Pure Mathematics 理论数学, 2018, 8(6), 637-643
Published Online November 2018 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2018.86085

Hans汉斯

Global Attractor for a Class of Nonlinear Generalized Kirchhoff Equation

Penghui Lv*, **Xiaojun Lv**

School of information, Tourism and Cultural College, Yunnan University, Lijiang Yunnan
Email: *18487279097@163.com

Received: Oct. 17th, 2018; accepted: Oct. 29th, 2018; published: Nov. 13th, 2018

Abstract

The paper studies the longtime behavior of solutions to the initial boundary value problem (IBVP) for a class of Kirchhoff models: $u_{tt}+\alpha u_t-\beta\Delta u_t-\phi\left(\|\nabla u\|^2\right)\Delta u+\left(1+|u|^2\right)^{p-1}u=f(x)$. We show the semigroup $S(t)$ has a $\left(\left(H^2\cap H_0^1\right)\times H_0^1,\left(H^2\cap H_0^1\right)\times\left(H^2\cap H_0^1\right)\right)$-global attractor.

Keywords

Generalized Kirchhoff Equation, Well-Posedness, Global Attractor

一类广义非线性Kirchhoff型方程的整体吸引子

吕鹏辉*，**吕小俊**

云南大学旅游文化学院信息学院，云南 丽江
Email: *18487279097@163.com

收稿日期：2018年10月17日；录用日期：2018年10月29日；发布日期：2018年11月13日

摘 要

该文研究了广义Kirchhoff型方程：$u_{tt}+\alpha u_t-\beta\Delta u_t-\phi\left(\|\nabla u\|^2\right)\Delta u+\left(1+|u|^2\right)^{p-1}u=f(x)$的初边值问题的解的长时间行为。证明上述问题对应的算子半群$S(t)$存在$\left(\left(H^2\cap H_0^1\right)\times H_0^1,\left(H^2\cap H_0^1\right)\times\left(H^2\cap H_0^1\right)\right)$-整体吸引子。

*通讯作者。

文章引用: 吕鹏辉, 吕小俊. 一类广义非线性 Kirchhoff 型方程的整体吸引子[J]. 理论数学, 2018, 8(6): 637-643.
DOI: 10.12677/pm.2018.86085

关键词

广义Kirchhoff方程，适定性，整体吸引子

1. 引言

本文研究下列非线性 Kirchhoff 型方程的整体吸引子：

$$u_{tt}+\alpha u_t-\beta\Delta u_t-\phi\left(\|\nabla u\|^2\right)\Delta u+\left(1+|u|^2\right)^{p-1}u=f(x)\quad \text{in } \Omega\times R^+, \tag{1.1}$$

$$u(x,0)=u_0(x);u_t(x,0)=u_1(x),\quad x\in\Omega, \tag{1.2}$$

$$u(x,t)\big|_{\partial\Omega}=0,\quad (x)\in\Omega. \tag{1.3}$$

其中 Ω 是 R^3 中具有光滑边界的有界域，$p\geq 1$，且 α,β 都是正常数，有关 $\phi\left(\|\nabla u\|^2\right)$ 的假设将会在后文中给出。

整体吸引子是学习各种耗散非线性演化方程解的渐近性行为的基本概念。从物理学观念看，耗散方程(1.1)的整体吸引子表示在自然能量空间中从任何时间点开始最终都将处于永久状态，其维数表示相关湍流现象的自由度的数量，因此表示流动性的复杂程度。关于吸引子和其维数的所有信息都将定性性质限定为定量性质，从而产生关于该物理系统可以产生的有关流体的有价值的信息[1] [2] [3] [4]。

关于 Kirchhoff 方程已经有了很多深入的研究。Igor Chueshov [5]研究了下列具有非线性强阻尼的 Kirchhoff 波方程的长时间行为：

$$\partial_{tt}u-\sigma\left(\|\nabla u\|^2\right)\Delta\partial_t u-\phi\left(\|\nabla u\|^2\right)\Delta u+f(u)=h(x). \tag{1.4}$$

近年，Cheng Jian ling 和 Yang Zhijian [6]研究了下列具有强阻尼项的 Kirchhoff 型方程的长时间行为：

$$u_{tt}-M\left(\|\nabla u(t)\|_2^2\right)\Delta u-\Delta u_t+g(x,u)+h(u_t)=f(x), \tag{1.7}$$

其中 $M(s)=1+s^{\frac{m}{2}}$，$m\geq 1$。$\Omega\in\mathbf{R}^N$ 是具有光滑边界 $\partial\Omega$ 的有界域。

Yang Zhijian [7]也研究了在 $\mathbf{R}^N$ 中具有强阻尼想的 Kirchhoff 型方程的长时间行为：

$$u_{tt}-M\left(\|\nabla u\|^2\right)\Delta u-\Delta u_t+u+u_t+g(x,u)=f(x), \tag{1.8}$$

其中 $M(s)=1+s^{\frac{m}{2}}$，$m\geq 1$。$\Omega\in\mathbf{R}^N$ 是具有光滑边界 $\partial\Omega$ 的有界域，$f(x)$ 是一个外力项。文章证明了有关连续解半群 $S(t)$ 拥有整体吸引子，同时存在有限分形维数和 Hausdorff 维数。

Meihua Yang 和 Chunyou Sun [8]研究了在非线性临界增长条件下，强阻尼波方程的整体吸引子的存在性：

$$u_{tt}-\Delta u-\Delta u+f(u)=g(x), \tag{1.9}$$

该整体吸引子为在 $H^2(\Omega)\times H^2(\Omega)$ 中有界，且在 $H_0^1(\Omega)\times H_0^1(\Omega)$ 范数下吸引 $H_0^1(\Omega)\times L^2(\Omega)$ 中的每个有

界集。

Vittotino 和 Sergey Zelik [9]证明了下列半线性强阻尼波方程紧整体吸引子：

$$u_{tt}-\Delta u_t-\Delta u+\varphi(u)=f\ . \tag{1.10}$$

Penghui Lv，Jingxin Lu 和 Guoguang Lin [10]证明了下列广义非线性 Kirchhoff 方程的整体吸引子：

$$u_{tt}+\alpha u_t-\beta\Delta u_t-\phi\left(\|\nabla u\|^2\right)\Delta u+\left(1+|u|^2\right)^{p-1}u=f(x)\,. \tag{1.11}$$

该文得到了半群 $S(t)$ 在空间 $H^2(\Omega)\cap H_0^1(\Omega)\times H_0^1(\Omega)$ 中存在整体吸引子。

关于波方程的整体吸引子，多数集中研究其 $(X\times X)$-整体吸引子，同样的，文献[10]中得到 $(X_1\times X_1)$-整体吸引子，为了更进一步研究(1.11)的长时间性态，现在关心的问题是对(1.11)是否存在一个紧的 $(X_1\times X_2)$-整体吸引子。通过研究，结论是肯定的。

2. 记号和主要结论

为叙述方便，我们引入下列符号：

$$L^p=L^p(\Omega),\quad W^{k,p}=W^{k,p}(\Omega),\quad H^k=W^{k,2},\quad H=L^2,\quad \|\cdot\|=\|\cdot\|_{L^2},$$

$$\|\cdot\|_p=\|\cdot\|_{L^p},\quad V_2=H^2\cap H_0^1,\quad V_{2'}=V_{-2},\quad X_1=V_2\times H_0^1,\quad X_2=V_2\times V_2$$

其中 $p\ge1$。$W^{-1,p'}$ 为 $W_0^{1,p}$ 的共轭空间，$p'=\dfrac{p}{p-1}$。H^k 是 L^2-内积下的 Sobolev 空间，同时 H_0^k 表示 $C_0^\infty(\Omega)$ 在 H^k 中的闭包($k>0$)。符号 $(\cdot,\cdot)$ 表示 H-内积。

定义算子 $A:V_2\to V_{2'}$，

$$(Au,v)=(\Delta u,\Delta v),\quad u,v\in V_2.$$

则，算子 $A^s\,(s\in R)$ 是正定的且空间 $V_s=D\left(A^{\frac{s}{4}}\right)$ 是 Hilbert 空间

$$(u,v)_s=\left(A^{\frac{s}{4}}u,A^{\frac{s}{4}}v\right),\quad \|u\|_{V_s}=\left\|A^{\frac{s}{4}}u\right\|,$$

特别的，

$$\|u\|_{V_2}=\left\|A^{\frac{1}{2}}u\right\|=\|\Delta u\|,\quad \|u\|_{V_1}=\left\|A^{\frac{1}{4}}u\right\|=\|\nabla u\|,\quad \xi_z(t)=\left(z(t),z_t(t)\right).$$

定理 2.1 [10]：假定

(H$_1$) $\phi\in C^1\left(\mathbf{R}^+\right)$，$\phi'(s)\ge0$，$\phi(0)\triangleq\phi_0\ge1$，

(H$_2$) $1\le p\le2$，

(H$_3$) $f\in H$，$(u_0,u_1)\in V_2\times H_0^1$。则问题(1.1)~(1.3)的唯一解 (u,v) 满足

$$\|\xi_u(t)\|_{X_1}^2+\int_t^\infty\|\Delta u_t(\tau)\|^2\,\mathrm{d}\tau\le Q\left(\|\xi_u(0)\|_{X_1}^2\right)\mathrm{e}^{-\delta t}+Q(\|f\|),$$

其中 $Q(\cdot)$ 在 $[0,\infty)$ 中为非减函数。

评论 2.1 [10]：在定理 2.1 的条件下，可以得到 $\phi(s)$ 及 $\phi'(s)$ 是有界函数。

定理 2.2 [10]：在定理 2.1 的条件下，则由方程(1.1)的解在能量空间 X_1 下的连续半群 $S(t)$ 在 X_1 中存在整体吸引子 A_{X_1}。

定理 2.3：在定理 2.1 的条件下，则由方程(1.1)的解在能量空间 X_1 下的连续半群 $S(t)$ 在 X_1 中渐近光滑的。

3. (X_1, X_2)-整体吸引子 A

引理 3.1：在假设(H_1)~(H_3)条件下，所有的 $t>0$，我们有下列不等式

$$\min\{\beta t,1\}\|\Delta u_t(t)\|^2+\int_0^t \min\{\beta\tau,1\}\|u_{tt}(\tau)\|^2\,\mathrm{d}\tau \le Q\left(\|\xi_u(0)\|_{X_1}^2+\|f\|\right),$$

其中 $Q(\cdot)$ 在 $[0,\infty)$ 中为非减函数。

证明：定义

$$\Lambda_1=\alpha\|\nabla u_t\|^2+\beta\|\Delta u_t\|^2+2\phi\left(\|\nabla u\|^2\right)(\Delta u,\Delta u_t)-2(f,\Delta u_t).$$

则根据评论 2.1 及定理 2.1 易得：

$$\frac{\beta}{2}\|\Delta u_t\|^2-Q\left(\|\xi_u(0)\|_{X_1}^2+\|f\|\right)\le \Lambda_1\le \beta Q\left(\|\xi_u(0)\|_{X_1}^2+\|f\|\right)\|\Delta u_t\|^2, \tag{3.1}$$

(1.1)与 $-\Delta u_{tt}$ 作 H 内积得到

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Lambda_1+2\|\nabla u_{tt}\|^2=2\left(\left(1+|u|^2\right)^{p-1}u,\Delta u_{tt}\right)+4\phi'\left(\|\nabla u\|^2\right)(\nabla u,\nabla u_t)(\Delta u,\Delta u_t). \tag{3.2}$$

由

$$\begin{aligned}\left(\left(1+|u|^2\right)^{p-1}u,\Delta u_{tt}\right)&=-\left(2(p-1)\left(1+|u|^2\right)^{p-2}u^2\nabla u+\left(1+|u|^2\right)^{p-1}\nabla u,\nabla u_{tt}\right)\\&\le C\left(1+\|u\|_{6p-6}^{2p-2}\right)\|\nabla u\|_6\|\nabla u_{tt}\|\le C\left(1+\|\Delta u\|^{4p-4}\right)\|\Delta u\|^2+\|\nabla u_{tt}\|^2\end{aligned}, \tag{3.3}$$

及

$$\phi'\left(\|\nabla u\|^2\right)(\nabla u,\nabla u_t)(\Delta u,\Delta u_t)\le C\|\Delta u\|^2\|\Delta u_t\|^2. \tag{3.4}$$

利用定理 2.1，我们得到

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Lambda_1+\|\nabla u_{tt}\|^2\le Q\left(\|\xi_u(0)\|_{X_1}^2+\|f\|\right)\|\Delta u_t\|^2. \tag{3.5}$$

首先对 $t\in(0,1]$，(3.5)乘以 τ，并对 $\mathrm{d}\tau$ 求 $[0,t]$ 积分，得到

$$t\Lambda_1(t)+\int_0^t \tau\|\nabla u_{tt}\|^2\,\mathrm{d}\tau\le Q\left(\|\xi_u(0)\|_{X_1}^2+\|f\|\right)\int_0^t\|\Delta u_t\|^2\,\mathrm{d}\tau+\int_0^t\Lambda_1(\tau)\,\mathrm{d}\tau.$$

结合定理 2.1 及(3.1)，我们最终得到不等式

$$\frac{t\beta}{2}\|\Delta u_t(t)\|^2+\int_0^t\tau\|\nabla u_{tt}(\tau)\|^2\,\mathrm{d}\tau\le Q\left(\|\xi_u(0)\|_{X_1}^2+\|f\|\right). \tag{3.6}$$

当 $t>1$ 时，(3.5)对 $\mathrm{d}\tau$ 求 $(1,t)$ 积分，得到

$$\Lambda_1(t)+\int_1^t\|\nabla u_{tt}\|^2\,\mathrm{d}\tau\le Q\left(\|\xi_u(0)\|_{X_1}^2+\|f\|\right)+\Lambda_1(1). \tag{3.7}$$

结合(3.1)、(3.6)及(3.7)，我们最终得到不等式

$$\frac{\beta}{2}\|\Delta u_t(t)\|^2+\int_0^t\tau\|\nabla u_{tt}(\tau)\|^2\,\mathrm{d}\tau\le Q\left(\|\xi_u(0)\|_{X_1}^2+\|f\|\right). \tag{3.8}$$

结合(3.6)及(3.8)，结论得证。

引理 3.2：在假设(H_1)~(H_3)条件下，所有的$t>0$，我们有下列不等式

$$\min\left\{t^2,1\right\}\left\|\nabla u_{tt}(t)\right\|^2\le Q\left(\left\|\xi_u(0)\right\|_{X_1}^2+\|f\|\right),$$

其中$Q(\cdot)$在$[0,\infty)$中为非减函数。

证明：设$q=u_t$，则方程(1.1)化为

$$\begin{aligned}&q_{tt}+\alpha q_t-\beta\Delta q_t-2\phi'\left(\left\|\nabla u(t)\right\|^2\right)(\nabla u_t,\nabla u)\Delta u-\phi\left(\left\|\nabla u(t)\right\|^2\right)\Delta q\\&+\left[2(p-1)\left(1+|u|^2\right)^{p-2}u^2+\left(1+|u|^2\right)^{p-1}\right]q=0\end{aligned}. \tag{3.9}$$

定义

$$\Lambda_2=\left\|\nabla q_t\right\|^2+\left\|\Delta q\right\|^2.$$

(3.9)与$-\Delta q_t$作H内积得到

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left\|\nabla q_t\right\|^2+\phi\left(\|\nabla u\|^2\right)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left\|\nabla q_t\right\|^2+\alpha\left\|\nabla q_t\right\|^2+\beta\left\|\Delta q_t\right\|^2\\&=-2\phi'\left(\|\nabla u\|^2\right)(\Delta u,\Delta q_t)+\left(\left(2(p-1)\left(1+|u|^2\right)^{p-2}u^2+\left(1+|u|^2\right)^{p-1}\right)q,\Delta q_t\right)\end{aligned}.$$

由

$$\begin{aligned}&\left(2(p-1)\left(1+|u|^2\right)^{p-2}u^2q+\left(1+|u|^2\right)^{p-1}q,\Delta q_t\right)\\&\le C\left(1+\|u\|_{6p-6}^{2p-2}\right)\|q\|_6\left\|\Delta q_t\right\|\le C\left(1+\|\Delta u\|^{4p-4}\right)\|\nabla q\|^2+\left\|\Delta q_t\right\|^2\end{aligned} \tag{3.10}$$

及

$$-\phi'\left(\|\nabla u\|^2\right)(\Delta u,\Delta q_t)\le C\|\Delta u\|\left\|\Delta q_t\right\|^2. \tag{3.11}$$

利用定理 2.1，我们得到

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Lambda_2+\delta\left\|\Delta q_t\right\|^2\le Q\left(\left\|\xi_u(0)\right\|_{X_1}^2+\|f\|\right)\left\|\Delta q_t\right\|^2. \tag{3.12}$$

首先对$t\in(0,1]$，(3.12)乘以τ^2，并对$\mathrm{d}\tau$求$[0,t]$积分，由定理 2.1 得到

$$t^2\Lambda_2(t)\le Q\left(\left\|\xi_u(0)\right\|_{X_1}^2+\|f\|\right).$$

即有

$$t^2\left\|\nabla q_t(t)\right\|^2\le Q\left(\left\|\xi_u(0)\right\|_{X_1}^2+\|f\|\right). \tag{3.13}$$

当$t>1$时，(3.12)对$\mathrm{d}\tau$求$(1,t)$积分，得到

$$\left\|\nabla q_t(t)\right\|^2\le\Lambda_2(t)\le Q\left(H(0)+\|f\|\right)+\Lambda(1)\le Q\left(\left\|\xi_u(0)\right\|_{X_1}^2+\|f\|\right). \tag{3.14}$$

结合(3.13)及(3.14)，结论得证。

在引理 3.1 和引理 3.2 下可以得到，A_{X_1}在$V_2\times V_2$有界。

下面，我们将证明 A_{X_1} 为 (X_1, X_2)-整体吸引子。为得到结果，由引理 3.1 和引理 3.2 (引理说明有界 (X_1, X_2)-吸收集存在 B_1)，我们仅需证明渐近紧性。

引理 3.3：(在 *V*-范数下的连续性) 令 $z_0^n = (u_0^n, v_0^n) \in B_1, n = 1, 2, \cdots$ 在 X_1-范数下的收敛序列，则对任意的 $t \geq 0$，$S(t) z_0^n$ 在 X_2-范数下为收敛序列。

证明： 令 $(u^i(t), u_t^i(t))(i = 1, 2)$ 为初值 $(u_0^i, v_0^i) \in B_1$ 得到的相关解，令 $z(t) = u^1(t) - u^2(t)$，则 z 满足

$$\begin{aligned} &z_{tt} + \alpha z_t - \beta \Delta z_t - \left(\phi\left(\left\|\nabla u^1(t)\right\|^2\right)\Delta u^1 - \phi\left(\left\|\nabla u^2(t)\right\|^2\right)\Delta u^2\right) \\ &+\left(1 + \left|u^1\right|^2\right)^{p-1} u^{12} - \left(1 + \left|u^2\right|^2\right)^{p-1} u^{22} = 0 \end{aligned}. \tag{3.15}$$

初值条件为

$$(z(0), z_t(0)) = (u_0^1, v_0^1) - (u_0^2, v_0^2).$$

边界条件为

$$z|_{\partial\Omega} = 0.$$

(3.15)与 $-\Delta z_t$ 作 H 内积得到

$$\alpha \|\nabla z_t\|^2 + \beta \|\Delta z_t\|^2 = -\left(z_{tt} - \left(\phi\left(\left\|\nabla u^1\right\|^2\right)\Delta u^1 - \phi\left(\left\|\nabla u^2\right\|^2\right)\Delta u^2\right) + \left(1 + \left|u^1\right|^2\right)^{p-1} u^{12} - \left(1 + \left|u^2\right|^2\right)^{p-1} u^{22}, -\Delta z_t\right),$$

其中

$$\left|(z_{tt}, \Delta z_t)\right| \leq \|\nabla z_{tt}\| \|\nabla z_t\|,$$

$$\begin{aligned} &\left|\left(\left(1 + \left|u^1\right|^2\right)^{p-1} u^{12} - \left(1 + \left|u^2\right|^2\right)^{p-1} u^{22}, \Delta z_t\right)\right| \\ &\leq C\left(1 + \left\|u^1\right\|_{6p-6}^{2p-2} + \left\|u^2\right\|_{6p-6}^{2p-2}\right)\|z\|_6 \|\Delta q_t\| \\ &\leq C\left(1 + \left\|\Delta u^1\right\|^{4p-4} + \left\|\Delta u^2\right\|^{4p-4}\right)\|\nabla z\|^2 + \|\Delta z_t\|^2 \end{aligned}$$

及

$$\left|\left(\phi\left(\left\|\nabla u^1\right\|^2\right)\Delta u^1 - \phi\left(\left\|\nabla u^2\right\|^2\right)\Delta u^2, \Delta z_t\right)\right| \leq C\|\Delta z\|^2 + \frac{\beta}{2}\|\Delta z_t\|^2.$$

由此，我们得到

$$\|\Delta z_t\|^2 \leq C\left(\|\nabla z_t\| + \|\Delta z\|^2\right).$$

结合 $S(t)$ 在 X_1-范数下的连续性及 (u_0^i, v_0^i) 的任意性，得到 $S(t)$ 在 X_2-范数下，在 B_1 中连续。

引理 3.4： 在假设(H_1)~(H_3)条件下，$S(t)$ 为 (X_1, X_2)-渐近紧。

证明： 由引理 3.1 和引理 3.2 及定理 2.1 及引理 3.3，我们即可得到 $S(t)$ 在有界 (X_1, X_2)-吸收集从 X_1 到 X_2 是 Lipschitz 的，即说明其 (X_1, X_2)-渐近紧。

结合以上结论，我们得到下面定理：

定理 3.2：((X_1, X_2)-整体吸引子的存在性) 在假设(H_1)~(H_3)条件下，$S(t)$ 为方程(1.1)的解在能量空间 X_1 下的连续半群，则 $S(t)$ 有 (X_1, X_2)-整体吸引子 A，其中，A 在 X_2 中是紧的、不变的，同时，在 X_2 范数下吸引 X_1 中的每个有界子集。

参考文献

[1] Yang, Z.J., Feng, N. and Ma, T.F. (2015) Global Attractor for the Generalized Double Dispersion Equation. *Nonlinear Analysis*, **115**, 103-116. https://doi.org/10.1016/j.na.2014.12.006

[2] 杨志坚, 程建玲. Kirchhoff 型方程解的渐近行为[J]. 数学物理学报, 2011, 31A(4): 1008-1021.

[3] Pata, V. and Zelik, S. (2006) Smooth Attractors for Strongly Damped Wave Equations. *Nonlinearity*, **19**, 1495-1506. https://doi.org/10.1088/0951-7715/19/7/001

[4] Lin, G.G. (2011) Nonlinear Evolution Equation. Yunnan University Press, Kunming.

[5] Chueshov, I. (2012) Long-Time Dynamics of Kirchhoff Wave Models with Strong Nonlinear Damping. *Journal of Differential Equations*, **252**, 1229-1262. https://doi.org/10.1016/j.jde.2011.08.022

[6] Cheng, J.L. and Yang, Z.J. (2011) Asymptotic Behavior of the Kirchhoff Type Equation. *Acta Mathematica Scientia*, **31A**, 1008-1021.

[7] Yang, Z.J. (2007) Longtime Behavior of the Kirchhoff Type Equation with Strong Damping on R^N. *Journal of Differential Equations*, **242**, 269-286. https://doi.org/10.1016/j.jde.2007.08.004

[8] Yang, M.H. and Sun, C.Y. (2009) Attractors for Strongly Damped Wave Equations. *Nonlinear Analysis*, **10**, 1097-1100. https://doi.org/10.1016/j.nonrwa.2007.12.001

[9] Pata, V. and Squassina. M. (2005) On the Strongly Damped Wave Equation. *Communications in Mathematical Physics*, **253**, 511-533. https://doi.org/10.1007/s00220-004-1233-1

[10] Lv, P.H., Lu, J.X. and Lin, G.G. (2016) Global Attractor for a Class of Nonlinear Generalized Kirchhoff Models. *Journal of Advances in Mathematics*, **12**, 6452-6462.