Pure Mathematics 理论数学, 2020, 10(2), 106-110
Published Online February 2020 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2020.102017

Hans汉斯

The Properties of the Bivariate Convex Body Operator $st_H(\cdot+\cdot)$ under Steiner Symmetrization

Yifang Jiang

School of Mathematics and Information Science, Shaanxi Normal University, Xi'an Shaanxi
Email: jiangyf@snnu.edu.cn

Received: Jan. 25th, 2020; accepted: Feb. 13th, 2020; published: Feb. 20th, 2020

Abstract

In this paper, a bivariate convex body operator and its properties will be characterized by using Steiner symmetrization method and Minkowski addition. Steiner symmetrization of convex bodies with respect to a given hyperplane *H* in R^n has a very important property that if the sets *C* and *D* are two convex bodies of Euclidean n-space R^n, there is a inclusion relation: $st_H(C+D)\subseteq st_H C+st_H D$. This property plays a key role in the concise proof of the classical Brunn-Minkowski inequality and the classical isoperimetric inequality by using the Steiner symmetrization method. In this paper, on the basis of this property, we further characterize the bivariate convex body operator $st_H(\cdot+\cdot)$ and its properties.

Keywords

Convex Bodies, Steiner Symmetrization, Minkowski Addition

Steiner对称化下双变量凸体算子$st_H(\cdot+\cdot)$的性质

姜亦芳

陕西师范大学，数学与信息科学学院，陕西 西安
Email: jiangyf@snnu.edu.cn

收稿日期：2020年1月25日；录用日期：2020年2月13日；发布日期：2020年2月20日

文章引用：姜亦芳. Steiner 对称化下双变量凸体算子 $st_H(\cdot+\cdot)$ 的性质[J]. 理论数学, 2020, 10(2): 106-110.
DOI: 10.12677/pm.2020.102017

摘　要

本文利用凸体的Steiner对称化的性质，结合Minkowski加法刻画了一个双变量凸体算子，并研究了该算子的相关性质。给凸体关于给定的 R^n 中的超平面H作Steiner对称可以得到一条很重要的性质，即设C和D是n维欧式空间 R^n 中的两个凸体，有包含关系：$st_H(C+D)\subseteq st_H C+st_H D$。该性质在利用Steiner对称化方法得到经典的Brunn-Minkowski不等式和经典的等周不等式的简洁证明中起到了关键作用。本文就是在该性质的基础之上刻画了双变量凸体算子 $st_H(\cdot+\cdot)$ 及其性质。

关键词

凸体，Steiner对称，Minkowski加法

1. 引言

在凸几何分析中，一个更对称的凸体在许多情况下具有更好的几何或分析性质。因此，研究将凸体转化为更对称的凸体的对称化方法是非常有意义的，比如文献[1]中对 Steiner，Minkowski，Schwarz 和中心对称进行了研究。而在众多凸体的对称化方法中，Steiner 对称化可能是解决凸几何领域中的问题最为强大的对称化方法，比如，利用 Steiner 对称化方法可以得到经典的 Brunn-Minkowski 不等式和经典的等周不等式的简洁证明[2]，其他相关的应用可以查阅文献[1] [3]-[9]。这是因为 Steiner 对称化方法具有很多优良性质，比如，保凸性、保体积性、表面积不增性、周长不增性等。在 Brunn-Minkowski 理论中，Minkowski 加法是其重要的组成部分，比如经典的 Brunn-Minkowski 不等式就是建立在 Minkowski 加法的基础之上。

Steiner 对称化关于 Minkowski 加法有一条非常重要的性质：设凸体 $C,D\in K^n$，对于给定 R^n 中的超平面 H，有以下的包含关系(即命题 2.1 ii))：

$$st_H(C+D)\subseteq st_H C+st_H D,$$

这条性质在利用 Steiner 对称化方法得到的经典的 Brunn-Minkowski 不等式和经典的等周不等式的简洁证明中都起到了至关重要的作用。本文就是以此为切入点，刻画了由该性质衍生出的双变量凸体算子 $st_H(\cdot+\cdot)$ 及其相关性质，例如连续性、单调性等。

上述出现的概念和符号在下文中有详尽的说明。

2. 预备知识

本文首先回顾 Steiner 对称和 Minkowski 加法的定义和相关性质。我们以下的讨论基于 n 维实欧几里德向量空间 R^n，以 o 为原点，$\langle\cdot,\cdot\rangle$ 为欧几里得空间的标准内积，$|\cdot|$ 为该内积诱导的范数。

设 K^n 为 R^n 上全体凸体(紧凸集)组成的集合(简称凸体空间)，C^n 为 R^n 上所有非空紧子集组成的集合(简称真凸体空间)，H 为 R^n 中的任意超平面。令 $C\in K^n$，则 C 关于超平面 H 的 Steiner 对称化为 $st_H C$ 的定义[1]为：对于每一条垂直于 H 的直线 L，并且满足 $C\cap L\neq\varnothing$，将线段 $C\cap L$ 沿着 L 移动，直到 $C\cap L$

的中点落在 H 上，这样得到的所有线段的并就是 $st_H C$ 。显然，$st_H C$ 关于超平面 H(镜面)对称。

给定一个凸体 $C \in K^n$，我们给出一些刻画凸体的几何量的概念，直径 $diam(C)=\sup\{|x-y|:x,y\in C\}$，外接圆半径 $\mathrm{R}(C)=\inf\{\mathrm{R}\in R: x+\mathrm{R}B^n \supseteq C, x\in C\}$，内切圆半径 $\mathrm{r}(C)=\sup\{\mathrm{r}\in R:\ x+\mathrm{r}B^n \subseteq C, x\in C\}$。其中 $B^n=B(o,1)=\{x\in R:|x|\le 1\}$ 为 R^n 中的实心单位球。

下面我们列出有关 Steiner 对称的性质定理，这些性质会在后文的证明中用到。

命题 2.1 [2] 凸体 $C,D\in K^n$，关于给定的超平面 H 的 Steiner 对称化具有以下的性质：

i) $st_H C\in K^n$；

ii) $st_H(C+D)\subseteq st_H C+st_H D$；

iii) 若 $C\subseteq D$，则有 $st_H C\subseteq st_H D$；

iv) 映射 $st_H: C^n\to C^n$ 是连续的；

v) $diam(st_H C)\le diam(C)$；

vi) $\mathrm{R}(st_H C)\le \mathrm{R}(C)$；

vii) $\mathrm{r}(st_H C)\ge \mathrm{r}(C)$。

现在叙述 Minkowski 加法的定义和性质。Minkowski 加法和数乘的定义为：

$$C+D=\{x+y:x\in C,y\in D\},$$

$$\lambda C=\{\lambda x:x\in C\},$$

其中 $C,D\in K^n$，λ 为一个实数。设 $x\in R^n$，集合 $x+D(=\{x+y:y\in D\})$ 可以看作 D 沿向量 x 的平移，则 Minkowski 加法的另外一种定义：

$$C+D=\bigcup_{x\in C}(x+D)=\bigcup_{y\in D}(C+y).$$

下面我们列出有关 Minkowski 加法的性质定理，这些性质将在后文定理的证明中用到。

命题 2.2 [10] 关于集合的 Minkowski 加法有以下的性质：

i) 若 $C,D\in K^n$，则 $C+D\in K^n$；

ii) Minkowski 加法作为 $C^n\times C^n$ 到 C^n 的映射是连续的；

iii) 集合 K^n 和 C^n 关于 Minkowski 加法构成了交换半群，其单位元为$\{o\}$；

iv) 集合 K^n 满足消去律，即：若 $C,D,K\in K^n$ 并且 $C+K=D+K$，则有 $C=D$；

v) 集合 K^n 满足顺序消去律，即：若 $C,D,K\in K^n$ 并且 $C+K\subseteq D+K$，则有 $C\subseteq D$；

vi) 若 $C\in K^n$，$\forall\lambda,\mu\in R$ 并且 $\lambda,\mu\ge 0$，有 $\lambda C+\mu C=(\lambda+\mu)C$。

命题 2.3 设 $C_1,C_2,D_1,D_2\in C^n$，并且满足 $C_1\subseteq C_2, D_1\subseteq D_2$，则有 $C_1+D_1\subseteq C_2+D_2$。

3. 主要结果

设 $C,D\in C^n$，H 为 R^n 中给定的超平面，我们定义如下的算子：

$$\phi(C,D)=st_H(C+D),$$

则 ϕ 为 $C^n\times C^n$ 到 C^n 的双变量凸体算子。

定理 3.1 在 $\phi(\cdot,\cdot)$ 在 $C^n\times C^n$ 上是连续的。

证明 考虑 C^n 中的收敛序列 $\{C_n\},\{D_n\}$。假设当 $n\to\infty$ 时，两个序列分别收敛于 C、D，其中 $C,D\in C^n$。由 Minkowski 加法的性质，即命题 2.2 i)、ii)，我们可以得到当 $n\to\infty$ 时，有 $C_n+D_n\to C+D$。结合 Steiner

对称的连续性，即命题 2.1 ii)，可得当 $n \to \infty$ 时，有 $st_H(C_n + D_n) \to st_H(C+D)$，定理得证。

从上面的证明中，我们可以知道该双变量凸体算子 $\phi(\cdot,\cdot) = st_H(\cdot+\cdot)$ 是具有连续性的，此外，我们也可以证明其同时具有单调性，即在 $C^n \times C^n$ 上是不减的。

定理 3.2 设 $C_1, C_2, D_1, D_2 \in C^n$，并且满足 $C_1 \subseteq C_2, D_1 \subseteq D_2$，则有 $st_H(C_1 + D_1) \subseteq st_H(C_2 + D_2)$。

证明由于 $C_1, C_2, D_1, D_2 \in C^n$，以及 $C_1 \subseteq C_2, D_1 \subseteq D_2$，根据 Minkowski 加法的性质，即命题 2.2 i)和命题 2.3，我们可以得到 $C_1 + D_1, C_2 + D_2 \in C^n$，并且 $C_1 + D_1 \subseteq C_2 + D_2$。结合 Steiner 对称的性质，即命题 2.1 iii)，可得：

$$st_H(C_1 + D_1) \subseteq st_H(C_2 + D_2),$$

即定理得证。

我们要注意该算子不为线性算子，为此我们举出如下例子：

例 3.1 设 R^2 中的两个凸体 $C = \{(x,y) \in R^2 : 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1 - x\}$，$D = \{(x,y) \in R^2 : 0 \le x, y \le 1\}$，令 $H = \{(x,0) \in R^2 : x \in R\}$，我们可以证明 $st_H(\lambda C + D) = \lambda st_H(C+D)$（$\lambda$ 任意常数)不成立。为此我们可以只需证明当 $\lambda = 2$ 时，该等式不成立。根据 Steiner 对称和 Minkowski 加法的定义，可得：
$st_H(2C + D) = \{(x,y) \in R^2 : y_2(x) \le y \le y_1(x), 0 \le x \le 3\}$，其中

$$y_1(x) = \begin{cases} \dfrac{3}{2}, & 0 \le x \le 1 \\ -\dfrac{x}{2} + 2, & 1 \le x \le 3 \end{cases} \qquad y_2(x) = \begin{cases} -\dfrac{3}{2}, & 0 \le x \le 1 \\ \dfrac{x}{2} - 2, & 1 \le x \le 3 \end{cases}$$

同样可得 $2st_H(C+D) = \{(x,y) \in R^2 : y_2'(x) \le y \le y_1'(x), 0 \le x \le 4\}$，其中

$$y_1'(x) = \begin{cases} 2, & 0 \le x \le 2 \\ -\dfrac{x}{2} + 3, & 2 < x \le 4 \end{cases} \qquad y_2'(x) = \begin{cases} -2, & 0 \le x \le 2 \\ \dfrac{x}{2} - 3, & 2 < x \le 4 \end{cases}$$

显然，$st_H(2C + D) \ne 2st_H(C+D)$，故而等式 $st_H(\lambda C + D) = \lambda\, st_H(C+D)$（$\lambda$ 任意常数)不成立，即该算子不为线性算子。

下面我们用一些几何量来进一步刻画该双变量凸体算子。

定理 3.3 设 $C, D \in C^n$，则以下命题是成立的：

i) $diam(st_H(C+D)) \le diam(C) + diam(D)$；

ii) $\mathrm{R}(st_H(C+D)) \le \mathrm{R}(C) + \mathrm{R}(D)$；

iii) $\mathrm{r}(st_H(C+D)) \ge \mathrm{r}(C) + \mathrm{r}(D)$。

证明

i) 由直径的定义可得：

$$\begin{aligned} diam(C+D) &= \sup\{|x_1 + y_1 - (x_2 + y_2)| : x_1, x_2 \in C, y_1, y_2 \in D\} \\ &\le \sup\{|x_1 - x_2| : x_1, x_2 \in C\} + \sup\{|y_1 - y_2| : y_1, y_2 \in D\} \\ &= diam(C) + diam(D), \end{aligned}$$

结合 Steiner 对称的性质，即命题 2.1 v)可得：

$$diam(st_H(C+D)) \le diam(C+D) \le diam(C) + diam(D).$$

ii) 由外接圆的定义，我们可设 $x+\mathrm{R}(C)B^n \supseteq C, y+\mathrm{R}(D)B^n \supseteq D$，其中 $x\in C, y\in D$。根据 Minkowski 加法的性质，即命题 2.3，可得：

$$x+y+\left(\mathrm{R}(C)+\mathrm{R}(D)\right)B^n \supseteq C+D.$$

进而 $\mathrm{R}(C)+\mathrm{R}(D)\geq \mathrm{R}(C+D)$。结合 Steiner 对称的性质，即命题 2.1 vi)可得：

$$\mathrm{R}\left(st_H(C+D)\right)\leq \mathrm{R}(C+D)\leq \mathrm{R}(C)+\mathrm{R}(D).$$

iii) 由内切圆的定义，我们可设 $x+\mathrm{r}(C))B^n \subseteq C, y+\mathrm{r}(D)B^n \subseteq D$，其中 $x\in C, y\in D$。根据 Minkowski 加法的性质，即命题 2.3，可得：

$$x+y+\left(\mathrm{r}(C)+\mathrm{r}(D)\right)B^n \subseteq C+D.$$

进而 $\mathrm{r}(C)+\mathrm{r}(D)\leq \mathrm{r}(C+D)$。结合 Steiner 对称的性质，即命题 2.1 vii)可得：

$$\mathrm{r}\left(st_H(C+D)\right)\geq \mathrm{r}(C+D)\geq \mathrm{r}(C)+\mathrm{r}(D).$$

证毕。

4. 结语

本文在研究 Steiner 对称性质的基础之上，结合 Minkowski 加法，得到了一个双变量凸体算子 $st_H(\cdot+\cdot)$，并对其性质展开研究。首先，我们证明了其具有连续性和单调性这样良好的代数性质；其次，我们用直径、内切圆和外接圆这些几何量去刻画该算子，也得到了相应的良好性质。

致　谢

本论文是在我导师王拓教授的悉心指导下完成的，从基础知识的学习到论文的选题、参考资料的收集以及论文的修改，每一步都是在王老师的指导下完成的，在此我向我的导师王拓教授表示深切的谢意与祝福。

参考文献

[1] Bianchi, G., Gardner, R.J. and Gronchi, P. (2017) Symmetrization in Geometry. *Advances in Mathematics*, **306**, 51-88. https://doi.org/10.1016/j.aim.2016.10.003

[2] Gruber, P.M. (2007) Convex and Discrete Geometry. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 168-187.

[3] Klain, D.A. (2011) Steiner Symmetrization Using a Finite Set of Directions. *Advances in Applied Mathematics*, **48**, 340-353. https://doi.org/10.1016/j.aam.2011.09.004

[4] Leichtweiss, K. (2008) On Steiner's Symmetrization of Convex Bodies in Non-Euclidean Geometry. *Results in Mathematics*, **52**, 339-346. https://doi.org/10.1007/s00025-008-0315-3

[5] Mcnabb, A. (1967) Partial Steiner Symmetrization and Some Condition Problems. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **17**, 221-227. https://doi.org/10.1016/0022-247X(67)90147-3

[6] Bourgain, J., Lindenstrauss, J. and Milman, V.D. (1989) Estimates Related to Steiner Symmetrizations. *Lecture Notes in Mathematics*, **1376**, 264-273. https://doi.org/10.1007/BFb0090060

[7] Chlebík, M., Cianchi, A. and Fusco, N. (2005) The Perimeter Inequality under Steiner Symmetrization: Cases of Equality. *Annals of Mathematics*, **162**, 525-555. https://doi.org/10.4007/annals.2005.162.525

[8] 戴进. 凸体的两个几何量在 Steiner 对称化下的变化及其应用[J]. 数学进展, 2018, 47(5): 767-772.

[9] 孙丽英. 凸体的 Steiner 对称化的两个定理[J]. 理论数学, 2017, 7(5): 368-372.

[10] Schneider, R. (2014) Convex Bodies: The Brunn-Minkowski Theory. Cambridge University Press, Cambridge, 139-150.