Pure Mathematics 理论数学, 2018, 8(4), 325-332
Published Online July 2018 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2018.84043

Hans汉斯

On a Function Involving the Complete *p*-Elliptic Integrals

Zhongqin Liu, Xiaohui Zhang*

School of Science, Zhejiang Sci-Tech University, Hangzhou Zhejiang
Email: *xiaohui.zhang@zstu.edu.cn

Received: May 22nd, 2018; accepted: Jun. 5th, 2018; published: Jun. 15th, 2018

Abstract

In this paper, we investigate the monotonicity and convexity properties of the function $\Delta_p(r)=\frac{\varepsilon_p-r'^p k_p}{r^p}-\frac{\varepsilon'_p-r^p k'_p}{r'^p}$ involving the complete p-elliptic integrals of the first and second kind, k_p and ε_p, respectively. We also provide several sharp inequalities for the function $\Delta_p(r)$.

Keywords

Gaussian Hypergeometric Function, Complete *P*-Elliptic Integrals, Monotonicity, Convexity, Inequalities

关于完全*p*-椭圆积分的一个函数

刘钟秦，张孝惠*

浙江理工大学理学院，浙江 杭州
Email: *xiaohui.zhang@zstu.edu.cn

收稿日期：2018年5月22日；录用日期：2018年6月5日；发布日期：2018年6月15日

摘 要

本文中我们研究了由第一类和第二类完全*p*-椭圆积分k_p和ε_p定义的函数$\Delta_p(r)=\frac{\varepsilon_p-r'^p k_p}{r^p}-\frac{\varepsilon'_p-r^p k'_p}{r'^p}$的单调性和凹凸性。我们也证明了函数$\Delta_p(r)$的几个精确不等式。

*通讯作者。

文章引用: 刘钟秦, 张孝惠. 关于完全 *p*-椭圆积分的一个函数[J]. 理论数学, 2018, 8(4): 325-332.
DOI: 10.12677/pm.2018.84043

关键词

高斯超几何函数，完全*P*-椭圆积分，单调性，凹凸性，不等式

1. 引言

令 $1<p<\infty$，定义函数

$$\arcsin_p(x)\equiv\int_0^x\frac{1}{\left(1-t^p\right)^{1/p}}\mathrm{d}t,\quad 0\le x\le 1,$$

$$\frac{\pi_p}{2}=\arcsin_p(1)\equiv\int_0^1\frac{1}{\left(1-t^p\right)^{1/p}}\mathrm{d}t=\frac{\pi/p}{\sin(\pi/p)}=\frac{1}{p}B(1/p,1-1/p),$$

这里 B 是熟知的 Beta 函数。函数 $\arcsin_p$ 在区间 $\left[0,\pi_p/2\right]$ 上的反函数称为广义正弦函数，记为 $\sin_p$。当 $p=2$ 时 $\sin_2$ 就是通常的正弦函数 sin。广义正弦函数和其它的广义三角函数已经被广泛地研究，见文献[1]-[6]。

令 $r\in(0,1)$，第一类和第二类完全 p-椭圆积分分别由如下公式定义

$$k_p=k_p(r)=\int_0^{\frac{\pi_p}{2}}\frac{\mathrm{d}\theta}{\left(1-r^p\sin_p^p\theta\right)^{1-\frac{1}{p}}},\quad k_p'=k_p'(r)=k(r'),$$

$$\varepsilon_p(r)=\int_0^{\frac{\pi_p}{2}}\left(1-r^p\sin_p^p\theta\right)^{\frac{1}{p}}\mathrm{d}\theta,\quad \varepsilon_p'=\varepsilon_p'(r)=\varepsilon_p(r'),$$

这里 $r'=\left(1-r^p\right)^{1/p}$。当 $p=2$，这些函数就退化为经典的完全椭圆积分 $k=k_2$ 和 $\varepsilon=\varepsilon_2$。经典的完全椭圆积分还有其它的一些推广形式，这些推广的椭圆积分在几何函数论、拟共形映射和 Ramanujan 模方程理论中有广泛的应用[7] [8] [9] [10]。

给定实数 $a,b,c\left(c\ne 0,-1,-2,\cdots\right)$，高斯超几何函数是如下定义的函数

$$F(a,b;c;z)={}_2F_1(a,b;c;z)\equiv\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a)_n(b)_n}{(c)_n}\frac{z^n}{n!},\quad |z|<1$$

这里，当 $a\ne 0$ 时，$(a)_0=1$；当 $n\in N$ (自然数集)时，$(a)_n$ 是如下定义的移位阶乘

$$(a)_n\equiv a(a+1)\cdots(a+n-1).$$

完全 p-椭圆积分可由高斯超几何函数表示出来([11], Proposition 2.8)：

$$k_p(r)=\frac{\pi_p}{2}F\left(\frac{1}{p},1-\frac{1}{p};1;r^p\right)\tag{1}$$

$$\varepsilon_p(r)=\frac{\pi_p}{2}F\left(-\frac{1}{p},\frac{1}{p};1;r^p\right)\tag{2}$$

作为广义三角函数的一个重要应用，Takeuchi 在 2014 年引入了完全 p-椭圆积分。Takeuchi 的完全 p-椭圆积分是含有广义三角函数的 Legendre-Jacobi 的标准形式。完全 p-椭圆积分已被用于由算术几何平均来表示的广义的 π 常数的快速计算方法和 Ramanujan 三次变换的初等证明中[11] [12]。经典的椭圆积分的一些熟知的性质已被推广到完全 p-椭圆积分中。例如，许多这些函数的组合和复合函数的单调性和凹凸性，以及一些精确的函数不等式在最近的文献[13]中获得了证明。

在文[14]中，作者研究了如下函数

$$f(r)=\frac{\varepsilon-r'^2k}{r^2}:\frac{\varepsilon'-r^2k'}{r'^2}$$

的单调性和凹凸性。受文[14]的启发，Alzer 和 Richards [15]研究了

$$\Delta(r)=\frac{\varepsilon-r'^2k}{r^2}-\frac{\varepsilon'-r^2k'}{r'^2}$$

的对应的性质，并获得了完全椭圆积分的精确的初等估计。

本文中，我们研究了函数

$$\Delta_p(r)=\frac{\varepsilon_p-r'^pk_p}{r^p}-\frac{\varepsilon'_p-r^pk'_p}{r'^p}$$

的单调性和凹凸性，并将 Alzer 和 Richards 的结果推广到完全 p-椭圆积分上。另外，我们还获得了 $\Delta_p(r)$ 的精确不等式。本文的主要结果如下定理所述.

定理：对 $p\ge 2$，令 $a=1-\frac{1}{p}$。函数 $\Delta_p(r)$ 在区间 $(0,1)$ 上是严格递增且是严格凸函数，值域为 $\left(\frac{a\pi_p}{2}-1,1-\frac{a\pi_p}{2}\right)$。特别地，对所有的 $r\in(0,1)$，有如下不等式成立：

$$\frac{a\pi_p}{2}-1+\alpha r<\Delta_p(r)<\frac{a\pi_p}{2}-1+\beta r.$$

这里常数 $\alpha=0$ 和 $\beta=2-a\pi_p$ 是最佳的。

2. 定理的证明

高斯超几何函数的如下导数公式和变换公式是众所周知的[16]：对 $|x|<1$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}F(a,b;c;x)=\frac{ab}{c}F(a+1,b+1;c+1;x) \tag{3}$$

$$(1-x)F(a+1,b+1;a+b+1;x)=F(a,b;a+b+1;x) \tag{4}$$

$$(c-b)F(a,b;c+1;x)=cF(a,b;c;x)-bF(a,b+1;c+1;x) \tag{5}$$

2.1. 凹凸性

首先，我们证明 $\Delta_p(r)$ 在区间 $(0,1)$ 上是严格凸的。令 $r\in(0,1)$，并且令

$$\begin{aligned}H_a(r)&=\frac{\varepsilon_p-r'^pk_p}{r^p}\\&=\frac{\pi_p}{2r^p}\left[F(a-1,1-a;1;r^p)-r'^pF(a,1-a;1;r^p)\right]\end{aligned}.$$

那么

$$
\begin{aligned}
H_a(r) &= \frac{\pi_p}{2r^p}\left[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a-1)_n(1-a)_n}{1_n}\frac{(r^p)^n}{n!} - r'^p\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n(1-a)_n}{1_n}\frac{(r^p)^n}{n!}\right] \\
&= \frac{\pi_p}{2}\left[\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{(a-1)_{n+1}(1-a)_{n+1}}{((n+1)!)^2} - \frac{a_{n+1}(1-a)_{n+1}}{((n+1)!)^2}\right)r^{pn} + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n(1-a)_n}{(n!)^2}r^{pn}\right] \\
&= \frac{\pi_p}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n(1-a)_n}{((n+1)!)^2}\left[(a-1)(n+1-a)-(n+a)(n+1-a)+(n+1)^2\right]r^{pn} \\
&= \frac{\pi_p}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n(1-a)_n}{((n+1)!)^2}a(n+1)r^{pn} = \frac{a\pi_p}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n(1-a)_n}{2_n}\frac{(r^p)^n}{n!} \\
&= \frac{a\pi_p}{2}F(a,1-a;2;r^p)
\end{aligned}
$$

所以

$$
\Delta_p(r) = H_a(r) - H_a(r') = \frac{a\pi_p}{2}\left[F(a,1-a;2;r^p) - F(a,1-a;2;1-r^p)\right].
$$

由此可知

$$
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\Delta_p(r) = \frac{a^2(1-a)\pi_p p r^{p-1}}{4}\left[F(a+1,2-a;3;r^p) + F(a+1,2-a;3;1-r^p)\right],
$$

并且

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}r^2}\Delta_p(r) = \frac{a^2(1-a)\pi_p p(p-1)r^{p-2}}{4}\Big\{&F(a+1,2-a;3;r^p) + F(a+1,2-a;3;1-r^p) \\
&+ \frac{(a+1)(2-a)pr^p}{3(p-1)}\left[F(a+2,3-a;4;r^p) - F(a+2,3-a;4;1-r^p)\right]\Big\}.
\end{aligned}
$$

根据变换公式(4)和(5)，得到

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}r^2}\Delta_p(r) &= \frac{a^2(1-a)\pi_p p(p-1)r^{p-2}}{4}\Big\{F(a+1,2-a;3;r^p) + F(a+1,2-a;3;1-r^p) \\
&\quad + \frac{(a+1)(2-a)pr^p}{3(p-1)}\left[F(a+2,3-a;4;r^p) - \frac{F(a+1,2-a;4;1-r^p)}{r^p}\right]\Big\} \\
&= \frac{a^2(1-a)\pi_p p(p-1)r^{p-2}}{4}\Big[F(a+1,2-a;3;r^p) + \frac{(a+1)(2-a)pr^p}{3(p-1)}F(a+2,3-a;4;r^p) \\
&\quad + \frac{ap-p-1}{p-1}F(a+1,2-a;3;1-r^p) + \frac{(2-a)^2p}{3(p-1)}F(a+1,3-a;4;1-r^p)\Big]。
\end{aligned}
$$

记

$$
W = \frac{a^2(1-a)\pi_p p(p-1)r^{p-2}}{4} > 0\,.
$$

那么

$$\begin{aligned}\frac{1}{W}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}r^2}\Delta_p(r) &> 1+\frac{ap-p-1}{p-1}F\left(a+1,2-a;3;1-r^p\right)+\frac{(2-a)^2 p}{3(p-1)}F\left(a+1,3-a;4;1-r^p\right)\\ &=1+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(2-\frac{1}{p}\right)_n\left(1+\frac{1}{p}\right)_n}{3_n}\frac{n(p-1)+p+\frac{1}{p}-4}{(p-1)(3+n)}\frac{\left(1-r^p\right)^n}{n!}\\ &>1+\sum_{n=0}^{1}\frac{\left(2-\frac{1}{p}\right)_n\left(1+\frac{1}{p}\right)_n}{3_n}\frac{n(p-1)+p+\frac{1}{p}-4}{(p-1)(3+n)}\frac{\left(1-r^p\right)^n}{n!}\\ &=\frac{20p^4-36p^3-p^2+6p-1}{12p^3(p-1)}-\frac{4p^4-8p^3-5p^2+6p-1}{12p^3(p-1)}r^p\end{aligned}$$

由

$$\frac{n(p-1)+p+\frac{1}{p}-4}{(p-1)(3+n)}>0$$

可知上面的第二个不等号成立。对于 $p\ge 2$，由于

$$\frac{20p^4-36p^3-p^2+6p-1}{12p^3(p-1)}>0，\quad -\frac{4p^4-8p^3-5p^2+6p-1}{12p^3(p-1)}>0$$

易知

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}r^2}\Delta_p(r)>0.$$

从而可知 $\Delta_p(r)$ 在区间 $(0,1)$ 上是严格凸的。

2.2. 单调性

由上节可知

$$H_\alpha(r)=\frac{\varepsilon_p-r'^p k_p}{r^p}=\frac{a\pi_p}{2}F\left(a,1-a;2;r^p\right)=\frac{a\pi_p}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n(1-a)_n}{2_n}\frac{\left(r^p\right)^n}{n!}$$

求导数得到

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}H_\alpha(r)=\frac{a\pi_p}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n(1-a)_n}{2_n}\frac{\left(r^p\right)^{n-1}pr^{p-1}}{(n-1)!}$$

所以 $H_\alpha(0)=\frac{a\pi_p}{2}$ 和 $H'_\alpha(0)=0$。根据已知极限

$$\lim_{r\to 1^-}\left(k_p(r)+\log r'-\frac{R(1/p)}{p}\right)=0$$

我们可得

$$\lim_{r\to 1^-}H_\alpha(r)=\lim_{r\to 1^-}\frac{\varepsilon_p-r'^p k_p}{r^p}=\frac{1-0}{1}=1$$

令 $Q_p(r)=\dfrac{\Delta_p(r)-\Delta_p(0)}{r-0}$，则有

$$\lim_{r\to0^+}Q_p(r)=\lim_{r\to0^+}\left(\frac{H_\alpha(r)-H_\alpha(r')-\left[H_\alpha(0)-H_\alpha(1)\right]}{r-0}\right)$$

$$=\lim_{r\to0^+}\left(\frac{H_\alpha(r)-H_\alpha(0)}{r-0}-\frac{H_\alpha(r')-H_\alpha(1)}{r-0}\right)$$

$$=H'_\alpha(0)-\lim_{x\to1^-}\frac{H_\alpha(x)-1}{x'}=-\lim_{x\to1^-}\frac{x-1}{x'}\frac{H_\alpha(x)-1}{x}$$

$$=-\lim_{x\to1^-}\frac{x-1}{\left(1-x^p\right)^{\frac{1}{p}}}H'_\alpha(1)=-\lim_{x\to1^-}\frac{1}{\frac{1}{p}\left(1-x^p\right)^{\frac{1}{p}-1}\left(-px^{p-1}\right)}H'_\alpha(1)$$

$$=\lim_{x\to1^-}\frac{\left(1-x^p\right)^{1-\frac{1}{p}}}{x^{p-1}}=0$$

因为 $\Delta_p(r)$ 是严格凸的，所以 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\Delta_p(r)$ 在 $(0,1)$ 上递增。因此

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\Delta_p(r)>\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\Delta_p(0)=Q_p(0)=0,$$

这就证明了函数 $\Delta_p(r)$ 在 $(0,1)$ 上严格递增。

2.3. 不等式

显然地，

$$\Delta_p(0)=H_\alpha(0)-H_\alpha(1)=\frac{a\pi_p}{2}-1$$

$$\Delta_p(1)=H_\alpha(1)-H_\alpha(0)=1-\frac{a\pi_p}{2}$$

由函数 $\Delta_p(r)$ 在 $(0,1)$ 上严格递增，可知

$$Q_p(r)=\frac{\Delta_p(r)-\Delta_p(0)}{r-0}$$

在 $(0,1)$ 上严格递增。从而

$$Q_p(1)>Q_p(r)>Q_p(0).$$

由此即得

$$\alpha=0=Q_p(0)<Q_p(r)<Q_p(1)=2-a\pi_p=\beta$$

$$0<\frac{\Delta_p(r)-\Delta_p(0)}{r-0}<2-a\pi_p$$

以及

$$\Delta_p(0)+0\cdot r<\Delta_p(r)<\Delta_p(0)+\left(2-a\pi_p\right)\cdot r$$

因此

$$\frac{a\pi_p}{2}-1+\alpha r<\Delta_p(r)<\frac{a\pi_p}{2}-1+\beta r.$$

推论： 当 $p\geq 2$ 时，对所有的 $r,s\in(0,1)$，有如下精确不等式成立：

$$\frac{a\pi_p}{2}-1<\Delta_p(rs)-\Delta_p(r)-\Delta_p(s)<1-\frac{a\pi_p}{2}.$$

证明： 记

$$G(r,s)=\Delta_p(rs)-\Delta_p(r)-\Delta_p(s).$$

求导数得

$$\frac{\partial}{\partial r}G(r,s)=s\Delta_p'(rs)-\Delta_p'(r),$$

以及

$$\frac{\partial^2}{\partial r\partial s}G(r,s)=\Delta_p'(rs)+rs\Delta_p''(r).$$

由于 $\Delta_p'(r)>0$ 且 $\Delta_p''(r)>0$，我们可得

$$\frac{\partial^2}{\partial r\partial s}G(r,s)>0.$$

因此 $\frac{\partial}{\partial r}G(r,s)$ 关于变量 s 严格递增，从而有

$$\frac{\partial}{\partial r}G(r,s)<\left.\frac{\partial}{\partial r}G(r,s)\right|_{s=1}=\Delta_p'(r)-\Delta_p'(r)=0.$$

所以 $G(r,s)$ 关于 r 严格递减，从而有

$$\frac{a\pi_p}{2}-1=-\Delta_p(1)=G(1,s)<G(r,s)<G(0,s)=-\Delta_p(s)<-\Delta_p(0)=1-\frac{a\pi_p}{2}.$$

推论得证。

基金项目

本研究得到浙江理工大学科研启动基金(项目编号 16062023-Y)和理学院学生科研项目的资助。

参考文献

[1] Bushell, P.J. and Edmunds, D.E. (2012) Remarks on Generalised Trigonometric Functions. *Rocky Mountain Journal of Mathematics*, **42**, 25-57. https://doi.org/10.1216/RMJ-2012-42-1-25

[2] Edmunds, D.E., Gurka, P. and Lang, J. (2012) Properties of Generalized Trigonometric Functions. *Journal of Approximation Theory*, **164**, 47-56. https://doi.org/10.1016/j.jat.2011.09.004

[3] Klen, R., Vuorinen, M. and Zhang, X. (2014) Inequalities for the Generalized Trigonometric and Hyperbolic Functions. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **409**, 521-529. https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2013.07.021

[4] Lang, J. and Edmunds, D.E. (2011) Eigenvalues, Embeddings and Generalised Trigonometric Functions. *Lecture Notes in Mathematics*, Springer-Verlag, Berlin. https://doi.org/10.1007/978-3-642-18429-1

[5] Lindqvist, P. (1995) Some Remarkable Sine and Cosine Functions. *Ricerche di Matematica*, **44**, 269-290.

[6] Lindqvist, P. and Peetre, J. (2003) p-Arc Length of the q-Circle. *The Mathematics Student*, **72**, 139-145.

[7] Anderson, G.D., Qiu, S.-L., Vamanamurthy, M.K. and Vuorinen, M. (2000) Generalized Elliptic Integrals and Modular Equations. *Pacific Journal of Mathematics*, **192**, 1-37. https://doi.org/10.2140/pjm.2000.192.1

[8] Anderson, G.D., Vamanamurthy, M.K. and Vuorinen, M. (1997) Conformal Invariants, Inequalities, and Quasiconformal Maps. John Wiley & Sons, New York.

[9] Borwein, J.M. and Borwein, P.B. (1987) Pi and the AGM. John Wiley & Sons, New York.

[10] Zhang, X. (2015) Solution to a Conjecture on the Legendre m-Function with an Application to the Generalized Modulus. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **431**, 1190-1196. https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2015.06.033

[11] Takeuchi, S. (2016) A New Form of the Generalized Complete Elliptic Integrals. *Kodai Mathematical Journal*, **39**, 202-226. https://doi.org/10.2996/kmj/1458651700

[12] Takeuchi, S. (2018) Complete p-Elliptic Integrals and a Computation Formula of π_p for p = 4. *The Ramanujan Journal*, **46**, 309-321. https://doi.org/10.1007/s11139-018-9993-y

[13] Zhang, X. (2017) Monotonicity and Functional Inequalities for the Complete p-Elliptic Integrals. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **453**, 942-953. https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2017.04.025

[14] Anderson, G.D., Qiu, S.-L. and Vamanamurthy, M.K. (1998) Elliptic Integral Inequalities, with Applications. *Constructive Approximation*, **14**, 195-207. https://doi.org/10.1007/s003659900070

[15] Alzer, H. and Richards, K. (2015) A Note on a Function Involving Complete Elliptic Integrals: Monotonicity, Convexity, Inequalities. *Analysis Mathematica*, **41**, 133-139. https://doi.org/10.1007/s10476-015-0201-7

[16] Abramowitz, M. and Stegun, I.A. (1965) Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables. Dover, New York.