

# Non-Autonomous Predator-Prey Model with Stage Structure

Yang Lu, Han Gao, Nana Dai, Xinhao Yin

Department of Applied Mathematics, College of Mathematics and Statistics, Northeast Petroleum University, Daqing Heilongjiang

Email: moonyanglu@126.com

Received: Oct. 15<sup>th</sup>, 2018; accepted: Oct. 27<sup>th</sup>, 2018; published: Nov. 8<sup>th</sup>, 2018

---

## Abstract

This paper studies a kind of non-autonomous predator-prey model with stage structure and model parameters depended on time-varying coefficients. In the model it is assumed that the predator has stage structure, prey has exponential growth rate, and dynamics is analyzed qualitatively when all the parameters on the model parameters depend on time-varying coefficients. By defining the net reproductive number of the predator, a uniform persistence and extinction of the predators are obtained by using the comparison principle, respectively. Finally the correctness of the theory is verified by numerical simulation.

## Keywords

Non-Autonomous, Stage Structure, Predator-Prey Model, Uniform Persistence, Extinction

---

## 具有阶段结构的非自治捕食 - 食饵模型

卢 旸, 高 晗, 戴娜娜, 尹鑫浩

东北石油大学, 数学与统计学院应用数学系, 黑龙江 大庆

Email: moonyanglu@126.com

收稿日期: 2018年10月15日; 录用日期: 2018年10月27日; 发布日期: 2018年11月8日

---

## 摘 要

研究了一类捕食者具有阶段结构且模型参数为时变系数的非自治捕食 - 食饵模型。在模型中假设捕食者具有阶段结构, 食饵具有指数型增长率, 定性分析了当模型中的所有参数为时变系数时的动力学性态。通过定义捕食者的净再生数, 运用比较原理分别得到了捕食者的一致持久性和捕食者的灭绝性。最后通过数值模拟验证了理论的正确性。

## 关键词

非自治, 阶段结构, 捕食 - 食饵模型, 一致持久性, 灭绝性

Copyright © 2018 by authors and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

## 1. 引言

捕食 - 食饵间的相互作用在生物界无处不在, 也是生态学最重要的经典课题之一, 许多学者通过建立数学模型研究了这种关系(Fan [1], Hsu [2], Jost Ellner [3], Xu [4], Wang [5], Abrams 和 Ginzburg [6], Huang [7])。

捕食 - 食饵模型的功能反应函数经常被用来描述捕食者捕获食饵的能力。而 Beddington-DeAngelis 功能反应函数体现了捕食者内部存在干扰效应, 具有 Beddington-DeAngelis (下文统一称为 BD 模型)功能反应函数的捕食 - 食饵模型可以表示为:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= x \left( r - \frac{x}{k} \right) - \frac{\alpha xy}{a + bx + cy} \\ \frac{dy}{dt} &= -dy + \frac{\beta xy}{a + bx + cy} \end{aligned} \quad (1)$$

这个数学模型由 Beddington [8] [9]独立提出。BD 功能反应函数和著名 Holling II 功能反应函数类似, 但在分母中有一个额外的  $cy$ , 它体现了捕食者之间的相互干扰作用。在 Skalski 和 Filliam [10]的数学模型中, 通过比较具有 3 种不同捕食者功能反应函数的 19 个捕食 - 食饵系统得到的统计资料, 发现捕食者内部具有干扰关系的功能反应函数能很好的描绘捕食者对食饵的捕食情况, 即 BD 功能反应函数相对于其他的功能反应函数能很好的描述捕食者对食饵的捕获(见 Cantrell 和 Coser [11], Hwang [12], Liu 和 Zhang [13])。

最近, 许多文献研究了能够反应不同生命阶段的种群模型(见 Aiello 和 Freedman [14], Al-omari 和 Gourley [15], Liu [16], Liu [17], Ou [18])。通过对不同生命阶段种群模型的研究, 发现具有不同生命阶段的种群模型具有以下的一些特征: 幼年捕食者从出生到成熟具有一定的时间间隔, 称这个固定的时间间隔为捕食者的成熟期。Liu 和 Beretta [19]考虑了成熟时滞; 幼年捕食者通常被它们的父母养育大, 或者依赖于营养的供给, 幼年捕食者不具有捕获食饵的能力, 也不具有生殖能力, 成年捕食者具有繁殖能力。幼年捕食者在幼年时期存活下来即可达到成熟阶段。如果幼年捕食者的死亡率不为 0, 那么仅有部分幼年捕食者可以进入成年阶段。因此, 构建具有阶段结构的捕食 - 食饵模型就显得现实且有意义。Liu 和 Beretta [20]构造了具有 BD 功能反应函数的阶段结构捕食 - 食饵模型:

$$\begin{cases} x'(t) = rx(t) \left[ 1 - \frac{x(t)}{K} \right] - \frac{bx(t)y(t)}{1 + k_1x(t) + k_2y(t)} \\ y'(t) = \frac{nbx(t-\tau)y(t-\tau)e^{-d_1\tau}}{1 + k_1x(t-\tau) + k_2y(t-\tau)} - dy(t) \\ y'_j(t) = \frac{nbx(t)y(t)}{1 + k_1x(t) + k_2y(t)} - \frac{nbx(t-\tau)y(t-\tau)e^{-d_1\tau}}{1 + k_1x(t-\tau) + k_2y(t-\tau)} - d_jy_j(t) \end{cases} \quad (2)$$

其中,  $x(t)$  和  $y(t)$  分别表示食饵和成年捕食者的密度,  $y_j(t)$  表示幼年捕食者的密度;  $b$  和  $k_1$  分别表示捕食者对食饵的捕获率大小以及捕食者处理食物的时间;  $n$  是捕食者的出生率,  $k_2$  为非负常数表示捕食者之间干扰效应的大小; 假设幼年捕食者的死亡率为  $d_j$  (整个幼年阶段),  $\tau$  表示成熟期。最终, 他们得到了两个结论: 捕食者和食饵持久共存, 当且仅当在食饵极大丰富时, 捕食者的补充率比捕食者自身的死亡率高即可; 如果系统是持久的, 那么捕食者之间足够大的干扰不仅能使系统更加稳定, 还可以增加成年捕食者的出生率等。

在 Liu 和 Beretta [20] 的文章里, 对于食饵的增长率而言, 他们仅仅考虑了增长率的情形, 事实上当食饵的生存环境为鱼池时, 那么对于食饵来说, 食饵的定期投放及时变指数增长率就必须考虑进去, 同时他们忽略了时变环境对种群的动力学行为的影响。在 Cushing [21] 的文章里, 指出有必要考虑具有周期性生态参数或者扰动的模型, 这样的模型是符合实际意义的, 比如季节性的天气变化, 食物供给, 交配习惯, 猎杀或者季节性收获等等。Yang 和 Shi [22] 建立了 3 阶段结构的捕食 - 食饵模型, 系统中全部参数都假定为周期系数, 他们讨论了正周期解的存在性。但是周期性行为只是时变环境的一种特殊情况, 在本章中我们就食饵具有指数增长率的情形同时针对系统参数为更一般的时变情形做了定性的分析(当然包括了周期性的情况)。

### 2. 模型的建立

$$\begin{cases} x'(t) = \lambda(t) - \mu(t)x(t) - \frac{b(t)x(t)y(t)}{1 + k_1(t)x(t) + k_2(t)y(t)} \\ y'(t) = \frac{n(t-\tau)b(t-\tau)x(t-\tau)y(t-\tau)e^{-\int_{t-\tau}^t d_i(s)ds}}{1 + k_1(t-\tau)x(t-\tau) + k_2(t-\tau)y(t-\tau)} - d(t)y(t) \\ y'_j(t) = \frac{n(t)b(t)x(t)y(t)}{1 + k_1(t)x(t) + k_2(t)y(t)} - \frac{n(t-\tau)b(t-\tau)x(t-\tau)y(t-\tau)e^{-\int_{t-\tau}^t d_i(s)ds}}{1 + k_1(t-\tau)x(t-\tau) + k_2(t-\tau)y(t-\tau)} - d_j y_j(t) \end{cases} \quad (3)$$

其中第一个公式中的函数  $\lambda(t)$  表示食饵具有时变补充率,  $\mu(t)$  表示食饵的死亡率。其他函数  $b(t), k_1(t), k_2(t), n(t), d(t), d_j(t)$  的表示意义分别为捕食者的捕获率、捕食者处理食物的时间、捕食者之间的干扰效应、捕食者的出生率、幼年捕食者的死亡率以及成年捕食者的死亡率。

### 3. 准备工作

首先, 为叙述并证明主要结果, 在此给出系统(3)的一些假设和符号说明。系统(3)的基本假设为:

(A<sub>1</sub>) 函数  $\lambda(\cdot), \mu(\cdot), b(\cdot), k_1(\cdot), k_2(\cdot), n(\cdot), d_j(\cdot), d(\cdot)$  为  $(0, +\infty)$  上的正的有界函数且连续;

(A<sub>2</sub>) 若函数  $g(t)$  为  $[0, +\infty)$  上的连续有界函数, 则

$$g_\infty = \liminf_{t \rightarrow \infty} g(t), \quad g^\infty = \limsup_{t \rightarrow \infty} g(t).$$

(A<sub>3</sub>) 存在正的常数  $\omega_1, \omega_2 > 0$ , 使得

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} \int_t^{t+\omega_1} \lambda(s)ds > 0, \quad \liminf_{t \rightarrow \infty} \int_t^{t+\omega_2} \mu(s)ds > 0$$

(A<sub>4</sub>) 对于所有  $t \geq 0$  来说, 都有  $d_j(t) > d(t)$ 。

系统(3)的初值条件为:

$$\begin{cases} x(\theta) = \phi_1(\theta), \\ y(\theta) = \phi_2(\theta), \\ y_j(\theta) = \phi_3(\theta), \\ -\tau \leq \theta \leq 0, \\ \phi_i(0) > 0, i=1,2,3. \end{cases} \quad (4)$$

其中对所有的  $\theta \in [-\tau, 0]$ , 有  $\phi(\theta) = (\phi_1(\theta), \phi_2(\theta), \phi_3(\theta))^T$  使得  $\phi_i(\theta) \geq 0 (i=1, 2, 3)$  且  $C$  表示从  $[-\tau, 0]$  到  $R^3$  上的连续映射的全体构成的 Banach 空间  $C([- \tau, \theta], R^3)$  元素  $\phi$  在  $C$  上的范数为:

$$\|\phi\| = \max_{-\tau \leq \theta \leq 0} \{|\phi_1(\theta)|, |\phi_2(\theta)|, |\phi_3(\theta)|\}.$$

其次为得到系统(3)的持久性与灭绝性的充分条件, 在此给出相关的定义和引理。

**定义 3.1:** 系统(3)称为是持续的, 若存在正的常数  $q, \tilde{q}_i$  及  $L, \tilde{L} (i=1, 2)$  使得

$$\begin{cases} q \leq \liminf_{t \rightarrow +\infty} x(t) \leq \limsup_{t \rightarrow +\infty} x(t) \leq L, \\ \tilde{q}_1 \leq \liminf_{t \rightarrow +\infty} y(t) \leq \limsup_{t \rightarrow +\infty} y(t) \leq \tilde{L}_1, \\ \tilde{q}_2 \leq \liminf_{t \rightarrow +\infty} y_j(t) \leq \limsup_{t \rightarrow +\infty} y_j(t) \leq \tilde{L}_2. \end{cases}$$

对系统(3)具有初值条件(4)的任意解  $(x(t), y(t), y_j(t))$  均成立, 且  $q, \tilde{q}_i$  及  $L, \tilde{L} (i=1, 2)$  不依赖于初值条件(4)。

**引理 1 [23]:** 考虑下面非自治线性系统

$$z'(t) = \lambda(t) - \mu(t)z(t) \tag{5}$$

假设(A<sub>1</sub>)与(A<sub>2</sub>)成立, 则

- 1) 方程(5)具有初值  $z(0) > 0$  任意解的最终极限  $z^*(t)$  在  $R_+$  内有界且全局一致吸引;
- 2) 存在常数  $m$  使得  $m \leq \liminf_{t \rightarrow +\infty} z(t) \leq \limsup_{t \rightarrow +\infty} z(t) \leq M$ ;
- 3) 若方程(5)是  $\omega$ -周期的, 则方程(5)存在唯一非负  $\omega$  的周期解且全局一致吸引;
- 4) 对任意的  $t \geq 0, \mu(t) > 0$ , 若

$$0 < \liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{\lambda(t)}{\mu(t)} \leq \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{\lambda(t)}{\mu(t)} < \infty$$

则方程(5)具有初值  $z(0) > 0$  的任意解  $z(t)$  满足:

$$\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)_\infty < \liminf_{t \rightarrow +\infty} z(t) \leq \limsup_{t \rightarrow +\infty} z(t) < \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)_\infty^\infty$$

其中

$$\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)_\infty = \liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{\lambda(t)}{\mu(t)}, \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)_\infty^\infty = \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{\lambda(t)}{\mu(t)}$$

### 模型解的正性和有界性

**命题 1:** 对任意  $t \geq 0$ , 系统(3)具有初值(4)的任意解  $(x(t), y(t), y_j(t))$  均是正的上有界函数。

证明: 由于系统(3)的右端是全连续的, 因此系统(3)具有初值(4)的任意解  $(x(t), y(t), y_j(t))$  是存在且唯一的。

再由系统(3)可得:

$$\begin{aligned} x(t) &= x(0)e^{-\int_0^t \left[ \mu(s) + \frac{n(s)y(s)}{1+k_1(s)x(s)+k_2(s)y(s)} \right] ds} + \int_0^t \lambda(s)e^{-\int_s^t \left[ \mu(\theta) + \frac{n(\theta)y(\theta)}{1+k_1(\theta)x(\theta)+k_2(\theta)y(\theta)} \right] ds} ds \\ y(t) &\geq y(0)e^{-\int_0^t d(s) ds} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 y_j(t) &= \int_{t-\tau}^t \frac{n(s)b(s)x(s)y(s)e^{-\int_s^t d_j(u)du}}{1+k_1(s)x(s)+k_2(s)y(s)} ds \\
 &= \int_{t-\tau}^0 \frac{n(s)b(s)x(s)y(s)e^{-\int_s^t d_j(u)du}}{1+k_1(s)x(s)+k_2(s)y(s)} ds + \int_0^t \frac{n(s)b(s)x(s)y(s)e^{-\int_s^t d_j(u)du}}{1+k_1(s)x(s)+k_2(s)y(s)} ds
 \end{aligned} \tag{6}$$

若  $x(0) > 0$  则对任意的  $t \geq 0$  总有  $x(t) > 0$ ，显然对任意的  $t \in [0, \tau]$ ， $y(t) > 0$  又  $y_j(t)$  对任意的  $t \in [0, \tau]$  有  $y_j(t) > 0$ 。从而得到了  $x(t), y(t), y_j(t)$  在  $[-\tau, \tau]$  上的正性。因此当  $x(0), y(0) > 0, y_j(0) > 0$  时，对于任意的  $t \geq 0$ ，总有  $x(t) > 0, y(t) > 0, y_j(t) > 0$ 。

最后证明对于任意的  $t \geq 0$ ， $x(t) > 0, y(t) > 0, y_j(t) > 0$  有界。

令：

$$\eta(t) = x(t) + y(t) + y_j(t)$$

计算  $\eta(t)$  沿系统(3)轨线的导数，可得：

$$\begin{aligned}
 \eta'(t) &= \lambda(t) - \frac{b(t)x(t)y(t)}{1+k_1(t)x(t)+k_2(t)y(t)} + \frac{n(t)b(t)x(t)y(t)}{1+k_1(t)x(t)+k_2(t)y(t)} \\
 &\quad - d(t)y(t) - d_j(t)y_j(t) - \mu(t)x(t) \\
 &\leq \lambda^\infty \left( \frac{n^\infty b^\infty}{K_{2_\infty}} - \mu_\infty \right) x(t) - d_{j_\infty} y_j(t) - d_\infty y(t)
 \end{aligned} \tag{7}$$

令  $\beta = \min\{d_{j_\infty}, d_\infty\}$ ，由(7)式可得：

$$\eta'(t) + \eta(t) \leq \lambda^\infty + \beta x(t) + \left( \frac{n^\infty b^\infty}{K_{2_\infty}} - \mu_\infty \right) x(t)$$

由系统(3)的第一个方程，当  $t \geq 0$  时，可得  $x'(t) \leq \lambda(t) - \mu(t)x(t) \leq \lambda^\infty - \mu_\infty x(t)$ 。应用文献[22]中的结论以及比较原理，可得存在  $T_1 > 0$ ，当  $t \geq T_1$  时有：

$$\limsup_{t \rightarrow +\infty} x(t) \leq \frac{\lambda^\infty}{\mu_\infty} \tag{8}$$

进而

$$\eta'(t) + \beta \eta(t) \leq \lambda^\infty + \left( \beta + \frac{n^\infty b^\infty}{K_{2_\infty}} - \mu_\infty \right) \cdot \frac{\lambda^\infty}{\mu_\infty} := M \tag{9}$$

故存在  $T_2 \geq T_1$ ，当  $t \geq T_2$  时，有

$$\limsup_{t \rightarrow +\infty} \eta(t) < \frac{M}{\beta} := \bar{L} \tag{10}$$

因此， $x(t), y(t)$  是一致有界的，运用(6)式可得  $y_j(t)$  也是一致有界的。故命题 1 得证。

由命题 1 的证明过程可知，对任意的  $t \geq 0$ ，系统(3)具有初值条件(4)的任意解  $(x(t), y(t), y_j(t))$  均是正的有界函数，从而紧集

$$\Omega := \left\{ (x(t), y(t), y_j(t)) \mid (x(t), y(t), y_j(t)) \in [0, \bar{L}] \times [0, \bar{L}] \times [0, \bar{L}] \right\}$$

是正不变的且在  $R_+^3$  中的正轨道为一致吸引的。

### 4. 主要结果

定义

$$R_* = \frac{n_\infty b_\infty e^{-d_j^\infty \tau} \lambda_\infty}{d^\infty (\mu^\infty + K_1^\infty \lambda_\infty)}, R^* = \frac{n^\infty b^\infty e^{-d_{j^\infty} \tau} \lambda^\infty}{d_\infty (\mu_\infty + K_{1_\infty} \lambda^\infty)}$$

接下来我们将会证明  $R_*$ ,  $R^*$  对于捕食者的一致持久性和灭绝性的重要性。

#### 4.1. 当 $R_* > 1$ 时捕食者的一致持久性

引理 2 (见 Song 和 Chen [24]) 已知下述式子成立:

$$x'(t) = ax(t - \tau) - bx(t) - cx^2(t).$$

中  $a, b, c$  和  $\tau$  是正常量, 当  $t \in [-\tau, 0]$  时  $x(t) > 0$ 。可得结论:

- 1、如果  $a > b$ , 则  $\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = \frac{a-b}{c}$ ;
- 2、如果  $a < b$ , 则  $\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = 0$ 。

**定理 3.1:** 假设系统(3)满足初始条件(4), 且满足  $R_* > 1$ ,  $\left(\frac{b(t)\Delta_1}{1+k_2(t)\Delta_1} + \mu(t)\right)_\infty > 0$ , 则捕食者就是一致持久的, 即:

$$\liminf_{t \rightarrow +\infty} y(t) \geq \delta_2, \liminf_{t \rightarrow +\infty} y_j(t) \geq \delta_3 \tag{11}$$

证明: **第一步:** 假设  $(x(t), y(t), y_j(t))$  是系统(3)具有初始条件(4)的一个正解, 由系统(3)的第一个方程, 可得:

$$x'(t) \leq \lambda(t) \leq K^\infty$$

对所有的  $t \geq 0$  成立。由比较原理和引理 1 中的结论(4), 可得存在常量  $\bar{T}_1 > 0$ , 使得:

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} x(t) \leq K^\infty, t \geq \bar{T}_1. \tag{12}$$

由系统(3)中的第二和第三个公式可得:

$$\frac{d(y(t) + y_j(t))}{dt} \leq \frac{n^\infty b^\infty K^\infty \frac{M}{\beta}}{1 + k_{1_\infty} K^\infty + k_{2_\infty} \frac{M}{\beta}} - d(t)(y(t) + y_j(t)) := A - d(t)(y(t) + y_j(t))$$

其中  $t > T_3 = \max\{\bar{T}_1, T_2\}$ 。应用比较原理以及引理 1 中的结论(4)可得, 存在常量  $T_4 \geq T_3$ , 使得

$$\limsup_{t \rightarrow +\infty} (y(t) + y_j(t)) \leq \frac{A}{d^\infty} \triangleq \Delta_1, \tag{13}$$

对所有的  $t \geq T_4$  成立。

由系统(3)的第一个方程和不等式(13)可得:

$$x'(t) \geq \lambda(t) - \frac{b(t)x(t)\Delta_1}{1+k_2(t)\Delta_1} - \mu(t)x(t) = \lambda(t) - \left(\frac{b(t)\Delta_1}{1+k_2(t)\Delta_1} + \mu(t)\right)x(t).$$

当  $\left(\frac{b(t)\Delta_1}{1+k_2(t)\Delta_1} + \mu(t)\right)_\infty > 0$  时, 由比较原理、假设(A<sub>3</sub>)、引理 1 中的结论(4)可得, 存在常量  $T_5 \geq T_4$ ,

使得:

$$\liminf_{t \rightarrow +\infty} x(t) \geq \left[ \frac{\lambda(t)}{\frac{b(t)\Delta_1}{1+k_2(t)\Delta_1} + \mu(t)} \right]_{\infty} \triangleq \delta_1, \tag{14}$$

对所有的  $t \geq T_5$  成立。

**第二步:**

$$\liminf_{t \rightarrow +\infty} y(t) \geq \delta_2.$$

首先证明存在某个常量  $\alpha > 0$ ,  $\alpha$  的取值不依赖于系统(3)中的任何一个正解, 从而:

$$\limsup_{t \rightarrow +\infty} y(t) > \alpha. \tag{15}$$

如果(15)不成立, 则存在系统(3)的正解  $(x(t), y(t), y_j(t))$ , 使得:

$$\limsup_{t \rightarrow +\infty} y(t) < \alpha_0,$$

从而, 存在常量  $T_6 \geq T_5$ , 使得  $y(t) < \alpha_0$  对所有  $t \geq T_6$  成立, 其中:

$$\alpha_0 = \min \left\{ \frac{\lambda_{\infty}}{b^{\infty} - \lambda_{\infty} k_{2\infty}}, \frac{c}{b^{\infty} - c k_{2\infty}} \right\}, \tag{16}$$

这里,  $c = \frac{\lambda_{\infty} (n_{\infty} b_{\infty} e^{-d_j^{\infty} \tau} - k_1^{\infty} d^{\infty}) - d^{\infty} \cdot \left(\frac{\lambda}{K}\right)^{\infty}}{n_{\infty} b_{\infty} e^{-d_j^{\infty} \tau} - k_1^{\infty} d^{\infty}} > 0$ ,  $b^{\infty} - c k_{2\infty} > 0$ 。

由系统(3)的第一个方程可得, 对任意的  $t > T_6$ ,

$$\begin{aligned} x'(t) &\geq \lambda_{\infty} - \frac{b^{\infty} \alpha_0}{1 + k_{2\infty} \alpha_0} x(t) - \mu^{\infty} x(t) \\ &\geq \lambda_{\infty} - \left( \frac{b^{\infty} \alpha_0}{1 + k_{2\infty} \alpha_0} + \mu^{\infty} \right) x(t). \end{aligned}$$

运用比较原理可得:

$$\liminf_{t \rightarrow +\infty} x(t) > \left[ \frac{\lambda_{\infty}}{\frac{b^{\infty} \alpha_0}{1 + k_{2\infty} \alpha_0} + \mu^{\infty}} \right]_{\infty} \triangleq \delta_1^{\alpha_0}, \tag{17}$$

对所有  $t > T_6$  成立。则存在常量  $T_7 \geq T_6$ , 使得  $x(t) \geq \delta_1^{\alpha_0}$  对所有  $t \geq T_7$  成立。

由系统(3)的第一个方程可得: 对任意的  $t > T_7$ ,

$$y'(t) \geq \frac{n_{\infty} b_{\infty} e^{-d_j^{\infty} \tau} \delta_1^{\alpha_0}}{1 + k_1^{\infty} \delta_1^{\alpha_0}} y(t - \tau) - d^{\infty} y(t),$$

由  $R_* > 1$ , 从而  $n_{\infty} b_{\infty} e^{-d_j^{\infty} \tau} \delta_1^{\alpha_0} > d^{\infty} (1 + k_1^{\infty} \delta_1^{\alpha_0})$ , 即  $\liminf_{t \rightarrow +\infty} y(t) > 1 + \varepsilon$ , 矛盾, 从而(15)的结论是正确的。

为了得到  $y(t)$  的一致持久性, 将从以下两种可能情形进行讨论:

1) 存在  $T \geq T^*$ , 当  $t \geq T$  ( $T^* = T_7 + \tau$ ) 时, 使得  $y(t) \geq \alpha_0$ 。

2)  $y(t)$  在  $\alpha_0$  附近振荡, 并对所有  $T$  成立。

如果情形 1 成立, 显然  $y(t)$  是持久的。因此, 这里仅考虑第二种情形。假设  $t_1, t_2$  足够大且满足:

$$y(t_1) = y(t_2) = \alpha_0, \quad y(t) < \alpha_0, \quad t \in (t_1, t_2).$$

如果  $t_2 - t_1 \leq T^*$ , 那么  $y'(t) \geq -d(t)y(t)$  以及  $y(t_1) = \alpha_0$  隐含着:  $y(t) \geq \alpha_0 \exp(-d^\infty T^*) \triangleq \delta_2, t \in [t_1, t_2]$ 。

如果  $t_2 - t_1 > T^*$ , 由于当  $t \geq T_7$  时  $x(t) > \delta_1^{\alpha_0}$ , 可知  $x(t) > \delta_1^{\alpha_0}$  对所有  $t \in [t_1 + T^*, t_2]$  成立, 因此可得  $y(t) > \delta_2^{\alpha_0}$  在  $t \in [t_1 + T^*, t_2]$  上成立。如果此结果不成立, 则存在  $\tilde{T}$  使得  $y(t) > \delta_2, y(t_1 + T^* + \tilde{T}) = \delta_2, y'(t_1 + T^* + \tilde{T}) \leq 0$  对所有  $t \in [t_1, t_1 + \tilde{T} + T^*]$  成立。由系统(3)中的第二方程, 令  $t = t_1 + \tilde{T} + T^*$ , 可得:

$$y'(t) = \frac{n(t-\tau)b(t-\tau)x(t-\tau)y(t-\tau)e^{-\int_{t-\tau}^t d_j(s)ds}}{1+k_1(t-\tau)x(t-\tau)+k_2(t-\tau)y(t-\tau)} - d(t)y(t) \geq \delta_2 \left( \frac{n_\infty b_\infty e^{-d_j^\infty \tau} \delta_1^{\alpha_0}}{1+k_1^\infty \delta_1^{\alpha_0} + k_2^\infty \alpha_0} - d^\infty \right) > 0.$$

矛盾, 从而  $\liminf_{t \rightarrow +\infty} y(t) \geq \delta_2$  在  $t \in [t_1, t_2]$  成立。

**第三步:**

$$\liminf_{t \rightarrow +\infty} y_j(t) \geq \delta_3.$$

由系统(3)中的第三个方程及上述结果, 可得:

$$y_j(t) = \int_{t-\tau}^t \frac{n(s)b(s)x(s)y(s)e^{-\int_s^t d_j(u)du}}{1+k_1(s)x(s)+k_2(s)y(s)} ds \geq \frac{n_\infty b_\infty \delta_1 \delta_2}{1+K_1^\infty \delta_1 + K_2^\infty \delta_2} \int_{t-\tau}^t e^{-\int_s^t d_j(u)du} ds \geq \frac{n_\infty b_\infty \delta_1 \delta_2 (1 - e^{-d_j^\infty \tau})}{d_j^\infty (1+K_1^\infty \delta_1 + K_2^\infty \delta_2)} \triangleq \delta_3.$$

从而, 由定理 1 可知, 捕食者是一致持久的。

#### 4.2. $R^* < 1$ 时捕食者的灭绝性

**定理 2:** 如果  $R^* = \frac{n^\infty b^\infty e^{-d_{j_\infty} \tau} \lambda^\infty}{d_\infty (\mu_\infty + K_{1_\infty} \lambda^\infty)} < 1$  成立, 则系统(3)中具有初值条件(4)的成年捕食者是灭绝的。

证明: 由(5)式可知, 存在  $T_2 > T_1 > 0$ , 使得当  $t \geq T_2$  时,  $x(t) \leq \frac{\lambda^\infty}{\mu_\infty}$ 。

从而:

$$y'(t) = \frac{n(t-\tau)b(t-\tau)x(t-\tau)y(t-\tau)e^{-\int_{t-\tau}^t d_j(s)ds}}{1+k_1(t-\tau)x(t-\tau)+k_2(t-\tau)y(t-\tau)} - d(t)y(t) \leq \frac{n^\infty b^\infty \frac{\lambda^\infty}{\mu_\infty} e^{-d_{j_\infty} \tau}}{1+K_{1_\infty} \frac{\lambda^\infty}{\mu_\infty}} y(t-\tau) - d_\infty y(t).$$

令

$$H'(t) = \frac{n^\infty b^\infty e^{-d_{j_\infty} \tau} \lambda^\infty}{\mu_\infty + K_{1_\infty} \lambda^\infty} H(t-\tau) - d_\infty H(t)$$

由  $R^* < 1$ , 以及文献[25]中的引理, 可得  $\lim_{t \rightarrow +\infty} H(t) = 0$ , 应用比较原理, 最终可得当  $t \rightarrow \infty$  时,  $y(t) \rightarrow 0$ , 显然也有  $\lim_{t \rightarrow +\infty} y_j(t) = 0$ , 从而证明了成年捕食者的灭绝性。

#### 5. 数值模拟

很多因素都可以影响物种的持久生存, 其中之一就是物种本身种群规模的大小, 物种自身的成熟期会影响到物种的种群数量, 倘若幼年捕食者的成熟期较长, 很可能导致捕食者的灭绝, 这一结论与



Gourley 和 Kuang [26]文献中针对具有 Holling II 功能反应函数的模型讨论结果类似。考虑系统(3)中的所有参数为周期或一般时变的情形,进行了数值模拟。

图 1: 展示了系统(3)解的持久性, 参数选取如下:

$$b(t)=0.8 ; \lambda(t)=2+\sin t ; n(t)=2+\sin t ; \mu(t)=0.5 ; k_1(t)=1 ; k_2(t)=2 ; d(t)=0.25 ; d_j(t)=0.1, x(\theta) \equiv 0.1, y(\theta) \equiv 1, \theta \in[-\tau, 0] .$$

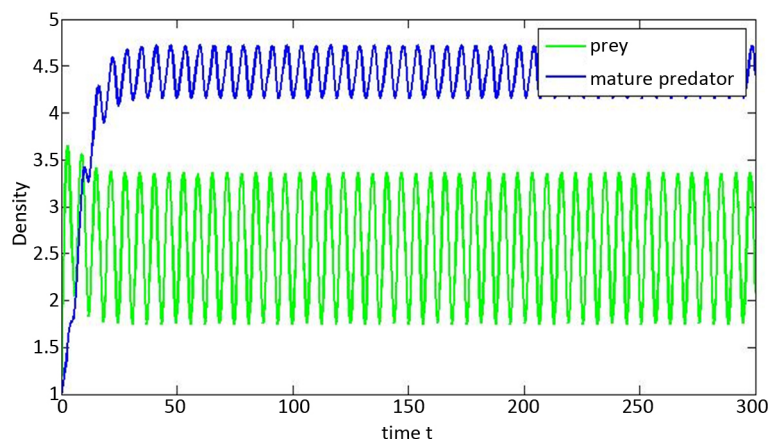


Figure 1. Basic behavior of solutions of system (3) with  $\tau = 2$

图 1. 系统(3)在  $\tau = 2$  时的解的基本性态

图 2: 展示了系统(3)成年捕食者的灭绝性, 参数选取如下:

$$b(t)=0.8 ; \lambda(t)=1.5+\sin t ; n(t)=1+\sin t ; \mu(t)=0.5 ; k_1(t)=1 ; k_2(t)=2 ; d(t)=0.25 ; d_j(t)=0.6 ; x(\theta) \equiv 0.1, y(\theta) \equiv 1, \theta \in[-\tau, 0] .$$

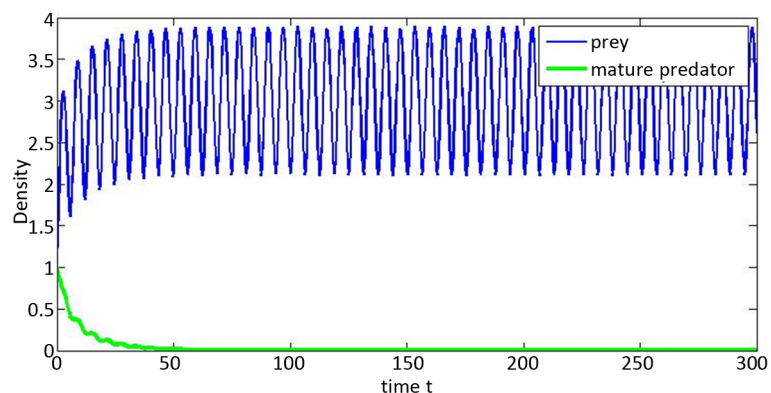


Figure 2. The mature predator in system (3) is extinct

图 2. 系统(3)中的成年食饵是灭绝的

图 1 和图 2 分别展示了当幼年捕食者的成熟期为  $\tau = 2$  时, 捕食者与食饵的持久共存性以及成年捕食者的灭绝性, 不仅对本章所得结论进行了验证, 并且还弥补了文中没有证明系统解的持久性这一点。

## 6. 结论

本章研究了食饵具有时变指数增长率且捕食者具有阶段结构的非自治捕食 - 食饵模型, 模型综合考虑了时变、非自治、捕食者的阶段结构等因素, 本文不仅给出了模型解的正性和有界性, 还给出了捕食

者的灭绝性的结论。在证明系统解的一致持久性结论中，由于捕食者之间存在着干扰效应，模型中所有参数为时变参数，给定性分析系统解的一致持久性带来了困难，但依据比较系统理论知识以及通过定义捕食者的净再生数等方式，仍然给出了捕食者的一致持久性证明。通过数值模拟图形可以发现，当幼年捕食者的成熟期固定时，倘若幼年食饵的死亡率增加，并且成年捕食者的出生率降低，则会导致捕食者的灭绝。故在实际的生物系统中，对于那些种群繁殖环境恶劣，幼年捕食者存活率低的种群，其种群的持久生存面临极大的考验。

## 致 谢

在此特别感谢哈工大的刘胜强教授以及哈尔滨师范大学的李冰博士对本文前期工作的支持，与两位学者交流的过程中收获了很多益于本文写作的建议。

## 参考文献

- [1] Fan, M. and Kuang, Y. (2004) Dynamics of a Non-Autonomous Predator-Prey System with the Beddington-DeAngelis Functional Response. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **295**, 15-39. <https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2004.02.038>
- [2] Hsu, S.B., Hwang, T.M. and Kuang, Y. (2003) Global Analysis of Michaelis-Menten Type Ratio-Dependent Predator-Prey System. *Journal of Mathematical Biology*, **42**, 489-506. <https://doi.org/10.1007/s002850100079>
- [3] Jost, C. and Ellner, S. (2000) Testing for Predator Dependence in Predator-Prey Dynamics: A Nonparametric Approach. *Proceedings of the Royal Society of London. Series B*, **267**, 1611-1620. <https://doi.org/10.1098/rspb.2000.1186>
- [4] Rui, X., Davidson, F.A. and Chaplain, M.A.J. (2002) Persistence and Stability for a Two-Species Ratio-Dependent Predator-Prey System with Distributed Time Delay. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **269**, 256-277. [https://doi.org/10.1016/S0022-247X\(02\)00020-3](https://doi.org/10.1016/S0022-247X(02)00020-3)
- [5] Wang, Y., Wu, H. and Sun, S. (2012) Persistence of Pollination Mutualisms in Plant Pollinator-Robber. *Theoretical Population Biology*, **81**, 243-250. <https://doi.org/10.1016/j.tpb.2012.01.004>
- [6] Abrams, A. and Ginzburg, L.R. (2000) The Nature of Predation Prey Dependent, Ratio Dependent or Neither. *Trends Ecology Evolution*, **15**, 337-341. [https://doi.org/10.1016/S0169-5347\(00\)01908-X](https://doi.org/10.1016/S0169-5347(00)01908-X)
- [7] Huang, C.-Y., Zhao, M. and Zhao, L.-C. (2010) Permanence of Periodic Predator-Prey System with Two Predators and Stage Structure for Prey. *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, **11**, 503-514. <https://doi.org/10.1016/j.nonrwa.2009.01.001>
- [8] Beddington, J.R. (1975) Mutual Interference between Parasites or Predators and Its Effect on Searching Efficiency. *Journal of Animal Ecology*, **44**, 331-340. <https://doi.org/10.2307/3866>
- [9] Deangelis, D.L., Coldstein, R.A. and Neill, R.V. (1975) A Model for Trophic Interaction. *Ecology*, **56**, 881-892. <https://doi.org/10.2307/1936298>
- [10] Skalski, G.T. and Filliam, J.F. (2001) Functional Responses with Predator Inter-Ference: Viable Alternatives to the Holling Type II Model. *Ecology*, **82**, 3083-3092. [https://doi.org/10.1890/0012-9658\(2001\)082\[3083:FRWPV\]2.0.CO;2](https://doi.org/10.1890/0012-9658(2001)082[3083:FRWPV]2.0.CO;2)
- [11] Cantrell, R.S. and Cosner, C. (2001) On the Dynamics of Predator-Prey Model with the Beddington-DeAngelis Functional. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **257**, 206-222. <https://doi.org/10.1006/jmaa.2000.7343>
- [12] Hwang, Z.W. (2003) Global Analysis of the Predator-Prey System with Beddington-DeAngelis Functional Response. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **281**, 395-401. [https://doi.org/10.1016/S0022-247X\(02\)00395-5](https://doi.org/10.1016/S0022-247X(02)00395-5)
- [13] Liu, S. and Zhang, J. (2008) Coexistence and Stability of Predator-Prey Model of Bedding-DeAngelis Functional Response. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **342**, 446-460. <https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2007.12.038>
- [14] Aiello, W. and Freedman, H.I. (1990) A Time-Delay Model of Single-Species Growth with Stage Structure. *Mathematical Biosciences*, **101**, 139-153. [https://doi.org/10.1016/0025-5564\(90\)90019-U](https://doi.org/10.1016/0025-5564(90)90019-U)
- [15] Al-omari, J. and Gourley, S. (2003) Stability and Traveling Fronts in Lotka-Volterra Competition Models with Stage Structure. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, **63**, 2063-2086. <https://doi.org/10.1137/S0036139902416500>
- [16] Liu, S., Chen, L., Luo, G. and Jiang, J. (2002) Asymptotic Behavior of Competitive Lotka-Volterra System with Stage Structured. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **271**, 124-138. [https://doi.org/10.1016/S0022-247X\(02\)00103-8](https://doi.org/10.1016/S0022-247X(02)00103-8)

- [17] Liu, S., Chen, L. and Agarwal, R. (2002) Recent Progress on Stage-Structured Population Dynamics. *Mathematical and Computer Modelling*, **36**, 1319-1360. [https://doi.org/10.1016/S0895-7177\(02\)00279-0](https://doi.org/10.1016/S0895-7177(02)00279-0)
- [18] Ou, L., Luo, Y., Jiang, Y. and Li, Y. (2003) The Asymptotic Behaviors of a Stage-Structured Autonomous Predator-Prey System with Time Delay. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **283**, 534-548. [https://doi.org/10.1016/S0022-247X\(03\)00283-X](https://doi.org/10.1016/S0022-247X(03)00283-X)
- [19] Liu, S. and Edoardo, B. (2010) Predator-Prey Model of Beddington-DeAngelis Type with Maturation and Gestation Delays. *Nonlinear Analysis*, **11**, 4072-4091. <https://doi.org/10.1016/j.nonrwa.2010.03.013>
- [20] Liu, S. and Edoardo, B. (2006) A Stage-Structured Predator-Prey Model of Beddington-DeAngelis Type. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, **4**, 1001-1129. <https://doi.org/10.1137/050630003>
- [21] Cushing, J.M. (1977) Periodic Time-Dependent Predator-Prey System. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, **32**, 82-95. <https://doi.org/10.1137/0132006>
- [22] Yang, S.J. and Shi, B. (2008) Periodic Solution for a Three-Stage-Structured Predator-Prey System with Time Delay. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **341**, 287-294. <https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2007.10.025>
- [23] Zhang, T. and Teng, Z. (2007) On a Non-Autonomous Seirs Model in Epidemiology. *Bulletin of Mathematical Biology*, **69**, 2537-2559. <https://doi.org/10.1007/s11538-007-9231-z>
- [24] Song, X. and Chen, L. (2001) Optimal Harvesting and Stability for a Two-Species Competitive System with Stage-Structure. *Mathematical Biosciences*, **170**, 173-186. [https://doi.org/10.1016/S0025-5564\(00\)00068-7](https://doi.org/10.1016/S0025-5564(00)00068-7)
- [25] Niu, X., Zhang, T. and Teng, Z. (2011) The Asymptotic Behavior of a Non-Autonomous Eco-Epidemic Model with Disease in the Prey. *Applied Mathematical Modelling*, **35**, 457-470. <https://doi.org/10.1016/j.apm.2010.07.010>
- [26] Gourley, S.A. and Kuang, Y. (2004) A Stage-Structured Predator-Prey Model and Its Dependence on Through-Stage Delay and Death Rate. *Journal of Mathematical Biology*, **49**, 188-200. <https://doi.org/10.1007/s00285-004-0278-2>

**知网检索的两种方式:**

1. 打开知网页面 <http://kns.cnki.net/kns/brief/result.aspx?dbPrefix=WWJD>  
下拉列表框选择: [ISSN], 输入期刊 ISSN: 2160-7583, 即可查询
2. 打开知网首页 <http://cnki.net/>  
左侧“国际文献总库”进入, 输入文章标题, 即可查询

投稿请点击: <http://www.hanspub.org/Submission.aspx>

期刊邮箱: [pm@hanspub.org](mailto:pm@hanspub.org)