Pure Mathematics 理论数学, 2017, 7(6), 464-470
Published Online November 2017 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2017.76061

Automorphisms of the $E_8 \oplus E_8 \oplus E_8 \oplus E_8$ Manifold with Period 3

Yulai Wu

College of Information Science & Technology, Hainan University, Haikou Hainan
Email: gengdt@163.com, wuyl@hainu.edu.cn

Received: Oct. 27th, 2017; accepted: Nov. 11th, 2017; published: Nov. 17th, 2017

Abstract

In this essay, we concentrate on the automorphisms on the $E_8 \oplus E_8 \oplus E_8 \oplus E_8$ 4-manifold with period 3. Using G-signature theorem, we investigate possible integral representations of fixed point set with two-dimensional components under such automorphisms. We eliminate some representations that cannot be realized, and study some examples of the homologically trivial and others cases about the possible datum of fixed point sets.

Keywords

4-Manifold, Automorphism, Integral Representation, Fixed Point

$E_8 \oplus E_8 \oplus E_8 \oplus E_8$流形上周期为3的自同构

吴语来

海南大学，海南 海口
Email: gengdt@163.com, wuyl@hainu.edu.cn

收稿日期：2017年10月27日；录用日期：2017年11月11日；发布日期：2017年11月17日

摘　要

本文对相交形式为$E_8 \oplus E_8 \oplus E_8 \oplus E_8$的四维流形上的周期为3的自同构进行研究，利用G-符号差定理，考察其上周期为3的自同构作用含二维不动分支的情形，给出不可实现为局部线性作用的整表示，并给出同调平凡以及其他整表示的不动点类型的例子。

文章引用：吴语来. $E_8 \oplus E_8 \oplus E_8 \oplus E_8$流形上周期为 3 的自同构[J]. 理论数学, 2017, 7(6): 464-470.
DOI: 10.12677/pm.2017.76061

关键词

四维流形，自同构，群表示，不动点

1. 引言

E_8 格点是李代数和拓扑一个非常特殊和神秘的例子。Edmonds [1]给出了 E_8 四维流形上自同构的(伪自由)实现的情形。Garibaldi [2]综述了从 Lie 代数和代数群的领域关于 E_8 的许多已知发现和最近的结果。本文从相交形式为 $E_8 \oplus E_8 \oplus E_8 \oplus E_8$ 的四维流形出发，讨论其上周期为 3 的素自同构的整表示，并利用 G-符号差定理，考虑不动点集含二维不动分支的情形，对整表示分类，给出不可实现为局部线性作用的整表示，并给出同调平凡的以及其他整表示不动点类型的例子。

2. $M^4\left(E_8 \oplus E_8 \oplus E_8 \oplus E_8\right)$上素自同构的表示

2.1. 整表示的直和分解

定理 2.1：(Curtis and Reiner [3])设 M 为紧致定向闭单连通拓扑流形，G 为 p 阶循环群。G 在 M 上的作用 $\rho: G \to \mathrm{Aut}\left(H^2(M), \cup\right)$ 对应 $H^2(M)$ 上的整 Z_p-表示，且可以直和分解为三个不可分表示块：

1) 平凡部分(1 维)：Z，G 作用平凡；

2) 割圆部分($p-1$ 维)：$Z\left[\mu_p\right]$，G 在 $Z\left[\mu_p\right]$ 任意非零理想 J 上的作用为 μ_p 的乘法；

3) 正则部分(p 维)：$Z\left[Z_p\right]$，G 作用为对基向量的置换，即 $Z\left[\mu_p\right]$ 中非零理想 J 的原像，$Z[G]$ 的 $\tilde{J}$ 上作用为 $Z[G] \to Z\left[\mu_p\right]$ 自然映射 $g \to \mu_p$。

这里 $\mu_p \equiv \exp(2\pi i/p)$ 为 p 重单位根。

定理 2.1 源于 Curtis 和 Reiner 的论述(见[3] 729 页)。特别地，当 $p=2$ 时，有一个漂亮的初等证明。如果定理 2.1 中 2)和 3)的理想 J 正好是主理想，那么对应的不可分解的表示是标准的，即等价于对 $Z\left[\mu_p\right]$ 或 $Z[G]$ 是一个 $Z[G]$-模。必须含有一个非主理想的 J 的不可分表示则是伪的。Reiner 的工作指出，G 的一个整表示可以如定理 2.1 中直和分解，且至多有一个伪的直和部分。注意到，由 G-模恒等式 $J_1 \oplus J_2 \approx J_1 J_2 \oplus Z\left[\mu_p\right]$ 以及含有扭扩张的类似等式可知这样的分解并不是唯一的。在这种情形下，理想 J 其实决定了 $Z\left[\mu_p\right]$ 理想类群中表示的理想类不变量。事实上，理想类不变量可以由所有出现的理想 J 的乘积给出。Swan [4]指出，紧致多面体上分段线性作用不可能出现非平凡的理想类不变量(亦可参见 Weintraub [5])。值得注意的是，Ruberman 和 Weinberger 发现了如何构造四维流形上有伪理想类的拓扑作用的例子。于是自然的有一个问题：四维流形上局部线性作用可不可能出现伪理想类；可不可以精确描述出在四维流形上的一个一般拓扑作用可能出现的理想类。已经知道，当 $p<23$ 时，理想类群 $Z\left[\mu_p\right]$ 消失，没有伪类出现。当第二 Betti 数 $b_2(M)<22$ 时，也没有伪类出现。以及当系数群取有理数时，也没有伪类存在。事实上，$J \otimes Q \approx Q\left[\mu_p\right]$，$\tilde{J} \otimes Q \approx Q[G]$。特别的，由 $Q\left[Z_p\right] \approx Q\left[\mu_p\right] \oplus Q$，有理系数表示可以表述成若干个 Q 与 $Q\left[\mu_p\right]$ 的和。

简言之，G 在 M 上的作用对应的二阶上同调整表示可以直和分解为：

$$H^2(M)=Z\left[Z_p\right]^r\oplus Z\left[\mu_p\right]^c\oplus Z^t\quad (r,c,t\text{ 为非负整数})。$$

2.2. $M^4(E_8\oplus E_8\oplus E_8\oplus E_8)$上周期为 3 的整表示

定理 2.2：当 $p=3$ 时，$M^4(E_8\oplus E_8\oplus E_8\oplus E_8)$上所有可能的素自同构的表示为：

$Z[Z_3]\oplus Z^{29}$，$Z[Z_3]^2\oplus Z^{26}$，$Z[Z_3]^3\oplus Z^{23}$，$Z[Z_3]^4\oplus Z^{20}$，$Z[Z_3]^5\oplus Z^{17}$，$Z[Z_3]^6\oplus Z^{14}$，$Z[Z_3]^7\oplus Z^{11}$，$Z[Z_3]^8\oplus Z^8$；$Z[\mu_3]^2\oplus Z^{28}$，$Z[Z_3]\oplus Z[\mu_3]^2\oplus Z^{25}$，$Z[Z_3]^2\oplus Z[\mu_3]^2\oplus Z^{22}$，$Z[Z_3]^3\oplus Z[\mu_3]^2\oplus Z^{19}$，$Z[Z_3]^4\oplus Z[\mu_3]^2\oplus Z^{16}$，$Z[Z_3]^5\oplus Z[\mu_3]^2\oplus Z^{13}$，$Z[Z_3]^6\oplus Z[\mu_3]^2\oplus Z^{10}$，$Z[Z_3]^7\oplus Z[\mu_3]^2\oplus Z^7$，$Z[Z_3]^8\oplus Z[\mu_3]^2\oplus Z^4$；$Z[\mu_3]^4\oplus Z^{24}$，$Z[Z_3]\oplus Z[\mu_3]^4\oplus Z^{21}$，$Z[Z_3]^2\oplus Z[\mu_3]^4\oplus Z^{18}$，$Z[Z_3]^3\oplus Z[\mu_3]^4\oplus Z^{15}$，$Z[Z_3]^4\oplus Z[\mu_3]^4\oplus Z^{12}$，$Z[Z_3]^5\oplus Z[\mu_3]^4\oplus Z^9$，$Z[Z_3]^6\oplus Z[\mu_3]^4\oplus Z^6$，$Z[Z_3]^7\oplus Z[\mu_3]^4\oplus Z^3$，$Z[Z_3]^8\oplus Z[\mu_3]^4$；$Z[\mu_3]^6\oplus Z^{20}$，$Z[Z_3]\oplus Z[\mu_3]^6\oplus Z^{17}$，$Z[Z_3]^2\oplus Z[\mu_3]^6\oplus Z^{14}$，$Z[Z_3]^3\oplus Z[\mu_3]^6\oplus Z^{11}$，$Z[Z_3]^4\oplus Z[\mu_3]^6\oplus Z^8$，$Z[Z_3]^5\oplus Z[\mu_3]^6\oplus Z^5$，$Z[Z_3]^6\oplus Z[\mu_3]^6\oplus Z^2$；$Z[\mu_3]^8\oplus Z^{16}$，$Z[Z_3]\oplus Z[\mu_3]^8\oplus Z^{13}$，$Z[Z_3]^2\oplus Z[\mu_3]^8\oplus Z^{10}$，$Z[Z_3]^3\oplus Z[\mu_3]^8\oplus Z^7$，$Z[Z_3]^4\oplus Z[\mu_3]^8\oplus Z^4$，$Z[Z_3]^5\oplus Z[\mu_3]^8\oplus Z$；$Z[\mu_3]^{10}\oplus Z^{12}$，$Z[Z_3]\oplus Z[\mu_3]^{10}\oplus Z^9$，$Z[Z_3]^2\oplus Z[\mu_3]^{10}\oplus Z^6$，$Z[Z_3]^3\oplus Z[\mu_3]^{10}\oplus Z^3$，$Z[Z_3]^4\oplus Z[\mu_3]^{10}$；$Z[\mu_3]^{12}\oplus Z^8$，$Z[Z_3]\oplus Z[\mu_3]^{12}\oplus Z^5$，$Z[Z_3]^2\oplus Z[\mu_3]^{12}\oplus Z^2$；$Z[\mu_3]^{14}\oplus Z^4$，$Z[Z_3]\oplus Z[\mu_3]^{14}\oplus Z$；$Z[\mu_3]^{16}$。

证明：由整表示的直和分解，设 $H^2(E_8\oplus E_8\oplus E_8\oplus E_8)=Z[Z_3]^r\oplus Z[\mu_3]^c\oplus Z^t$，有 $3r+2c+t=32$。又由 E_8 不可分，排除 $Z[Z_3]^9\oplus Z^5$，$Z[Z_3]^{10}\oplus Z^2$，$Z[Z_3]^9\oplus Z[\mu_3]^2\oplus Z$ 的情形即证。

2.3. 伪自由情形

定理 2.3：(Edmonds 和 Ewing) [6]令 Φ 为 $Z[Z_3]$-模 $V=Z\left[Z_p\right]^r\oplus Z^t$ 上 Z_3-不变的正定对称幺模双线性型，则当且仅当 $t\le 1$ 时 Φ 可以实现为一个其上有局部线性的伪自由 Z_3 作用的单连通的闭四维流形的相交形式。

由定理 2.2，观察 $E_8\oplus E_8\oplus E_8\oplus E_8$ 的素自同构，整表示为 $Z[Z_3]^r\oplus Z^t$ 型的情形皆不满足上述定理的条件。由此，$E_8\oplus E_8\oplus E_8\oplus E_8$ 上 $Z[Z_3]^r\oplus Z^t$ 型的整表示不可以由局部线性伪自由的周期为 $p=3$ 的同构实现。以下重点考虑不动点集 M^G 含二维不动分支的整表示的情形。

3. 不动点集含二维不动分支的情形

3.1. 主要工具

Edmonds [1]描述了不动点集 M^G 的结构与 Z_p 作用诱导的二阶上同调上的表示之间的关系。特别的，对于 2.1 节中阐述的直和分解 $H^2(M)=Z\left[Z_p\right]^r\oplus Z\left[\mu_p\right]^c\oplus Z^t$，有以下式子成立：

1) $\beta_1\left(M^G\right)=c$；
2) $\beta_0\left(M^G\right)+\beta_2\left(M^G\right)=t+2$；
3) $\chi\left(M^G\right)=t-c+2$；
4) 若 $c=0$，则 M^G 中所有的 2-维分支皆为 2-球面；
5) 若 M^G 不是纯 2-维的，那么 M^G 中的 2-维分支代表 $H^2\left(M;Z_p\right)$ 上的无关元。若 M^G 是纯 2-维的，

且有 k 个 2-维分支，则 2-维分支可以张成 $H^2(M;Z_p)$ 一个维数不低于 $k-1$ 的子空间，其中任意 $k-1$ 个分支都代表无关元。

由上 5)可知，本节考虑的情形中，不动点集中的所有的 2-维分支都代表非零的同调类，使得它们都有偶的非负的标准欧拉类。

主要工具有 G-符号差公式和 Lefchetz 不动点定理。

G-符号差公式[1]

$$\begin{aligned}\operatorname{sign}(T,(V,\Phi)) &= \operatorname{trace}\left[T_*: H_2(M) \to H_2(M)\right] \\ &= \sum_i \frac{(\mu^{a_i}+1)(\mu^{b_i}+1)}{(\mu^{a_i}-1)(\mu^{b_i}-1)} - \sum_j \frac{4\eta_i \mu^{e_j}}{(\mu^{e_j}-1)^2}\end{aligned}$$

三角形式为：

$$\operatorname{sign}(T,(V,\Phi)) = \sum_i -\cot\left(\frac{a_i\pi}{p}\right)\cot\left(\frac{b_i\pi}{p}\right) + \sum_Y \csc^2\left(\frac{c_Y\pi}{p}\right)(Y\cdot Y)$$

一个较弱版本的 G-符号差公式[7]

$$|G|\cdot\operatorname{sign}(M/G) = \operatorname{sign}(M) + \sum_{m\in M^G}\operatorname{def}_m + \sum_{Y\in M^G}\operatorname{def}_Y$$

这里，符号差的亏值 def_m 和 def_Y 为：

$$\operatorname{def}_m = \sum_i \frac{(1+\mu_p^{a_i})(1+\mu_p^{b_i})}{(1-\mu_p^{a_i})(1-\mu_p^{b_i})},\ \operatorname{def}_Y = \frac{p^2-1}{3}(Y\cdot Y)$$

其中，(a_i,b_i) 为 m 处的不动点类型，$(Y\cdot Y)$ 为二维不动分支 Y 的自相交数。

定理 3.1：(Lefschetz 不动点定理[8])若 $T: M\to M$ 生成一个 Z_p 在单连通的闭四维流形 M 上的群作用，有 $L(T;M)=\chi(M^G)$，这里 $\chi(M^G)$ 为不动点集 M^G 的 Eule 示性数，$L(T;M)$ 为映射 T 的 Lefschetz 数：

$$L(T;M) = \sum_0^4 (-1)^k \operatorname{tr}(\mathrm{g})\Big|_{H^k(M;Z)}$$

3.2. 不可实现为局部线性作用的整表示

以下我们对相交形式为 $E_8\oplus E_8\oplus E_8\oplus E_8$ 的四维流形上周期为 3 的自同构作用的整表示类型进行讨论。

定理 3.2：$M^4(E_8\oplus E_8\oplus E_8\oplus E_8)$ 上没有周期为 3 的自同构，整表示为

$Z[Z_3]^7\oplus Z[\mu_3]^4\oplus Z^3$，$Z[Z_3]^8\oplus Z[\mu_3]^4$，$Z[Z_3]^4\oplus Z[\mu_3]^6\oplus Z^8$，$Z[Z_3]^5\oplus Z[\mu_3]^6\oplus Z^5$，

$Z[Z_3]^6\oplus Z[\mu_3]^6\oplus Z^2$，$Z[Z_3]^3\oplus Z[\mu_3]^8\oplus Z^7$，$Z[Z_3]^4\oplus Z[\mu_3]^8\oplus Z^4$，$Z[Z_3]^5\oplus Z[\mu_3]^8\oplus Z$，

$Z[Z_3]\oplus Z[\mu_3]^{10}\oplus Z^9$，$Z[Z_3]^2\oplus Z[\mu_3]^{10}\oplus Z^6$，$Z[Z_3]^3\oplus Z[\mu_3]^{10}\oplus Z^3$，$Z[\mu_3]^{12}\oplus Z^8$，

$Z[Z_3]\oplus Z[\mu_3]^{12}\oplus Z^5$，$Z[Z_3]^2\oplus Z[\mu_3]^{12}\oplus Z^2$，$Z[\mu_3]^{14}\oplus Z^4$，$Z[Z_3]\oplus Z[\mu_3]^{14}\oplus Z$。

证明：$p=3$，选择适当的生成元，记符号差为 σ，χ 为欧拉数。设(1,1)型的不动点有 x 个，每个贡献亏值为−1/3; (1,2)型的不动点有 y 个，每个贡献亏值为 1/3; 2 维不动分支的欧拉数总和为 e，个数为 k。

由 G-符号差公式和 Lefschetz 不动点定理，有

$$\begin{cases}\sigma=-\frac{1}{3}x+\frac{1}{3}y+\frac{4}{3}e\\ \chi=x+y+2k\end{cases}$$

σ,χ 在每组整表示中对应的情形不同，则可能的不动点集的情形也不同，以 σ,χ 为变量，得到导出组的基础解系为 $(-1,-1,0,1)^{\mathrm{T}},(2-2,1,0)^{\mathrm{T}}$，特解为

$$\left(-2\sigma+\frac{\chi}{2},2\sigma+\frac{\chi}{2},0,0\right)^{\mathrm{T}}$$

在通解为

$$k_1\begin{pmatrix}-1\\-1\\0\\1\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}2\\-2\\1\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-2\sigma+\frac{\chi}{2}\\2\sigma+\frac{\chi}{2}\\0\\0\end{pmatrix}$$

整表示中 e 正定，且 $e\geq 2k$，考察定理 2.2 的所有整表示类型，得到所有无解的情形，如定理 3.2 所述。故以上整表示不可实现 $M^4(E_8\oplus E_8\oplus E_8\oplus E_8)$ 上周期为 3 的局部线性作用。

3.3. 同调平凡的情形

特别的，我们给出同调平凡的例子。

当作用是同调平凡的时候，$M^4(E_8\oplus E_8\oplus E_8\oplus E_8)$ 上的周期为 3 的自同构的情形下，适当选取生成元，由符号差定理和不动点公式，有：

$$\begin{cases}32=-\frac{1}{3}x+\frac{1}{3}y+\frac{4}{3}e\\ 34=x+y+2k\end{cases}$$

寻找 $e\geq 2k>0$，且 e,k 为整数解，e 为偶数，得到所有的整数解对 $\{e,k\}$ 如下：

$\{e=24,k=1\},\{e=25,k=1\},\{e=25,k=2\},\{e=25,k=3\},\{e=26,k=1\},\{e=26,k=2\},$

$\{e=26,k=3\},\{e=26,k=4\},\{e=26,k=5\},\{e=27,k=1\},\{e=27,k=2\},\{e=27,k=3\},$

$\{e=27,k=4\},\{e=27,k=5\},\{e=27,k=6\},\{e=27,k=7\},\{e=28,k=1\},\{e=28,k=2\},$

$\{e=28,k=3\},\{e=28,k=4\},\{e=28,k=5\},\{e=28,k=6\},\{e=28,k=7\},\{e=28,k=8\},$

$\{e=28,k=9\},\{e=29,k=1\},\{e=29,k=2\},\{e=29,k=3\},\{e=29,k=4\},\{e=29,k=5\},$

$\{e=29,k=6\},\{e=29,k=7\},\{e=29,k=8\},\{e=29,k=9\},\{e=29,k=10\},\{e=29,k=11\},$

$\{e=30,k=1\},\{e=30,k=2\},\{e=30,k=3\},\{e=30,k=4\},\{e=30,k=5\},\{e=30,k=6\},$

$\{e=30,k=7\},\{e=30,k=8\},\{e=30,k=9\},\{e=30,k=10\},\{e=30,k=11\},\{e=30,k=12\},$

$\{e=30,k=13\},\{e=31,k=1\},\{e=31,k=2\},\{e=31,k=3\},\{e=31,k=4\},\{e=31,k=5\},$

$\{e=31,k=6\},\{e=31,k=7\},\{e=31,k=8\},\{e=31,k=9\},\{e=31,k=10\},\{e=31,k=11\},$

$\{e=31,k=12\},\{e=31,k=13\},\{e=31,k=14\},\{e=31,k=15\},\{e=32,k=1\},\{e=32,k=2\},$

$\{e=32,k=3\},\{e=32,k=4\},\{e=32,k=5\},\{e=32,k=6\},\{e=32,k=7\},\{e=32,k=8\},$

$\{e=32,k=15\},\{e=32,k=16\},\{e=33,k=1\},\{e=33,k=2\},\{e=33,k=3\},\{e=33,k=4\},$

$\{e=33,k=5\},\{e=33,k=6\},\{e=33,k=7\},\{e=33,k=8\},\{e=33,k=9\},\{e=33,k=10\},$

$\{e=33,k=11\},\{e=33,k=12\},\{e=33,k=13\},\{e=33,k=14\},\{e=33,k=15\},\{e=34,k=1\},$

$$\{e=34,k=2\},\{e=34,k=3\},\{e=34,k=4\},\{e=34,k=5\},\{e=34,k=6\},\{e=34,k=7\},$$
$$\{e=34,k=8\},\{e=34,k=9\},\{e=34,k=10\},\{e=34,k=11\},\{e=34,k=12\},\{e=34,k=13\},$$
$$\{e=35,k=1\},\{e=35,k=2\},\{e=35,k=3\},\{e=35,k=4\},\{e=35,k=5\},\{e=35,k=6\},$$
$$\{e=35,k=7\},\{e=35,k=8\},\{e=35,k=9\},\{e=35,k=10\},\{e=35,k=11\},\{e=36,k=1\},$$
$$\{e=36,k=2\},\{e=36,k=3\},\{e=36,k=4\},\{e=36,k=5\},\{e=36,k=6\},\{e=36,k=7\},$$
$$\{e=36,k=8\},\{e=36,k=9\},\{e=37,k=1\},\{e=37,k=2\},\{e=37,k=3\},\{e=37,k=4\},$$
$$\{e=37,k=5\},\{e=37,k=6\},\{e=37,k=7\},\{e=38,k=1\},\{e=38,k=2\},\{e=38,k=3\},$$
$$\{e=38,k=4\},\{e=38,k=5\},\{e=39,k=1\},\{e=39,k=2\},\{e=39,k=3\},\{e=40,k=1\}$$

可以看出，这并不是一个同调平凡作用刚性的例子。

3.4. 其他例子

以 $Z[\mu_3]^{10}\oplus Z^{12}$ 和 $Z[Z_3]^8\oplus Z[\mu_3]^2\oplus Z^4$ 为例，给出不动点类型。

命题 3.3：当表示为 $Z[\mu_3]^{10}\oplus Z^{12}$ 时，$M^4(E_8\oplus E_8\oplus E_8\oplus E_8)$ 上的周期为 3 的自同构的不动点可能为：

1) 一个欧拉数为 2 的环面，5 个(1,1)型不动点，7 个(1,2)型不动点；

2) 一个欧拉数为 4 的环面，11 个(1,1)型不动点，1 个(1,2)型不动点；

3) 一个环面和一个球面，欧拉数之和为 4，10 个(1,1)型不动点。

证明：适当选择生成元，符号差为 2，设(1,1)型的不动点有 x 个，每个贡献亏值为−1/3；(1,2)型的不动点有 y 个，每个贡献亏值为 1/3；2 维不动分支的欧拉数总和为 e，个数为 k。由不动点定理，$x+y+2k=14$。由 G-符号差定理，有

$$2=-\frac{1}{3}x+\frac{1}{3}y+\frac{4}{3}e$$

考察 $e\ge 2k>0$，且 e,k 为整数的所有解，如下

$$\{e=2,k=1\},\{e=3,k=1\},\{e=4,k=1\},\{e=4,k=2\},\{e=5,k=1\}$$

注意到 e 为偶数，去掉 $e=3,5$ 的情形，得到所有的整数解为

$$e=2,k=1,x=5,y=7\text{；}\quad e=4,k=1,x=11,y=1\text{；}\quad e=4,k=2,x=10,y=0$$

即当表示为 $Z[\mu_3]^{10}\oplus Z^{12}$ 的情形时，$M^4(E_8\oplus E_8\oplus E_8\oplus E_8)$ 上的周期为 3 的自同构的所有不动点可能为：

1) 一个欧拉数为 2 的环面，5 个(1,1)型不动点，7 个(1,2)型不动点；

2) 一个欧拉数为 4 的环面，11 个(1,1)型不动点，1 个(1,2)型不动点；

3) 一个环面和一个球面，欧拉数之和为 4，10 个(1,1)型不动点。

命题 3.4：当表示为 $Z[Z_3]^8\oplus Z[\mu_3]^2\oplus Z^4$ 时，$M^4(E_8\oplus E_8\oplus E_8\oplus E_8)$ 上的周期为 3 的自同构的所有不动点可能为：

一个欧拉数为 2 的环面，亏格为 1，以及 3 个(1,1)型不动点，1 个(1,2)型不动点。

证明：适当选择生成元，有符号差为 2，由设(1,1)型的不动点有 x 个，每个贡献亏值为−1/3；(1,2)型的不动点有 y 个，每个贡献亏值为 1/3；2 维不动分支的欧拉数总和为 e，个数为 k。且由不动点定理，$x+y+2k=6$。由 G-符号差定理，有

$$2=-\frac{1}{3}x+\frac{1}{3}y+\frac{4}{3}e$$

得到$e \geq 2k > 0$，且e,k为整数的所有解，如下

$$\{e=2,k=1\},\{e=3,k=1\}$$

注意到e为偶数，去掉$e=3$的情形，得到所有的整数解为$e=2,k=1,x=3,y=1$，即当表示为$Z[Z_3]^8 \oplus Z[\mu_3]^2 \oplus Z^4$的情形时，$M^4(E_8 \oplus E_8 \oplus E_8 \oplus E_8)$上的周期为3的自同构的所有不动点可能为：

一个欧拉数为2的环面，亏格为1，以及3个(1,1)型不动点，1个(1,2)型不动点。

其他表示的不动点集情形亦可类似给出。

基金项目

国家自然科学基金天元专项(No.11526066)；海南省自然科学基金(No.20151001)。

参考文献 (References)

[1] Edmonds, A.L. (1997) Automorphisms of the E_8 Four-Manifold. Geometric Topology.

[2] Garibaldi S. (2016) E_8, the Most Exceptional Group. Bull. *American Mathematical Society*, **53**, 643-671. https://doi.org/10.1090/bull/1540

[3] Curtis, C.W. and Reiner, I. (1962) Representation Theory of Finite Groups and Associative Algebras. Wiley Interscience, New York.

[4] Swan, R.G. (1963) The Grothendieck Ring of a Finite Group. *Topology*, **2**, 85-110. https://doi.org/10.1016/0040-9383(63)90025-9

[5] Weintraub, S.H. (1977) Topological Realization of Equivariant Intersection Forms. *Pacific Journal of Mathematics*, **73**, 257-280. https://doi.org/10.2140/pjm.1977.73.257

[6] Edmonds, A.L. and Ewing, J.H. (1992) Realizing Forms and Fixed Point Data in Dimension Four. *The American Journal of Mathematics*, **114**, 1103-1126. https://doi.org/10.2307/2374891

[7] Gordon, C.M. (1986) On the G-Signature Theorem in Dimension Four. A la Recherche de la Topologie Perdue.

[8] Kwasik, S. and Schultz, R. (1989) Homological Properties of Periodic Homeomorphisms of 4-Manifolds. Duke Mathematical Journal, **8**, 241-250. https://doi.org/10.1215/S0012-7094-89-05812-2