Pure Mathematics 理论数学, 2013, 3, 394-398
http://dx.doi.org/10.12677/pm.2013.36060 Published Online November 2013 (http://www.hanspub.org/journal/pm.html)

Lagrangian Stability of a Class of Second-Order Periodic Systems

Shunjun Jiang

College of Sciences, Nanjing University of Technology, Nanjing
Email: jiangshunjun@njut.edu.cn

Received: Oct. 9th, 2013; revised: Oct. 18th, 2013; accepted: Oct. 24th, 2013

Abstract: By the iteration of KAM, the following second-order differential equation: $x''+f(x,x',t)+ax^{+}-bx^{-}+|x|^{\tau}+e(x,t)=0$ is studied. Under some assumptions on the parities of $f(x,x',t)$ and $e(x,t)$, by a small twist theorem of reversible mapping, the existence of quasi-periodic solutions and boundedness of all the solutions are obtained.

Keywords: Reversible System; KAM Theorem; Boundedness of Solutions

一类二阶周期系统的 Lagrangian 稳定性

江舜君

南京工业大学理学院，南京
Email: jiangshunjun@njut.edu.cn

收稿日期：2013 年 10 月 9 日；修回日期：2013 年 10 月 18 日；录用日期：2013 年 10 月 24 日

摘　要：用 KAM 迭代方法研究了下列二阶微分方程：$x''+f(x,x',t)+ax^{+}-bx^{-}+|x|^{\tau}+e(x,t)=0$。当 $f(x,x',t)$与$e(x,t)$的导数满足一定条件时，利用关于可逆映射的小扭转定理得到拟周期解的存在性与所有解的有界性。

关键词：可逆系统；KAM 定理；解的有界性

1. 引言

在文献[1]中，作者研究下面的二阶方程：

$$x''+f(x,t)x'+n^2x+\phi(x)+p(x,t)=0 \tag{1}$$

其中 $f(x,t)$, $\phi(x)$ 有界，并且 $f(x,t)=f(x,t+1), p(x,t)=p(x,t+1)$。

假设 $f(x,t)$, $\phi(x)$ 以及 $p(x)$ 满足恰当的假设，使方程(1)具有可逆结构。通过将原方程化为一个可积系统的小扰动，运用 KAM 定理，[1]证明了方程的所有解的有界性。

受到文献[2-5]的启发，本文讨论下面的二阶方程

$$x''+f(x,x',t)+ax^{+}-bx^{-}+|x|^{\tau}+e(x,t)=0 \tag{2}$$

其中

$$x^k \frac{\partial^{k+s} f(x,y,t)}{\partial x^k \partial y^s} \le C \cdot |x|^{\sigma+1}，\quad x^k \frac{\partial^{k+s} e(x,t)}{\partial x^k \partial t^s} \le C \cdot |x|^{\sigma+1}， \tag{3}$$

$0<\sigma<\tau<1$，$\forall x \ne 0, \forall 0 \le k,s,m \le 6$，可以看出非线性扰动项是无界的，这也是本文与[5]不同的地方。

2. 主要结论

定理 1. 假设 $e \notin C^6, f \notin C^6$，关于 t 都是 2π 周期，满足(3)且有

$$\begin{aligned} &f(x,-y,t) = -F(x,y,t), e(x,-t) = e(x,t), \\ &f(-x,y,t) = F(x,y,t), e(-x,-t) = -e(x,t). \end{aligned} \tag{4}$$

那么所有(2)的解都是有界的。

3. 定理 1 的证明

3.1. 作用角变量与坐标变换

通过坐标变换，方程(2)可变换成下面的系统，

$$\begin{cases} x' = -y \\ y' = f + ax^+ - bx^- + e(x,t) + |x|^\tau \end{cases} \tag{5}$$

由条件(4)，我们很容易看出，(5)关于对合 $G:(x,y) \to (x,-y)$ 具有可逆结构。

令 $c(\theta)$ 为方程 $x'' + ax^+ - bx^- = 0$ 的解，显然满足初始条件 $x(0)=1, x'(0)=1$ 并且令 $-s(\theta)$ 为其导数。下面做变换：

$$\begin{cases} x = rc(\theta) \\ y = rs(\theta). \end{cases}$$

在变换 $(r,\theta) \to (x,y)$ 下,系统(5)变为：

$$\begin{cases} r' = f_1(t,\theta,r) = N_1(t,\theta,r) + P_1(t,\theta,r) \\ \theta' = 1 + f_2(t,\theta,r) = 1 + N_2(t,\theta,r) + P_2(t,\theta,r) \end{cases} \tag{6}$$

其中

$$N_1(t,\theta,r) = a^{-1} r^\tau c^\tau(\theta) s(\theta)，\quad P_1(t,\theta,r) = a^{-1}\left[fs(\theta) + es(\theta) \right]$$

$$N_2(t,\theta,r) = a^{-1} r^{-1+\tau} c^{\tau+1}(\theta)，\quad P_2(t,\theta,r) = a^{-1} r^{-\tau}\left[fc(\theta) + es(\theta) \right]$$

容易验证 $f_1(-t,-\theta,r) = -f_1(t,\theta,r)$，$f_2(-t,-\theta,r) = f_2(t,\theta,r)$，因此，系统(6)关于对合 $G:(r,\theta) \to (r,-\theta)$。是可逆的。

为了估计 $f_1(t,\theta,r), f_2(t,\theta,r)$，我们需要下面的引理。

引理 1 令 $f(t,\theta,r) = f(t,rc(\theta),rs(\theta)), e(\theta,r) = e(t,rc(\theta),rs(\theta))$，如果 $f(t,\theta,r)$ 和 $e(t,\theta,r)$ 满足(3)，那么有

$$\left| r^k \frac{\partial^{k+s} f(t,\theta,r)}{\partial r^k \partial t^s} \right| \le c \cdot r^\sigma, \left| r^k \frac{\partial^{k+s} e(t,\theta,r)}{\partial r^k \partial t^s} \right| \le c \cdot r^\sigma \tag{7}$$

对 $\forall \theta \in R,\ k+s \le 6$ 成立。

证明. 由直接计算，引理 1 可以直接验证，因此我们省去细节。

为了下面讨论方便起见，我们引入函数空间 $M_m(\Psi)$ 的概念。

定义 1. 令 $n=(n_1,n_2)\in N^2$。我们称 $f\in M_n(\Psi)$，如果对 $0<j\le n_1, 0<s\le n_2$，存在 $r_0>0$，$c>0$ 使得

$$r^j\left|D_r^j D_t^s f(t,\theta,r)\right|\le c\cdot\Psi(r),\ \forall r\ge r_o,\ \forall(t,\theta)\in S^1\times S^1。$$

由函数空间 $M_m(\Psi)$ 的定义，易得

$$f_1(t,\theta,r)\in M_{(5,5)}\left(r^\tau\right),\ f_2(t,\theta,r)\in M_{(5,5)}\left(r^{\tau-1}\right) \tag{8}$$

因此对于足够大的 r，我们有 $|f_2|\le r^\beta\ll1$。当 $r\gg1$，系统(6)等价于下面的系统：

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta}=f_1(t,\theta,r)\left(1+f_1(t,\theta,r)\right)^{-1}\\ \dfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\theta}=\left(1+f_2(t,\theta,r)\right)^{-1}\end{cases} \tag{9}$$

容易验证 $f_1(-t,-\theta,r)=-f_1(t,\theta,r)$，$f_2(-t,-\theta,r)=f_2(t,\theta,r)$。因此系统(9)关于对合 $G:(r.t)\to(r,-t)$ 是可逆的。我们将系统(9)写成下面的形式：

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta}=f_1(t,\theta,r)+h_1(t,\theta,r)=N_1(t,\theta,r)+\left(P_1(t,\theta,r)+h_1(t,\theta,r)\right)\\ \dfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\theta}=1-f_2(t,\theta,r)+h_2(t,\theta,r)=1-N_2(t,\theta,r)+\left(-P_2(t,\theta,r)+h_2(t,\theta,r)\right)\end{cases} \tag{10}$$

其中 $h_1(t,\theta,r)=-\dfrac{f_1f_2}{1+f_2}$，$h_2(t,\theta,r)=-\dfrac{f_2^2}{1+f_2}$ 并且有

$$h_1(-t,-\theta,r)=-h_1(t,\theta,r),h_2(-t,-\theta,r)=h_2(t,\theta,r)，$$

因此(10)关于对合 $G(r,t)\to(r,-t)$ 也是可逆的。由直接计算，易得

$$h_1(t,\theta,r)\in M_{(5,5)}\left(r^{2\tau-1}\right),\ h_2(t,\theta,r)\in M_{(5,5)}\left(r^{2\tau-2}\right) \tag{11}$$

现在系统(10)有如下形式

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}\theta}=N_1(t,\theta,r)+g_1(t,\theta,r)\\ \dfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\theta}=1-N_2(t,\theta,r)+g_2(t,\theta,r)\end{cases} \tag{12}$$

其中 $g_1(t,\theta,r)=P_1(t,\theta,r)+h_1(t,\theta,r)$，$g_2(t,\theta,r)=-P_2(t,\theta,r)+h_2(t,\theta,r)$。由(11)，易得

$$g_1(t,\theta,r)\in M_{(5,5)}\max\left\{r^\sigma,r^{2\tau-1}\right\},\ g_2(t,\theta,r)\in\max\left\{r^{\sigma-1},r^{2\tau-2}\right\} \tag{13}$$

下面，我们将对系统(12)进一步做变换。

引理 2. 存在变换 $t=t,\ \lambda=r+S(r,\theta)$，使得系统(12)变为

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}\theta}=\hat{g}_1(t,\theta,r)\\ \dfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\theta}=1-N_2(t,\theta,r)+\hat{g}_2(t,\theta,r)\end{cases} \tag{14}$$

其中 $\hat{g}_1(t,\theta,r)\in M_{(5,5)}\left(r^{\beta+1-\hat{\sigma}}\right)$，$\hat{g}_2(t,\theta,r)\in M_{(5,5)}\left(r^{\beta-\hat{\sigma}}\right)$。并且系统(14)关于对合 $G(\lambda,-t)\to(\lambda,t)$ 是可逆的。

证明. 令

$$S(r,\theta)=\int_0^\theta N_1(t,\theta,r)\mathrm{d}\theta=a^{-1}r^\tau\frac{r^{\tau+1}}{\tau+1}$$

那么有 $S(r,\theta)=S(r,\theta+2\pi_p)$，$S(r,-\theta)=S(r,\theta)$。容易验证 $S(r,\theta)\in M_{(5,5)}(r^{\beta+1})$。因此 $(r,\theta)\to(\lambda,t)$ 关于 $\lambda=r+S(r,\theta)$ 微分同胚。那么，存在函数 $L=L(\lambda,\theta)$ 使得 $r=\lambda+L(\lambda,\theta)$，其中 $L(\lambda,\theta+2\pi_p)=L(r,\theta)$，$L(\lambda,-\theta)=L(\lambda,\theta)$ 且 $L(r,\theta)\in M_{(5,5)}(\lambda^{\beta+1})$。

通过上面的变换，(12)变成(14)其中

$$\hat{g}_1(t,\theta,\lambda)=\hat{g}_1(t,\theta,\lambda+L),\ \hat{g}_2(t,\theta,\lambda)=N_2(t,\theta,\lambda)-N_2(t,\theta,\lambda+L)+g_2(t,\theta,\lambda+L),$$

由(13)以及直接计算，我们有

$$\hat{g}_1(t,\theta,r)\in M_{(5,5)}\max\{r^\sigma,r^{2\tau-1}\},\ \hat{g}_2(t,\theta,r)\in M_{(5,5)}\max\{r^{\sigma-1},r^{2\tau-2}\}。$$

既然 $L(\lambda,-\theta)=L(\lambda,\theta)$，系统(14)关于对合 $G:(\lambda,-t)\to(\lambda,t)$ 是可逆的。引理 2 证明完毕。

下面我们将对方程(14)中第二个式子进行变换，主要是把 $N_2(t,\theta,r)$ 中的平均项分离出来。

Lemma 3. 存在变换 $\lambda=\lambda,\ \ \tau=t+\hat{S}(\lambda,\theta)$ 使得系统(14)变为

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}\theta}=H_1(\lambda,\tau,\theta)\\[2mm]\dfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\theta}=1-[N_2]+H_2(\lambda,\tau,\theta)\end{cases}\tag{15}$$

其中 $[N_2]=\hat{\alpha}\lambda^{\tau-1}$，$\hat{\alpha}=\dfrac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\mathrm{a}^{-1}c^{\tau+1}\mathrm{d}\theta$，$H_1(\lambda,\tau,\theta),H_2(\lambda,\tau,\theta)$ 满足

$$\mathrm{H}_1\in M_{(5,5)}\max\{r^\sigma,r^{2\tau-1}\},\ H_2\in M_{(5,5)}\max\{r^{\sigma-1},r^{2\tau-2}\}\tag{16}$$

并且系统(15)关于对合 $G:(\lambda,\tau)\to(\lambda,-\tau)$ 是可逆的。

证明. 定理证明类似引理 2。

3.2. Poincare 映射与不变环面

令 $[N_2]=\varepsilon\rho$。当 $\lambda\to+\infty$ 时，$[N_2]=\hat{\alpha}\lambda^{\tau-1}$，故 $\lambda\to+\infty\Leftrightarrow\varepsilon\to0^+$。

定义变换 $\lambda=\varepsilon^{\frac{1}{\beta}},\ \ \tau=\tau$，那么系统(15)有如下形式

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}\theta}=g_1(\rho,\tau,\theta,\varepsilon)\\[2mm]\dfrac{\mathrm{d}\tau}{\mathrm{d}\theta}=1-\varepsilon\rho+g_2(\rho,\tau,\theta,\varepsilon)\end{cases}\tag{17}$$

其中

$$g_1(\rho,\tau,\theta,\varepsilon)=\varepsilon^{-1}\frac{\mathrm{d}[N_2]}{\mathrm{d}\lambda}H_1(\lambda(\varepsilon,\rho),\tau,\theta),g_2(\rho,\tau,\theta,\varepsilon)=H_2(\lambda(\varepsilon,\rho),\tau,\theta)$$

引理 4 扰动项 g_1，g_2 满足下面估计：

$$\left|\frac{\partial^{k+s}}{\partial\rho^k\partial\tau^s}g_1\right|\le c\cdot\varepsilon^{1+\sigma_0},\ \ \left|\frac{\partial^{k+s}}{\partial\rho^k\partial\tau^s}g_2\right|\le c\cdot\varepsilon^{1+\sigma_0},\tag{18}$$

其中 $\sigma_0=\max\left\{\dfrac{\sigma-\tau}{\tau-1},1\right\}>0$。

证明. 当 $k+s\geq 1$ 时，估计(18)易由(16)得出。引理 4 得证。

由**引理 2**、**3** 以及(18)，我有

$$g_1(\rho,-\tau,-\theta,\varepsilon)=-g_1(\rho,\tau,\theta,\varepsilon),\ g_2(\rho,-\tau,-\theta,\varepsilon)=g_2(\rho,\tau,\theta,\varepsilon)\text{。}$$

系统(17)关于对合 $G:(\rho,\tau)\to(\rho,-\tau)$ 是可逆的。令 P 为(17)的 Poincare 映射，则 P 关于 $G:(\rho,\tau)\to(\rho,-\tau)$ 也是可逆的并且有以下形式：

$$\begin{cases}\tau_1=\tau+2\pi_p-2\varepsilon\pi_p\rho+\hat{g}_1(\rho,\tau,\varepsilon)\\ \rho_2=\rho+\hat{g}_2(\rho,\tau,\varepsilon)\end{cases}\tag{19}$$

其中 $\tau\in S^1$， $\rho\in[1,2]$。$\hat{g}_1(\rho,\tau,\varepsilon),\hat{g}_2(\rho,\tau,\varepsilon)$ 满足

$$\left|\frac{\partial^{k+s}}{\partial\rho^k\partial\tau^s}g_1\right|,\ \left|\frac{\partial^{k+s}}{\partial\rho^k\partial\tau^s}g_2\right|\leq c\cdot\varepsilon^{1+\sigma_0}\tag{20}$$

至此，我们验证了映射(19)满足[6]中针对可逆映射的扭转定理的所有条件。这意味着当 ε 足够小，存在 Poincare 映射的不变环面，保证了系统(5)解的有界性，因此(2)的所有解都是有界的。这样定理 1 的证明完毕。

4. 致谢

本文由国家自然基金青年基金资助，基金号 11301263。

参考文献 (References)

[1] Kunze, M., Kupper, T. and Liu, B. (2001) Boundedness and unboundedness of solutions for reversible oscillatorsat resonance. *Nonlinearity*, **14**, 1105-1122.

[2] Morris, G.R. (1976) A case of boundedness of Littlewood’s problem on oscillatory differential equations. *Bulletin of the Australian Mathematical Society*, **14**, 71-93.

[3] Dieckerhoff, R. and Zehnder, E. (1987) Boundedness of solutions via the twist theorem. *Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa-Classe di Scienze*, **14**, 79-95.

[4] Levi, M. (1991) Quasiperiodic motions in superquadratic time-periodic potential. Communications in mathematical physics, **143**, 43-83.

[5] Liu, B. (2005) Quasiperiodic solutions of semilinear lienard reversible oscillators. *Discrete and Continuous Dynamical Systems*, **12**, 137-160.

[6] Liu, B. and Song, J. (2004) Invariant curves of reversible mappings with small twist. *Acta Mathematics Sinic*, *English Series*, **20**, 15-24.