(x,u)&=\frac{1}{2}C_1x^2+C_2x+C_3+\left[\int \mathrm{e}^{\frac{u}{n}}u^{-\frac{1}{n}}\mathrm{d}u\right](C_4x+C_5)\\Q(x,u)&=\mathrm{e}^{-\frac{u}{n}}u^{\frac{1}{n}}\left[-\frac{1}{2}C_1x\int \mathrm{e}^{\frac{u}{n}}u^{-\frac{1}{n}}\mathrm{d}u+C_8x+C_7+\int \mathrm{e}^{\frac{u}{n}}u^{-\frac{1}{n}}\left(C_6-\int 2C_4u^{-\frac{1}{n}}\mathrm{e}^{\frac{u}{n}}\mathrm{d}u\right)\mathrm{d}u\right]\end{aligned}$$

由此方程(1)变成

$$\begin{aligned}u_t=&\left(\mathrm{e}^{u}u_x^n\right)_x+\left\{\frac{1}{2}C_1x^2+C_2x+C_3+\left[\int \mathrm{e}^{\frac{u}{n}}u^{-\frac{1}{n}}\mathrm{d}u\right](C_4x+C_5)\right\}u_x\\&+\mathrm{e}^{-\frac{u}{n}}u^{\frac{1}{n}}\left[-\frac{1}{2}C_1x\int \mathrm{e}^{\frac{u}{n}}u^{-\frac{1}{n}}\mathrm{d}u+C_8x+C_7+\int \mathrm{e}^{\frac{u}{n}}u^{-\frac{1}{n}}\left(C_6-\int 2C_4u^{-\frac{1}{n}}\mathrm{e}^{\frac{u}{n}}\mathrm{d}u\right)\mathrm{d}u\right]\end{aligned}\tag{9}$$

广义条件对称(4)变成

$$\eta=u_{xx}+\frac{1}{n}\left(1-\frac{1}{u}\right)u_x^2\tag{10}$$

那么方程(1)的精确解的隐式形式由方程(10) $\eta=0$ 得

$$\int^{u}\mathrm{e}^{\frac{s}{n}}s^{-\frac{1}{n}}\mathrm{d}s=\alpha(t)x+\beta(t)$$

将其代入方程(9)，可得到 $\alpha(t)$， $\beta(t)$ 满足如下方程组：

$$\begin{aligned}\alpha'(t)&=(C_2+C_6)\alpha+C_5\alpha^2-\frac{1}{2}C_1\beta+C_8\\\beta'(t)&=\alpha^{n+1}+C_3\alpha+C_5\alpha\beta+C_6\beta+C_7\end{aligned}$$

当 $C_4=0$ 时。

这里我们仅考虑 $C_i=0$， $i\neq 5$ 的情形，那么可得到：

$$\begin{aligned}\alpha(t)&=-(C_5t+C_0)^{-1}\\\beta(t)&=(-1)^{n+1}\left[C_5(1-n)(C_5t+C_0)^n\right]^{-1}+C(C_5t+C_0)^{-1}\end{aligned}$$

情形 2：

取 $n=1$ 时，该方程在文献[4]中已经研究过，并得到了丰富的结果。

情形 3：

取 $n=2$ 时，我们得到新的决定方程组：

$$
\begin{aligned}
&u_x^5: D''' - 7D''H - 6D'H' + 16D'H^2 - 2DH'' - 12DH^3 + 14DHH' = 0 \\
&u_x^4: -28DH^2G - 8D''G + 14DH'G - 6D'G_u + 30D'HG - 2DG_{uu} + 10DHG_u = 0 \\
&u_x^3: -2DF_{uu} + 28D'HF - 24DH^2F - 6D'F_u + 14DH'F - 9D''F + 6DHF_u - 4DG_{xu} + 10DHG_x \\
&\quad -7D'G_x + 14D'G^2 - 20DHG^2 + 10DGG_u + P_{uu} - HP_u = 0 \\
&u_x^2: 10DG_uF - 32DHGF - 4DF_{xu} + 6DGF_u - 7D'F_x + 26D'GF + 6DHF_x + 10DGG_x - 4DG^3 \\
&\quad -2DG_{xx} + H'Q + Q_{uu} - 2P_uG + Q_uH + 2P_{xu} = 0 \\
&u_x^1: -12DHF^2 - 8DG^2F + 10DG_xF + 12D'F^2 + 6DFF_u + 6DGF_x - 2DF_{xx} + G_uQ - PG_x \\
&\quad -3P_uF + P_{xx} - P_xG + 2Q_{xu} + 2HQ_x = 0 \\
&u_x^0: 6DFF_x + 4DGF^2 + F_uQ + GQ_x - 2P_xF - Q_uF - PF_x + Q_{xx} = 0
\end{aligned}
$$

将扩散项 $D(u)=\mathrm{e}^u$ 代入 u_x^5 项的系数得到关于 $H(u)$ 的二阶常微分方程，这里给出该方程的 3 个特解 $\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{u}\right)$，由 u_x^4 项的系数可得 $G(x,u)=0$，再分别将该 3 个特解带入到决定方程中，我们可给出方程(1)允许广义对称(2)的一些分类情况，这里我们仅给出与情形 1 中的形式不同的广义条件对称形式，其余分类形式将 $n=2$ 带入到情形 1 当中均可满足。

$$
u_t = \left(\mathrm{e}^u u_x^2\right)_x + \left(C_2x + C_3\right)u_x - 2C_2\text{；} \tag{11}
$$

$$
\eta = u_{xx} + \frac{1}{2}u_x^2 + C_1\mathrm{e}^{-u}
$$

本文中 C_i 为任意常数，$i=1,2,\cdots$

4. 结论

本文利用广义条件对称法讨论了方程(1)允许的二阶广义条件对称问题，并得到了该类方程的一些精确解，相对于条件对称法，古典对称法等方法，该方法得到了该类方程的新解。

参考文献 (References)

[1] R. M. Cherniha, M. Serov. Symmetries, ansätze and exact solutions of nonlinear second-order evolution equations with convection terms. European Journal of Applied Mathematics, 1998, 9(5), 527-542.

[2] V. A. Galaktionov, V. A. Dorodnitsyn, G. G. Elenin, S. P. Kurdyumovand and A. A. Samarskii. A quasilinear equation of heat conduction with a source: Peaking, localization, symmetry, exact solutions, asymptotic behavior, structures. Journal of Soviet Mathematic, 1988, 41(5): 1222-1292.

[3] D. J. Arrigo, P. Broadbridge and J. M. Hill. Nonclassical symmetry reduction of the linear diffusion equation with a nonlinear source. IMA Journal of Applied Mathematics, 1994, 52(1): 1-24.

[4] G. W. Bluman, J. D. Cole. The general similarity solution of the heat equation. Journal of Mathematics and Mechanics, 1969, 18: 1025-1042.

[5] P. A. Clarkson, M. D. Kruskal. New similarity reductions of the Boussinesq equations. Journal of Mathematical Physics, 1989, 30(10): 2201-2213.

[6] A. Z. Fokas, Q. M. Liu. Nonlinear interaction of travelling waves of nonintegrable equations. Physical Review Letters, 1994, 72(21): 3293-3296.

[7] C. Z. Qu, P. G. Estevez. On nonlinear diffusion equation with x-dependent convection and absorption. Nonlinear Analysis, 2004, 57(4): 549-577.

[8] 万晖, 杜凯. 非线性扩散方程在广义条件对称下的精确解[J]. 西北大学学报(自然科学版), 2012, 242(1): 1-3.

[9] 闫荣, 甘亚妮, 于媛媛. 非线性扩散方程的广义条件对称和精确解[J]. 纺织高校基础科学学报, 2010, 323(1): 18-21.

[10] C. Z. Qu, L. N. Li, Z. Li and L. Z. Wang. Conditional lie bäcklund symmetries and sign-invariants to quasil-linear diffusion equations. Studies in Applied Mathematics, 2007, 119(4): 355-391.

[11] R. Z. Zhdanov. Conditional lie-bäcklund symmetry and reductions of evolution equations. Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical, 1995, 28(13): 3841-3850.

