Pure Mathematics 理论数学, 2019, 9(5), 563-567
Published Online July 2019 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2019.95075

# Design and Solution of Inverse Problem of One-Dimensional Layered Boussinesq Equation

**Yuhong Jin, Leihao Zuo***

Department of Basic Courses, Naval University of Engineering, Wuhan Hubei
Email: jin_yuhong@sina.cn, *847393636@qq.com

Received: Jun. 14th, 2019; accepted: Jul. 2nd, 2019; published: Jul. 9th, 2019

## Abstract

**In homogeneous geology, the permeability coefficient is usually a constant, independent of spatial location. In heterogeneous geology, the permeability coefficient is a function related to the spatial position and changes with the spatial position. However, when dealing with the problem of heterogeneous geology in practice, we can approximate the heterogeneous geology as a multi-layer uniform geological composition. Correspondingly, the permeability coefficient can generally be approximated as a piecewise constant function, that is, in each space-time grid unit, it can be regarded as a constant value. This paper will give the description of layered Boussinesq equation, instance design, discretization solution method of inverse problem, numerical verification of instance, and give the solution process of inverse problem, and verify the effectiveness of the algorithm.**

## Keywords

**Inverse Problems, Boussinesq Equation, Layered**

# 一维分层Boussinesq方程反问题的设计与求解

**金裕红，左雷浩***

海军工程大学基础部，湖北 武汉
Email: jin_yuhong@sina.cn, *847393636@qq.com

收稿日期：2019年6月14日；录用日期：2019年7月2日；发布日期：2019年7月9日

## 摘 要

在均匀地质中，渗透系数通常是一个常数，与空间位置无关。在非均匀地质中，渗透系数就是一个与所在空间位置相关的函数，随着空间位置的变化而变化。但是在实际处理非均匀地质的问题时，我们可以

*通讯作者。

文章引用: 金裕红, 左雷浩. 一维分层 Boussinesq 方程反问题的设计与求解[J]. 理论数学, 2019, 9(5): 563-567.
DOI: 10.12677/pm.2019.95075

将非均匀地质近似为多层均匀地质构成，相应地，渗透系数通常可以近似为一个分段常数函数，即在每一个时空网格单元中，都可以视之为一个常数值。本文将给出分层Boussinesq方程的描述、实例设计、反问题离散化求解方法、实例数值验证等给出反问题的解决过程，并验证算法的有效性。

## 关键词

反问题，Boussinesq方程，分层



## 1. 一维分层 Boussinesq 方程反问题模型

在文献[1]中，对二维情况下的 Boussinesq 方程的渗透系数反演问题采用了变分伴随方法进行了研究，在本文中，我们对一维分两层情况下的 Boussinesq 方程渗透系数反演问题进行建模和数值实例的设计，并采用三次样条函数方法进行数值验证。

建立双层模型如下：

将区域 $0\le x\le 1, 0\le t\le 1$ 按空间分为两层，浓度时空分布函数 $h(x,t)$ 满足的 Boussinesq 方程可表述为如下形式：

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial h_1(x,t)}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\left[k_1h_1(x,t)\frac{\partial h_1(x,t)}{\partial x}\right]+f_1(x,t), 0\le x\le x_0^-, 0\le t\le 1\\
&\frac{\partial h_2(x,t)}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\left[k_2h_2(x,t)\frac{\partial h_2(x,t)}{\partial x}\right]+f_2(x,t), x_0^+<x\le 1, 0\le t\le 1
\end{aligned} \tag{1}$$

当渗透系数 $k_1$， $k_2$ 均设定为正常数时，浓度时空分布函数方程可简化为

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial h_1(x,t)}{\partial t}=k_1\frac{\partial}{\partial x}\left[h_1(x,t)\frac{\partial h_1(x,t)}{\partial x}\right]+f_1(x,t), 0\le x\le x_0^-, 0\le t\le 1\\
&\frac{\partial h_2(x,t)}{\partial t}=k_2\frac{\partial}{\partial x}\left[h_2(x,t)\frac{\partial h_2(x,t)}{\partial x}\right]+f_2(x,t), x_0^+<x\le 1, 0\le t\le 1
\end{aligned} \tag{2}$$

初始条件为： $h(x,0)=\varphi_1(x), 0\le x\le 1$

边界条件为： $h(0,t)=g_1(x)$， $h(1,t)=g_2(x)$， $0\le t\le 1$。

临界层边界为：在临界线 $x=x_0$ 上 $h(x,t)$ 连续， $\frac{\partial h(x,t)}{\partial x}$ 可能不连续，但 $\partial h(x,t)$ 连续，且 $\left.\frac{\partial h(x,t)}{\partial x}\right|_{x=x_0^-}=\lambda\left.\frac{\partial h(x,t)}{\partial x}\right|_{x=x_0^+}$，这一要求类似于热传递在不同介质临界面性质。

当满足上述方程及边界条件时，若函数 $h(x,t)$ 未知，已知参数及其他函数，则求解未知函数 $h(x,t)$ 的问题称为正问题；若方程中参数 $k_1$， $k_2$ 均为未知，初始条件与边界条件中的函数 $\varphi_1(x)$， $g_1(x)$， $g_2(x)$ 均已知，求解 $k_1$、 $k_2$、 $h(x,t)$ 的问题称为反问题。

在求解反问题时，必须添加额外信息，一般附加如下已知条件：

$$h(x,1)=\varphi_2(x)$$

## 2. 数值验证实例设计

考虑在计算过程中，我们取 $x_0=\frac{1}{2},k_1=1,k_2=2$ 并设定 $h(x,t)$ 的真值为

$$h(x,t)=\begin{cases}\frac{1}{10}(6x+1)t\mathrm{e}^{-t-x},\ 0\le x\le\frac{1}{2},\ 0\le t\le 1\\ \frac{1}{10}(10x-1)t\mathrm{e}^{-t-x},\ \frac{1}{2}<x\le 1,\ 0\le t\le 1\end{cases}\tag{3}$$

易验证 $\left.\frac{\partial h(x,t)}{\partial x}\right|_{x=\frac{1}{2}-0}=\lambda\left.\frac{\partial h(x,t)}{\partial x}\right|_{x=\frac{1}{2}+0}$，其中 $\lambda=\frac{1}{3}$

相应地，我们也得到了边界条件、初始条件以及附加条件的表达式：

$$h(x,0)=\varphi_1(x)=0$$

$$h(x,1)=\varphi_2(x)=\begin{cases}\frac{1}{10}(6x+1)\mathrm{e}^{-1-x},\ 0\le x\le\frac{1}{2}\\ \frac{1}{10}(10x-1)\mathrm{e}^{-1-x},\ \frac{1}{2}<x\le 1\end{cases}$$

$$h(0,t)=g_1(x)=\frac{1}{10}t\mathrm{e}^{-t}$$

$$h(1,t)=g_2(x)=\frac{9}{10}t\mathrm{e}^{-1-t}$$

从而，我们可以推算出 $f(x,t)$ 的表达式：

当 $0\le x\le\frac{1}{2}$ 时，

$$f(x,t)=\left(\frac{1}{10}-\frac{1}{10}t-\frac{3}{5}tx+\frac{3}{5}x\right)\mathrm{e}^{-t-x}+\left(\frac{6}{5}x-\frac{7}{50}-\frac{18}{25}x^2\right)t^2\mathrm{e}^{-2t-2x}$$

当 $\frac{1}{2}<x\le 1$ 时，

$$f(x,t)=\left(\frac{1}{10}t-\frac{1}{10}+x-tx\right)\mathrm{e}^{-t-x}+\left(\frac{44}{5}x-4x^2-\frac{71}{25}\right)t^2\mathrm{e}^{-2t-2x}$$

经验算可知上述给定的函数满足 Boussinesq 方程。

## 3. 基于三次样条方法的正问题离散化过程的调整

由于临界层的引入及其满足的条件关系式要求，浓度时空分布函数 $h(x,t)$ 在 $x=x_0$ 的左右两侧区域 $[0,x_0]\times[0,1]$ 与 $[x_0,1]\times[0,1]$ 应该用不同的双三次样条函数逼近；渗透系数函数为分段(2 段)常数，故不需要进行一元三次样条函数逼近，问题又变得相对简单一点。

利用逼近 $h(x,t)$ 的双三次样条函数 $H(x,t)$ 分别在区域 $[0,1]\times[0,1]$ 上近似满足 Boussinesq 方程，同样可建立关于 $H(x,t)$ 在区域 $(0,1)\times(0,1)$ 内部离散点处未知取值以及两个渗透系数常数 $k_1$ 与 $k_2$ 的非线性方程组，因此同样可以采用信赖域算法求解对应的非线性最小二乘问题。

## 4. 基于三次样条方法的双层渗透反问题的数值验证

我们对第 2 节中设计的实例(式 3)进行数值求解，我们采用调整后的三次样条方法，计算过程中采取

等距离分割，离散网格点数为 21 × 10，$k(x)$ 的搜索区间取为 $[0,3]$，$h(x,t)$ 的搜索区间取为 $[0,1]$，初始的搜索值设为 K0 = [1.2, 2.3]，具体程序参见附录。

程序运行耗时 74.01 秒。$h(x,t)$ 的均方误差为 $3.6086\times10^{-6}$，渗透系数的数值计算结果分别为 1.0001，2.0007，渗透系数真值为 $k_1=1,k_2=2$。

所得真值图像与估值图像的对比图如下(图 1，图 2)：

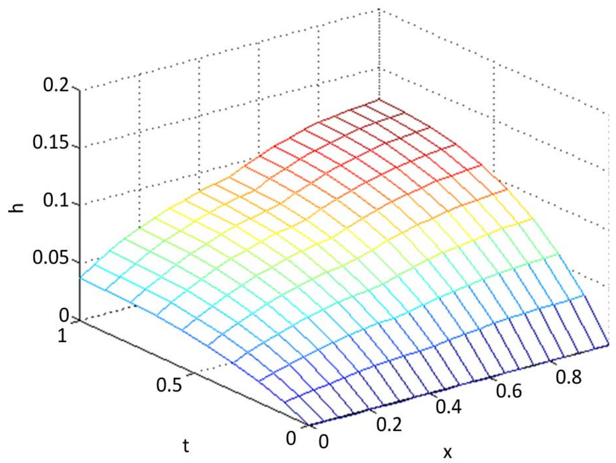


**Figure 1.** Graph of truth values
**图 1.** 真值图形

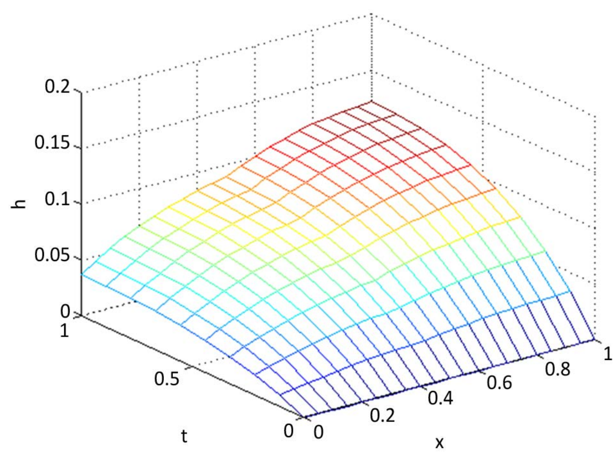


**Figure 2.** Graph of the estimated value
**图 2.** 估值图形

该算法求解精度相对于有限差分法较高，但是通过改变初始值，我们发现，该算法对初始值有一定的依赖性，算法稳定性不足。

## 5. 总结

在实际处理非均匀地质的问题时，我们可以将非均匀地质近似为多层均匀地质构成，相应地，渗透系数通常可以近似为一个分段常数函数，即在每一个时空网格单元中，都可以视之为一个常数值。本章给出了分两层的一维 Boussinesq 方程描述、实例设计、反问题离散化求解方法、实例数值验证等。由于临界层的存在，对三次样条函数进行了相应的调整，给出了反问题的解决过程，并验证算法的有效性。

## 参考文献

[1] 王兵贤, 王泽文, 徐定华, 等. 二维流 Boussinesq 方程渗透系数反演的变分伴随方法[J]. 水利水电科技进展, 2010, 30(6): 11-14.