Pure Mathematics 理论数学, 2017, 7(5), 396-400
Published Online September 2017 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2017.75051

Hans汉斯

Univalent Harmonic Mapping from Unit Disk onto Two-Slit Domains

Min Zhou[1*], Lina Guan[2]

[1]College of Mathematics and Data Science, Huizhou University, Huizhou Guangdong
[2]School of Mathematics and Statistics, Shenzhen University, Shenzhen Guangdong
Email: *zhoumin0001@163.com

Received: Aug. 26th, 2017; accepted: Sep. 10th, 2017; published: Sep. 14th, 2017

Abstract

Let $b>0$ and $\Omega(-b,b)=\mathbb{C}-(-\infty,-b]\cup[b,+\infty)$. Let $S_H(U,\Omega(-b,b))$ be the class of sense-preserving univalent harmonic and odd mappings f which map the unit disk U onto $\Omega(-b,b)$ with normalization $f(0)=0,\ f_z(0)>0,\ f_{\bar{z}}(0)=0$ and $f(U)=\Omega(-b,b)$. We obtain the distortion theorem and area theorem of $f\in S_H(U,\Omega(-b,b))$.

Keywords

Univalent Harmonic Mapping, Two-Slit Domain, Distortion Theorem, Area Theorem

单位圆到双狭缝区域间的调和映射

周　敏[1]，关丽娜[2]

[1]惠州学院数学与大数据学院，广东　惠州
[2]深圳大学数学与统计学院，广东　深圳
Email: *zhoumin0001@163.com

收稿日期：2017年8月26日；录用日期：2017年9月10日；发布日期：2017年9月14日

摘　要

设$b>0$，$\Omega(-b,b)=\mathbb{C}-(-\infty,-b]\cup[b,+\infty)$。且设$S_H(U,\Omega(-b,b))$为单位圆$U$到$\Omega(-b,b)$上的所有满足

*通讯作者。

文章引用: 周敏, 关丽娜. 单位圆到双狭缝区域间的调和映射[J]. 理论数学, 2017, 7(5): 396-400.
DOI: 10.12677/pm.2017.75051

标准化条件 $f(0)=0, f_z(0)>0, f_{\bar{z}}(0)=0$，且 $f(U)=\Omega(-b,b)$ 的所有保向同胚的调和奇映射所构成的函数族。我们给出了 $f\in S_H(U,\Omega(-b,b))$ 的长度扭伸定理和面积定理。

关键词

单叶调和映射，双狭缝区域，长度扭伸定理，面积定理

1. 引言

设 $U=\{z:|z|<1\}$ 为复平面 $\mathbb{C}$ 内的单位圆盘。一个定义在 U 上的二次可微函数 $f(z)$ 如果满足 $\Delta f=0$，则称 $f(z)$ 为 U 上的一个调和映射。设 $b>0$，$\Omega(-b,b)=\mathbb{C}-(-\infty,-b]\cup[b,+\infty)$。且设集合 S_H 为 U 到 $\Omega(-b,b)$ 上的所有满足 $f(0)=0, f_z(0)>0$ 的保向同胚的调和映射。由于 U 是单连通区域，因此对于所有的 $f\in S_H$，有 $f(z)=h(z)+\overline{g(z)}$，其中 h,g 为 U 内的解析映射。根据 Lewy [1]的一个结果，$f\in S_H$ 是保向局部一一映射当且仅当 $|h'|>|g'|$。若 $h(z)=a_1z+a_2z^2+\cdots$，且 $g(z)=b_1z+b_2z^2+\cdots, z\in U$，则有 $|b_1|<a_1$ 且 $a_1f-\overline{b_1f}\in S_H$。因此，以下讨论中我们只考虑 S_H 的子集 $S_H^0=\{f:f\in S_H, f_{\bar{z}}(0)=0\}$ 即可。另外，若设 f,g 分别为调和映射和共形映射，则易有 $\Delta(f\circ g)=|g'|^2\cdot\Delta f$，这说明了一个共形映射左复合一个调和映射的结果依旧是一个调和映射；但是由于 $\Delta(g\circ f)=g''\cdot f_z\cdot f_{\bar{z}}$，所以一个共形映射右复合一个调和映射的结果却不一定依旧仍是一个调和映射。因此，许多作者研究了这些单位圆到具体的单连通区域的保向同胚的调和映射。关于这类研究，读者可参考文献[2]-[7]。尤其，在[2]中，利文斯顿考虑了单位圆到双狭缝区域之间的调和映射。特别地，他还考虑了单位圆到 $\Omega(-b,b)$ 的满足 $f(0)=0, f_z(0)>0, f_{\bar{z}}(0)=0$，且 $f(U)=\Omega(-b,b)$ 所有保向同胚的调和映射。我们不妨将这些从单位圆到 $\Omega(-b,b)$ 上的满足 $f(0)=0, f_z(0)>0, f_{\bar{z}}(0)=0$，且 $f(U)=\Omega(-b,b)$ 的所有保向同胚的调和奇映射所构成的函数族记做 $S_H(U,\Omega(-b,b))$。以下的定理 A 和定理 B 是由利文斯顿[2]所得到的：

定理 A 设 $f=h+\bar{g}\in S_H(U,\Omega(-b,b))$。则对于所有的 $|z|=r<1$，有

$$\frac{|a_1|(1-r^2)}{(1+r^2)^3}\le|f_z(z)|\le\frac{|a_1|(1+r^2)}{(1-r^2)^3}$$

定理 B 设 $f=h+\bar{g}\in S_H(U,\Omega(-b,b))$，若 $h(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_{2n+1}z^{2n+1}$，$g(z)=\sum_{n=1}^{\infty}b_{2n+1}z^{2n+1}$，则有

$$\begin{cases}|a_{2n+1}|\le\dfrac{(n+1)^2}{2n+1}|a_1|,\\ |b_{2n+1}|\le\dfrac{n^2}{2n+1}|a_1|,\\ |a_{2n+1}-b_{2n+1}|\le|a_1|.\end{cases}$$

2. 主要结果

在调和映射理论中，长度扭伸定理和面积扭伸定理是在几何函数论中经常考虑到的问题！因此，我们接下来考虑 $f \in S_H\left(U, \Omega(-b, b)\right)$ 的长度扭伸定理和面积估计定理。为了得到长度扭伸公式，我们需要考虑下面的一个引理。它可以由定理 A 中的方法直接计算获得(见文献[2])。经过计算，我们可以得到以下的一个引理：

引理 **1** 设 $f = h + \overline{g} \in S_H\left(U, \Omega(-b, b)\right)$，则有

$$\begin{cases} \left|f_z(z)\right| \le \dfrac{|a_1|\left(1+|z|^2\right)}{\left(1-|z|^2\right)^3}, \\ \left|f_{\overline{z}}(z)\right| \le \dfrac{|a_1||z|^2\left(1+|z|^2\right)}{\left(1-|z|^2\right)^3}, \end{cases} z \in U.$$

有了引理 1，我们接下来先给出 $f \in S_H\left(U, \Omega(-b, b)\right)$ 的长度扭伸定理：

定理 **1** 设 $f = h + \overline{g} \in S_H\left(U, \Omega(-b, b)\right)$，则有

$$\left|f(z)\right| \le \frac{1}{4}\ln\frac{1+|z|}{1-|z|} + \frac{|z|\left(1+|z|^2\right)}{2\left(1-|z|^2\right)^2}, z \in U.$$

证明 根据引理 1，对于所有的 $z \in U$，可得

$$\left|f_z(z)\right| + \left|f_{\overline{z}}(z)\right| \le \frac{|a_1|\left(1+|z|^2\right)}{\left(1-|z|^2\right)^3} + \frac{|a_1||z|^2\left(1+|z|^2\right)}{\left(1-|z|^2\right)^3} = \frac{|a_1|\left(1+|z|^2\right)^2}{\left(1-|z|^2\right)^3}.$$

故 $\left|f(z) - f(0)\right| = \left|\int_0^z f_z(z) + f_{\overline{z}}(z)\mathrm{d}z\right|$

$$\le \int_0^{|z|} \left|f_z(z)\right| + \left|f_{\overline{z}}(z)\right| |\mathrm{d}z|$$

$$= \int_0^{|z|} \frac{|a_1|\left(1+|z|^2\right)^2}{\left(1-|z|^2\right)^3} |\mathrm{d}z|$$

$$= \frac{1}{4}\ln\frac{1+|z|}{1-|z|} + \frac{|z|\left(1+|z|^2\right)}{2\left(1-|z|^2\right)^2}.$$

证毕。

接下来我们利用定理 B 给出面积定理。我们有：

定理 **2** 设 $f = h + \overline{g} \in S_H\left(U, \Omega(-b, b)\right)$，令 $U_r = \left\{z : |z| \le r\right\}$，记 $f(U_r)$ 的面积为 A_r，则有

$$A_r \le \frac{\pi|a_1|^2 r^2\left(1+r^4\right)^2}{\left(1-r^4\right)^3}.$$

证明 设 $h(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{2n+1} z^{2n+1}$，$g(z) = \sum_{n=1}^{\infty} b_{2n+1} z^{2n+1}$，则根据定理 B，有

$$\begin{cases} \left|a_{2n+1}\right| \le \dfrac{(n+1)^2}{2n+1}\left|a_1\right|, \\ \left|b_{2n+1}\right| \le \dfrac{n^2}{2n+1}\left|a_1\right|, \\ \left|a_{2n+1}-b_{2n+1}\right| \le \left|a_1\right|. \end{cases}$$

所以

$$\begin{cases} \left|a_{2n+1}\right| + \left|b_{2n+1}\right| \le \dfrac{2n^2+2n+1}{2n+1}\left|a_1\right|, \\ \left|a_{2n+1}\right| - \left|b_{2n+1}\right| \le \left|a_1\right|. \end{cases}$$

即

$$\left|a_{2n+1}\right|^2 - \left|b_{2n+1}\right|^2 \le \frac{2n^2+2n+1}{2n+1}\cdot\left|a_1\right|^2.$$

由于

$$\iint_{U_r}\left|h'(z)\right|^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \pi\left[\left|a_1\right|^2 r^2 + 3\left|a_3\right|^2 r^6 + \cdots + (2n+1)\left|a_{2n+1}\right|^2 r^{4n+2} + \cdots\right]$$

和

$$\iint_{U_r}\left|g'(z)\right|^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \pi\left[\left|b_1\right|^2 r^2 + 3\left|b_3\right|^2 r^6 + \cdots + (2n+1)\left|b_{2n+1}\right|^2 r^{4n+2} + \cdots\right],$$

所以

$$\begin{aligned} A_r &= \iint_{U_r}\left(\left|f_z(z)\right|^2 - \left|f_{\bar{z}}(z)\right|^2\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_{U_r}\left(\left|h'(z)\right|^2 - \left|g'(z)\right|^2\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ &= \pi\sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)\left(\left|a_{2n+1}\right|^2 - \left|b_{2n+1}\right|^2\right) r^{4n+2} \\ &\le \pi\left|a_1\right|^2 \sum_{n=0}^{\infty}\left(2n^2+2n+1\right) r^{4n+2} \\ &= \frac{\pi\left|a_1\right|^2 r^2\left(1+r^4\right)^2}{\left(1-r^4\right)^3}. \end{aligned}$$

证毕。

参考文献 (References)

[1] Lewy, H. (1997) On the Non-Vanishing of the Jacobian in Certain One-to-One Mappings. *Bulletin of the American Mathematical Society*, **42**, 689-692. https://doi.org/10.1090/S0002-9904-1936-06397-4

[2] Livingston, A.E. (1997) Univalent Harmonic Mapping II. *Annales Polonici Mathematici*, **67**, 131-145.

[3] Ganczar, A. and Widomski, J. (2010) Univalent Harmonic Mappings into Two-Slit Domains. *Journal of the Australian Mathematical Society*, **88**, 61-73. https://doi.org/10.1017/S1446788709000391

[4] Livingston, A.E. (1992) Univalent Harmonic Mappings. *Annales Polonici Mathematici*, **57**, 57-70.

[5] Öztürk, M. (1999) Univalent Harmonic Mappings onto Half Planes, *Turkish Journal of Mathematics*, **23**, 301-313.

[6] Hengartner, W. and Schober, G. (1987) Univalent Harmonic Functions. *Transactions of the American Mathematical Society*, **299**, 1-31. https://doi.org/10.1090/S0002-9947-1987-0869396-9

[7] Abu-Muhanna, Y. and Schober, G. (1987) Harmonic Mappings onto Convex Domains. *Canadian Journal Of Mathematics*, **39**, 1489-1530. https://doi.org/10.4153/CJM-1987-071-4