Pure Mathematics 理论数学, 2014, 4, 161-166
Published Online September 2014 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
http://dx.doi.org/10.12677/pm.2014.45024

Hans汉斯

The Research of the Periodic Deviation Phenomenon on the Chain Hyperbolic Homoclinic Class

Sheng Qian*, Wantao Huang

College of Science, North China University of Technology (NCUT), Beijing
Email: *qiansheng@ncut.edu.cn, bjnuhwt@163.com

Received: Jul. 12th, 2014; revised: Aug. 7th, 2014; accepted: Aug. 15th, 2014

Abstract

The homoclinic class with chain hyperbolicity is a typical kind of partially hyperbolic system. It has gained more and more attention from researchers. This paper concerns the periodic measures with deviation in such homoclinic class. By the generalized metric entropy, we give the upper bound of the exponential growth rate of the deviated periodic measures.

Keywords

Periodic Measure with Deviation, Generalized Metric Entropy, Chain Hyperbolicity

链双曲同宿类上周期偏差现象的研究

钱　盛*，黄晚桃

北方工业大学理学院，北京
Email: *qiansheng@ncut.edu.cn, bjnuhwt@163.com

收稿日期：2014年7月12日；修回日期：2014年8月7日；录用日期：2014年8月15日

*通讯作者。

摘 要

具有链双曲性质的同宿类，它是部分双曲系统中最典型也是人们研究最多的一类。本文研究的是此类集合上具有偏差性质的周期轨道，我们将利用广义测度熵这个新概念来刻画偏差周期轨的指数增长率。

关键词

偏差周期测度，广义测度熵，链双曲

1. 引言

动力系统中的偏差研究，按其关注的对象，可以分为两类，其中一类关注的是系统中的周期轨。具体地说：假设 M 是一个紧致流形，$f:M\to M$ 是流形上的同胚映射，μ 是流形上关于 f 不变的概率测度，$\varphi:M\to R$ 是用来观测偏差的连续函数，δ 是一个小正数。如果 p 是一个周期点，其生成的周期测度 ω_p 满足：$\left|\int\varphi\mathrm{d}\mu-\int\varphi\mathrm{d}\omega_p\right|\geq\delta$ (或 $\left|\int\varphi\mathrm{d}\mu-\int\varphi\mathrm{d}\omega_p\right|>\delta$)，那么这样的 ω_p 就称为相对于 μ 而言的偏差不小于 δ (或大于 δ)的周期测度，或者被简称为**偏差测度**。偏差测度的个数，往往随周期变化呈指数增长的趋势，而怎样估计或控制这个指数增长率正是研究者们关注的焦点。1995 年，Pollicott[1]在一致双曲系统中利用测度熵控制了该指数增长率的上下界。其后，Gelfert、Wolf[2]将相关研究拓展至非一致扩张系统，钱盛和孙文祥[3]又将问题延伸至非一致双曲系统。在前述两个工作中，研究者们都是先考虑支撑在某个 Pesin 块 Λ_k 上的偏差测度，再令 k 趋于无穷。由于 $f|_{\Lambda_k}$ 是一致双曲的，所以这种算法从本质上说并没有突破一致双曲系统中相关算法的藩篱。

而本文考虑的系统则是具有链双曲性质的同宿类，它是部分双曲系统中最典型、最受人关注的一类。2013 年，杨云在[4]中研究了此类系统周期轨道的存在和分部规律。她证明了：在链双曲同宿类上，大指数的周期点具有某种**一致的**分离性，见**命题 1**。这个工具对于偏差问题的研究具有重要意义，它能帮助人们突破了前述研究方法的限制，直接估算整个系统中的偏差测度，无须先限制在某个 Pesin 块上再取极限，这也是本文有别于以往之处。在给出本文的主要结论之前，我们先介绍一些必要的概念和记号。

2. 链双曲同宿类和广义测度熵

在本文中，M 表示紧致黎曼流形，$f:M\to M$ 表示流形上的同胚映射。我们假设，系统中存在一个双曲周期点 p，它的同宿类记作 $H(p)$。其后我们再假设，$H(p)$ 的切空间上存在着这样的直和分解：$T_{H(p)}M=E^s\oplus E^c\oplus E^u$，其中 E^u 表示**一致扩张**方向，E^s 表示**一致压缩**方向，E^c 表示中心方向。为了说清什么是具有链双曲性质的同宿类，我们引入定义 1 到定义 3。

定义 1：假设 E 是某集合 Λ 的切丛中的一个截面，如果映射族 $\{W_x:E_x\to M\}_{x\in\Lambda}$ 满足如下性质：

(1) 每个 W_x 都是 C^1 嵌入映射；

(2) $W_x(0)=x$ 且 W_x 的像与 E_x 切于 x 点；

(3) 映射族 $\{W_x\}_{x\in\Lambda}$ 关于基点 x 连续。

那么我们就称映射族 $\{W_x\}_{x\in\Lambda}$ 是切于截面 E 的**圆盘映射族。**

定义 2: 如果存在 $\rho>0$，使得 Λ 中每点的截面 E_x 里都有一个中心在原点、半径为 ρ 的小圆盘 $B_x(0,\rho)$，满足：$f\circ W_x(B_x(0,\rho))\subseteq W_{f(x)}(B_{f(x)}(0,\rho))$，那么我们就称圆盘映射族 $\{W_x\}_{x\in\Lambda}$ 具有**局部不变性**。如果这个 $\{W_x\}_{x\in\Lambda}$ 还能做到：$f\circ W_x(B_x(0,\rho))\subseteq W_{f(x)}(\overline{B_{f(x)}(0,\rho)})$，那么我们就说 $\{W_x\}_{x\in\Lambda}$ 是**踏合的**。

定义 3：如果同宿类 $H(p)$ 满足：

(1) 切空间的直和分解$T_{H(p)}M = E^{cs} \oplus E^{cu}$为控制分解，即存在某个自然数$N$，使得对每个$x \in H(p)$都有：$2\left\| Df^N|_{E_x^{cs}} \right\| \le m\left(Df^N|_{E_x^{cu}} \right)$；

(2)存在切于E^{cs}的圆盘映射族$\{W_x^{cs}\}$和切于E^{cu}的圆盘映射族$\{W_x^{cu}\}$，并且$\{W_x^{cs}\}$关于f，$\{W_x^{cu}\}$关于f^{-1}都是踏合的；

(3) 存在一个双曲周期点q_s(或q_u)，它和p的轨道同宿相关，并且圆盘映射$W_{q_s}^{cs}$(或$W_{q_u}^{cu}$)的像包含于p的稳定流形(或不稳定流形)中。

那么我们就称$H(p)$是一个**链双曲的同宿类。**

定义 4： 如果对于切丛E中零截面的任意邻域U，我们都能找到

(1) 支撑在U上的一个关于基点连续的C^1微分同胚族$\{\varphi_x\}_{x\in\Lambda}$，$\varphi_x : E_x \to E_x$；

(2) 一个一致的常数$\rho > 0$，使得任取$x \in \Lambda$都有$f\left(\overline{W_x \circ \varphi_x(B(0,\rho))}\right) \subseteq W_{f(x)} \circ \varphi_{f(x)}(B(0,\rho))$，那么我们就称圆盘映射族$\{W_x\}_{x\in\Lambda}$是**轻微踏合**的。

借助于以上这些基本概念，我们可以这样描述本文所研究的系统：

(a) $H(p)$**是一个关于直和分解**$T_{H(p)}M = E^s \oplus E^c \oplus E^u$**满足链双曲性质的同宿类；**

(b) $\dim E^c = 1$；

(c) **切于**E_x^c**的圆盘族**$\{W_x^c\}_{x\in H(p)}$ **是轻微踏合的。**

我们再记$P_n^a(f) = \left\{ x \in H(p) : f^n(x) = x, |\lambda(x)| > a \right\}$其中，$\lambda(x)$表示周期点$x$的最接近 0 的那个 Lyapunov 指数的绝对值。在本文关注的系统中即具有链双曲性质的同宿类上，杨云证明了如下的结论。

命题 1： 给定$a \in (0,1)$，$P_n^a(f)$构成了一个(n, δ_a)分离集，其中刻画分离程度的常数δ_a只依赖a，与周期n无关。

在本文中出现的另外一个重要概念是广义测度熵，它的定义如下：

定义 5： 设$T : X \to X$是紧致度量空间X上的同胚映射。对于一个关于T不变的概率测度v，我们定义$\hat{h}_v(T) = \inf_{\psi \in C(X)} \left(P(\psi) - \int \psi \mathrm{d}v \right)$，其中$P(\psi)$表示函数$\psi$的拓扑压，而$\hat{h}_v(T)$则称为$v$的**广义测度熵。**

广义测度熵的这个概念是由 Gelfert 和 Wolf[2]引入的。容易验证：$h_v(T) \le \hat{h}_v(T) \le h(T)$。关于广义测度熵的更多性质，请读者参见文献[2] [3] [5]。在本文中，我们将利用这个量给出偏差测度的指数增长率的一个上界控制。

3. 主要结果

记$M_{inv}(H(p), f)$为支撑在$H(p)$上的且关于f不变的所有概率测度所组成的集合。

定理 A： 假设M是紧致流形，$f : M \to M$是C^1的微分同胚，$H(p)$是一个满足(a)(b)(c)三个条件的链双曲同宿类。那么任取$a \in (0,1)$，任取$M_{inv}(H(p), f)$中的闭子集U，都有以下的不等式成立：

$$\limsup_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \log \# \left\{ x \in P_n^a(f) \middle| \omega_x \in U \right\} \le \sup_{v \in U} \hat{h}_v(f)。$$

在定理 A 的前提条件下，如果把U取成这样的集合：$\left\{ v \in M_{inv}(H(p), f) \middle| \left| \int h \mathrm{d}v - \int h \mathrm{d}\mu \right| \ge \delta \right\}$，就可以得到如下的结论。

推论 B： 假设M是紧致流形，$f : M \to M$是C^1的微分同胚，$H(p)$是一个满足(a)(b)(c)三个条件的链双曲同宿类。那么任取$\delta > 0$，任取$H(p)$上的连续函数$h(x)$，任取不变测度$\mu \in M_{inv}(H(p), f)$，都有下面的不等式成立：

$$\limsup_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \log \# \left\{ x \in P_n^a(f) \middle| \left| \int h \mathrm{d}\omega_x - \int h \mathrm{d}\mu \right| \ge \delta \right\} \le \sup_{v : \left| \int h \mathrm{d}v - \int h \mathrm{d}\mu \right| \ge \delta} \hat{h}_v(f)$$

由于根据定理 A 可以直接得到推论 B，所以以下我们只要证明定理 A 即可。

4. 定理 A 的证明

在证明主定理之前，我们先证明下面的命题：

命题 2： 在本文所研究的系统中，假设 ψ 是 M 上的一个连续函数，记 $S_n\psi(x)=\sum_{i=0}^{n-1}\psi\left(f^i(x)\right)$。那么

$$\limsup_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\log\sum_{x\in P_n^a(f)}\exp S_n\psi(x)\le P(\psi)$$

证明：为证明这个结论，我们先简单回顾一下拓扑压的定义。假设 E 是 $H(p)$ 的一个 (n,δ)-分离集，那么我们可以定义：

$$P_n(\psi,\delta):=\sup\left\{\sum_{x\in E}\exp\left(S_n\psi(x)\right)\middle| E\text{是一个}(n,\delta)\text{-分离集}\right\} \tag{4.1}$$

$$P(\psi,\delta):=\limsup_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\log P_n(\psi,\delta) \tag{4.2}$$

$$P(\psi):=\sup_{\delta>0}P(\psi,\delta) \tag{4.3}$$

该定义可以在参考文献[6]中找到。根据命题 1，$P_n^a(f)$ 是一个 (n,δ_a) 分离集，分离程度 δ_a 与 n 无关。再结合(4.1)~(4.3)我们就能看出

$$\limsup_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\log\sum_{x\in P_n^a(f)}\exp\left(S_n\psi(x)\right)\le\limsup_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\log P_n(\psi,\delta_a)\le P_n(\psi,\delta_a)\le P(\psi).$$

证毕。

注： 如果 x 是 n 周期点，那么其生成的周期测度 $\omega_x=\frac{1}{n}\left(\delta_x+\delta_{fx}+\cdots+\delta_{f^{n-1}x}\right)$ 就会满足：对任意的函数 ψ，有 $\int\psi\,\mathrm{d}\omega_x=\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\int\psi\,\mathrm{d}\delta_{f^ix}=\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\psi\left(f^ix\right)=\frac{1}{n}S_n\psi(x)$ 成立。

定理 A 的证明。根据定义 5，$\hat{h}_\nu(f)=\inf_{\psi\in C(M)}\left(P(\psi)-\int\psi\,\mathrm{d}\nu\right)$，因此任取不变概率测度 ν 和小正数 ε，我们都能可以找到这样的连续函数 ψ_ν，它满足：

$$\hat{h}_\nu(f)+\varepsilon>P(\psi_\nu)-\int\psi_\nu\,\mathrm{d}\nu. \tag{4.4}$$

既然 ψ_ν 是连续的，那么它诱导的映射 $\mu\mapsto\int\psi_\nu\,\mathrm{d}\mu$ 也是连续的。从而对于每个不变测度 ν，我们都可以找到它的一个足够小的开邻域 U_ν，使得任取 $\tau\in U_\nu$，都有

$$\left|\int\psi_\nu\,\mathrm{d}\tau-\int\psi_\nu\,\mathrm{d}\nu\right|\le\varepsilon \tag{4.5}$$

如果把(4.4)和(4.5)综合起来看，就能得到：

$$\hat{h}_\nu(f)+\int\psi_\nu\,\mathrm{d}\tau-P(\psi_\nu)+2\varepsilon>0,\quad\forall\tau\in U_\nu. \tag{4.6}$$

如果我们对于每个 $\nu\in M_{inv}(M,f)$，都挑选这样一个连续函数 ψ_ν 和一个开邻域 U_ν，那么 $\{U_\nu\}_{\nu\in U}$ 势必会构成闭集 U 的一个开覆盖。根据开覆盖定理，我们一定能从其中挑选出有限的子覆盖，这个有限子覆盖记作 $U_1,U_2,\cdots,U_s$。而 U_i 各自对应的 $\nu_i\in U_i$ 及 $\psi_i\in C(M)$ 都满足：

$$\left|\int\psi_i\,\mathrm{d}\tau-\int\psi_i\,\mathrm{d}\nu_i\right|\le\varepsilon\text{ 且 }\hat{h}_{\nu_i}(f)+\int\psi_i\,\mathrm{d}\tau-P(\psi_i)+2\varepsilon>0$$

由此可知：

$$\exp\left(n\left(\hat{h}_{v_i}(f)+\int\psi_i \mathrm{d}\tau-P(\psi_i)+2\varepsilon\right)\right)>1,\ \forall n\in\mathrm{N}. \tag{4.7}$$

于是：

$$\begin{aligned}
&\#\left\{x\in P_n^a(f)\middle|\omega_x\in U\right\}\le\sum_{i=1}^{s}\sum_{x\in P_n^a(f),\omega_x\in U_i}1\\
&\le\sum_{i=1}^{s}\sum_{x\in P_n^a(f),\omega_x\in U_i}\exp\left(n\left(\int\psi_i\mathrm{d}\omega_x+\hat{h}_{v_i}(f)-P(\psi_i)+2\varepsilon\right)\right)\\
&=\sum_{i=1}^{s}\sum_{x\in P_n^a(f),\omega_x\in U_i}\exp\left(S_n(\psi_i)(x)\right)\exp\left(n\left(\hat{h}_{v_i}(f)-P(\psi_i)+2\varepsilon\right)\right)\\
&=\sum_{i=1}^{s}\sum_{x\in P_n^a(f),\omega_x\in U_i}\exp\left(S_n(\psi_i)(x)-nP(\psi_i)\right)\exp\left(n\left(\hat{h}_{v_i}(f)+2\varepsilon\right)\right).
\end{aligned}$$

对不等式两边取对数，乘以 $\frac{1}{n}$ 再对 n 取上极限，即得：

$$\begin{aligned}
&\limsup_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\log\#\left\{x\in P_n^a(f)\middle|\omega_x\in U\right\}\\
&\le\limsup_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\log\sum_{i=1}^{s}\sum_{x\in P_n(f),\omega_x\in U_i}\exp\left(S_n(\psi_i)(x)-nP(\psi_i)\right)+\sup_{v\in U}\left(\hat{h}_v(f)\right)+2\varepsilon.
\end{aligned} \tag{4.8}$$

这个时候再利用命题 2，因为 ψ_i 连续，所以

$$\limsup_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\log\sum_{x\in P_n^a(f)}\exp\left(S_n(\psi_i)(x)\right)\le P(\psi_i)$$

上式可以自然推出：

$$\limsup_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\log\sum_{x\in P_n(f),\omega_x\in U_i}\exp\left(S_n(\psi_i)(x)-nP(\psi_i)\right)\le 0,\ \forall 1\le i\le s,$$

从而有：

$$\limsup_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\log\sum_{i=1}^{s}\sum_{x\in P_n(f),\omega_x\in U_i}\exp\left(S_n(\psi_i)(x)-nP(\psi_i)\right)\le 0. \tag{4.9}$$

把(4.9)式代入(4.8)就可以得到：

$$\limsup_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\log\#\left\{x\in P_n^a(f)\middle|\omega_x\in U\right\}\le\sup_{v\in U}\hat{h}_v(f)+2\varepsilon.$$

鉴于 ε 是任取的，我们可以让 $\varepsilon\to 0$，这样一来，就可以得到：

$$\limsup_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\log\#\left\{x\in P_n^a(f)\middle|\omega_x\in U\right\}\le\sup_{v\in U}\hat{h}_v(f).$$

证毕。

基金项目

国家自然科学基金天元基金(批准号：11226155)资助项目。

参考文献 (References)

[1] Pollicott, M. (1995) Large deviations, Gibbs measures and closed orbits for hyperbolic flows. *Mathematische Zeit-*

schrift, **220**, 219-230.

[2] Gelfert, K. and Wolf, C. (2009) On the distribution of periodic orbits. Preprint.

[3] Qian, S., Sun, W.X. and Tian, X.T. (2012) Deviation property of periodic measures in C1 non-uniformly hyperbolic systems with limit domination. *Acta Mathematica Sinica*, *English Series*, **28**, 1727-1740.

[4] Yang, Y. (2013) Specification property for chain hyperbolic system. Preprint.

[5] 钱盛, 孙文祥 (2011) 某一类控制系统中发生的指数偏差现象. *中国科学 A 版*, **1**, 33-42.

[6] Walters, P. (1981) An introduction to ergodic theory. Springer-Verlag, Berlin.