Pure Mathematics 理论数学, 2020, 10(4), 362-373
Published Online April 2020 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2020.104046

The Strong Solutions to the Compressible Non-Newtonian Fluids with Variable Exponential Growth in One Dimension

Min Su, Lining Tong

Department of Mathematics, Shanghai University, Shanghai
Email: smxkck@163.com

Received: Mar. 30th, 2020; accepted: Apr. 19th, 2020; published: Apr. 26th, 2020

Abstract

In this paper, a class of compressible non-Newtonian fluid with variable exponential is studied on one-dimensional bounded interval. This model is a compressible non-Newtonian fluid model with a $p(x)$-Laplace viscosity term. By constructing an approximate solution and applying energy estimation to overcome the nonlinear property of strong viscous term, we obtain the existence and uniqueness of the strong solution to electroviscous fluid under the condition of the non-Newtonian viscous parameter $1 < p(x) < 2$ and vacuum at the initial density.

Keywords

Variable Exponential Growth, Compressible, Non-Newtonian Fluid

一维空间中可压缩变指数增长非牛顿流体模型的强解

苏　敏，佟丽宁

上海大学理学院数学系，上海
Email: smxkck@163.com

收稿日期：2020年3月30日；录用日期：2020年4月19日；发布日期：2020年4月26日

摘　要

本文在一维有界区间上研究了一类可压缩变指数增长的流体模型。此类模型是带有$p(x)$-Lapalace粘性项

文章引用: 苏敏, 佟丽宁. 一维空间中可压缩变指数增长非牛顿流体模型的强解[J]. 理论数学, 2020, 10(4): 362-373.
DOI: 10.12677/pm.2020.104046

的可压缩非牛顿流体模型。我们通过构造逼近解，应用能量估计，克服变指数带来的强非线性性质，得到了非牛顿粘性参数 $1<p(x)<2$，且初始密度存在真空的情况下，此类可压缩非牛顿流体模型初边值问题强解的存在唯一性。

关键词

变指数增长，可压缩，非牛顿流体

1. 引言

本文在一维有界区间上研究了如下可压缩变指数增长非牛顿流体模型的初边值问题，

$$\begin{cases} \rho_t+(\rho u)_x=0, \\ (\rho u)_t+(\rho u^2)_x-\mu_1 u_{xx}-\mu_0\left[\left(1+|u_x|^2\right)^{\frac{p(x)-2}{2}}u_x\right]_x+\pi_x=0, \\ \pi=a\rho^\gamma,\quad a>0,\gamma>0 \end{cases} \tag{1}$$

带有初边值条件：

$$\begin{cases} (\rho,u)|_{t=0}=(\rho_0,u_0),\quad x\in I\equiv[0,1], \\ u|_{x=0}=u|_{x=1}=0,\qquad t\in[0,T], \end{cases} \tag{2}$$

其中 ρ,u,π 分别表示密度，速度和压力。$1<p(x)<2$ 为已知函数，$\mu_0>0,\mu_1>0$ 为定常数。

此类变指数增长流体模型通常用来描述电粘性流体的流动。1949 年 Winslow [1]发现电粘性流体的特性是能够根据提供的电场强度来改变流体的粘性，作为一种新功能材料，广泛运用于可变减震器、喷墨印刷机、消振装置、离合器、阀、密封等，特别倾向于振动控制方面的应用。

当 $p(x)$是常数，模型为带有 Carreau’s Law 结构的可压缩非牛顿流模型，关于强解的存在唯一性有很多结果见[2] [3] [4]。当 $p(x)$为函数时，Rajagopal，Růžička [5]首先得到了不可压缩流体模型，该模型由质量、线动量、角动量、能量的一般平衡定律、克劳修斯－杜赫不等式形式的热力学第二定律和 Minkowskian 形式的麦克斯韦方程导出。Růžička 在[6]中对其强解进行了进一步的研究。Diening [7]对于不可压电粘性流体的理论和数值结果做了研究。还有很多关于变指数增长抛物型方程的结果可以在[8] [9] [10]中找到。由于模型强的非线性性和奇异性，对于变指数增长模型的研究，特别是，可压缩变指数非牛顿流体的研究还比较单薄，需要我们进一步探索。

本文研究的主要结论如下：

定理 1： 假设 $p(x)$ 满足 $1<p_\infty\le p(x)\le p_0<2$ （p_∞,p_0 为常数)，且具有一阶连续导数，初值条件 (ρ_0,u_0) 满足

$$\begin{cases} 0\le\rho_0\in H^1(I), \\ u_0\in H_0^1(I)\cap H^2(I) \end{cases} \tag{3}$$

和相容性条件：

$$-\mu_1 u_{0xx} - \mu_0 \left[\left(1+\left|u_{0x}\right|^2\right)^{\frac{p(x)-2}{2}} u_{0x} \right]_x + \pi_x\left(\rho_0\right) = \rho^{\frac{1}{2}} g, \qquad g \in L^2(I) \tag{4}$$

则存在$T_* \in (0,\infty)$，使得问题(1)~(2)存在唯一强解(ρ,u)满足

$$\begin{aligned}
&0 \le \rho \in C\left(\left[0,T_*\right]; H^1(I)\right); \ \sqrt{\rho} u_t \in L^\infty\left(0,T_*; L^2(I)\right); \ \sqrt{\rho} u_x \in L^\infty\left(0,T_*; L^2(I)\right);\\
&u \in C\left(\left[0,T_*\right]; H_0^1(I)\right) \cap L^2\left(0,T^*; H^2(I)\right); \quad u_t \in L^2\left(0,T_*; H_0^1(I)\right);\\
&\left(1+\left|u_x^k\right|^2\right)^{\frac{p(x)}{2}} \in L^\infty\left(\left[0,T_*\right]; L^1(I)\right);\\
&\left(\left(1+\left|u_x\right|^2\right)^{\frac{p(x)-2}{2}} u_x\right)_x \in C\left(\left[0,T_*\right]; L^2(I)\right).
\end{aligned} \tag{5}$$

本文共有三节，在第二节中，我们将通过迭代的方法构造逼近方程，得到逼近解的先验估计，得到初值远离真空时，模型强解的存在性。应用第二节得到的与密度下界无关的一致先验估计，定理一的证明在第三节完成。

2. 先验估计

在这一部分，我们将考虑初值远离真空的情形。假设初始密度具有正的下界，通过迭代的方法构造了初边值问题(1)~(2)的逼近问题，并得到逼近解与密度下界无关的一致能量估计。

2.1. 逼近解的构造

首先，我们假设ρ_0足够光滑具有正的下界，即存在一个正数$\delta(0<\delta\ll 1)$使得$\rho_0 \ge \delta$。接下来，我们运用文献[11]中迭代方法构造逼近方程并得到逼近解，

- 定义$u^0 = 0$。
- 对$k \ge 1$，给定u^{k-1}，则根据一阶双曲守恒律(见[12])和$p(x)$-Laplace 抛物型方程(见[8])的存在性理论，得到如下初边值问题具有唯一的强解$\left(\rho^k, u^k\right)$：

$$\rho_t^k + u^{k-1}\rho_x^k + u_x^{k-1}\rho^k = 0, \tag{6}$$

$$\rho^k u_t^k + \rho^k u^{k-1} u_x^k - \mu_1 u_{xx}^k - \mu_0 \left[\left(1+\left|u_x^k\right|^2\right)^{\frac{p(x)-2}{2}} u_x^k \right]_x + \pi_x^k = 0 \tag{7}$$

满足如下初边值条件

$$\left(\rho^k, u^k\right)\Big|_{t=0} = \left(\rho_0, u_0\right), \ x \in [0,1], \qquad u^k\Big|_{x=0} = u^k\Big|_{x=1} = 0, \quad t \in [0,T]. \tag{8}$$

其中$0<\rho_0 \in H^2(I), u \in H_0^1 \cap H^2$且满足相容性条件(4)。

2.2. 一致能量估计

本小节中，我们将对问题(6)~(8)的解$\left(\rho^k, u^k\right)$进行一致先验估计。

为了得到$\left(\rho^k, u^k\right)$的估计，我们定义函数$\Phi_K(t)$：

$$\Phi_K(t)=\max_{1\le k\le K}\sup_{0\le s\le t}\left(1+\left\|\sqrt{\rho^k}u_t^k(s)\right\|_{L^2(I)}^2+\left\|\sqrt{\rho^k}u_x^k(s)\right\|_{L^2(I)}^2\right.$$
$$\left.+\left\|u_x^k(s)\right\|_{L^2(I)}^2+\left\|\left(1+\left|u_x^k\right|^2\right)^{\frac{p(x)}{4}}\right\|_{L^2(I)}^2+\left\|\rho^k(s)\right\|_{H^1(I)}^2\right), \tag{9}$$

其中 $K\ge 1$ 是一个足够大的正整数。为了表述方便，定义下文中 C 为与 μ_1,μ_0,p_∞,p_0 以及 $|\rho_0|_{H^1(I)},|g|_{L^2}$ 有关常数。

下面，我们将估计 $\Phi_K(t)$ 中的每一项。

引理 1 假设 (ρ^k,u^k) 是方程(6)~(7)的光滑解，存在 $T\in(0,\infty)$ 使得

$$\int_0^t\left\|\sqrt{\rho^k}u_t^k\right\|_{L^2(I)}^2\mathrm{d}s+\sup_{0\le s\le t}\left(\left\|u_x^k\right\|_{L^2(I)}^2+\int_0^1\left(1+\left|u_x^k\right|^2\right)^{\frac{p(x)}{2}}\mathrm{d}x\right)\le C\left(1+\int_0^t\Phi_K^{\gamma+\frac{3}{2}}(t)\mathrm{d}s\right),$$

对任意 $t\in[0,T]$ 成立。

证明： 用 u_t^k 乘以(7)式两端，然后关于变量 x 在[0,1]上积分有

$$\int_0^1\rho^k\left|u_t^k\right|^2\mathrm{d}x+\frac{\mu_1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_0^1\left|u_x^k(t)\right|^2\mathrm{d}x+\mu_0\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_0^t\frac{1}{p(x)}\left[\left(1+\left|u_x^k\right|^2\right)^{\frac{p(x)}{2}}\right]\mathrm{d}x$$
$$=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_0^1\pi^k u_x^k\mathrm{d}x+\int_0^t\int_0^1\left(-\rho^k u^{k-1}u_x^k u_t^k-\pi_t^k u_x^k\right)\mathrm{d}x. \tag{10}$$

对于(10)关于变量 t 在 $[0,t]$ 上积分，我们可以得到，

$$\int_0^t\left\|\sqrt{\rho^k}u_t^k\right\|_{L^2(I)}^2\mathrm{d}s+\frac{\mu_1}{2}\int_0^1\left|u_x^k\right|^2\mathrm{d}x+\frac{\mu_0}{p_\infty}\int_0^t\left(1+\left|u_x^k\right|^2\right)^{\frac{p(x)}{2}}(t)\mathrm{d}x$$
$$\le\frac{\mu_1}{2}\int_0^1\left|u_x^k\right|^2(0)\mathrm{d}x+\frac{\mu_0}{p_\infty}\int_0^t\left(1+\left|u_x^k\right|^2\right)^{\frac{p(x)}{2}}(0)\mathrm{d}x+\int_0^1\pi^k u_x^k(t)\mathrm{d}x$$
$$-\int_0^1\pi^k u_x^k(0)\mathrm{d}x+\int_0^t\int_0^1\left(-\rho^k u^{k-1}u_x^k u_t^k-\pi_t^k u_x^k\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}s$$
$$\le C+\int_0^1\left|\pi^k u_x^k(t)\right|\mathrm{d}x+\int_0^t\int_0^1\left|-\rho^k u^{k-1}u_x^k u_t^k-\pi_t^k u_x^k\right|\mathrm{d}x\mathrm{d}s \tag{11}$$

应使用 Sobolev 不等式和 Young's 不等式，有

$$\int_0^t\left\|\sqrt{\rho^k}u_t^k\right\|_{L^2(I)}^2\mathrm{d}s+\frac{\mu_1}{4}\left\|u_x^k\right\|_{L^2(I)}^2+\frac{\mu_0}{p_\infty}\int_0^t\left(1+\left|u_x^k\right|^2\right)^{\frac{p(x)}{2}}\mathrm{d}x$$
$$\le C+C\left\|\pi^k(t)\right\|_{L^2(I)}^2+C\int_0^t\left\|u^{k-1}\right\|_{L^\infty(I)}\left\|\sqrt{\rho^k}u_t^k\right\|_{L^2(I)}\left\|\sqrt{\rho^k}u_x^k\right\|_{L^2(I)}\mathrm{d}s+\int_0^t\int_0^1\left|\pi_t^k u_x^k\right|\mathrm{d}x\mathrm{d}s \tag{12}$$
$$=\sum_{i=1}^3 K_i.$$

接下来依次估计 $K_i,i=1,2,3$。应用 Sobolev 不等式和 Young's 不等式，我们可以计算

$$
\begin{aligned}
K_1 &= \int_0^1 \left|\pi^k(t)\right|^2 \mathrm{d}x = \int_0^1 \left|\pi^k(0)\right|^2 \mathrm{d}x + \int_0^t \left(\frac{\partial}{\partial s}\int_0^t \left|\pi^k(s)\right| \mathrm{d}x\right)\mathrm{d}s \\
&= \int_0^1 \left|\pi^k(0)\right|^2 \mathrm{d}x + \int_0^t\int_0^1 \pi^k(\rho)\left(\pi^k(\rho)\right)'\left(-\rho_x^k u^{k-1} - \rho^k u_x^{k-1}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}s \\
&\le C + C\int_0^t \left\|\pi^k(\rho)\right\|_{L^\infty(I)} \left\|\rho^k\right\|_{L^\infty(I)}^{\gamma-1} \left\|\rho^k(s)\right\|_{H^1(I)} \left\|u_x^{k-1}\right\|_{L^2(I)} \mathrm{d}s \\
&\le C\left(1 + \int_0^t \Phi_K^{\gamma+\frac{1}{2}}(t)\mathrm{d}s\right);
\end{aligned}
$$

$$
K_2 = C\int_0^t \left\|u^{k-1}\right\|_{L^\infty(I)} \left\|\sqrt{\rho^k}\,u_t^k\right\|_{L^2(I)} \left\|\sqrt{\rho^k}\,u_x^k\right\|_{L^2(I)} \mathrm{d}s \le C\int_0^t \Phi_K^{\frac{3}{2}}(t)\mathrm{d}s
$$

$$
\begin{aligned}
K_3 &= \int_0^t\int_0^1 \left|\pi_t^k u_x^k\right| \mathrm{d}x\mathrm{d}s \le \int_0^t\int_0^1 \left|\left(\rho^k\right)^{\gamma-1} \rho^k u_x^{k-1} u_x^k + \left(\rho^k\right)^{\gamma-1} \rho_x^k u^{k-1} u_x^k\right| \mathrm{d}x\mathrm{d}s \\
&\le \int_0^t \Bigg(\left\|\rho^k\right\|_{L^\infty(I)}^{\gamma-1} \left\|\rho^k\right\|_{L^\infty(I)}^{\frac{1}{2}} \left\|\sqrt{\rho^k}\,u_x^k\right\|_{L^2(I)} \left\|u_x^{k-1}\right\|_{L^2(I)} \\
&\quad + \left\|\rho^k\right\|_{L^\infty(I)}^{\gamma-\frac{3}{2}} \left\|\rho_x^k\right\|_{L^2(I)} \left\|\sqrt{\rho^k}\,u_x^k\right\|_{L^2(I)} \left\|u^{k-1}\right\|_{L^\infty(I)} \Bigg)\mathrm{d}s \\
&\le C\int_0^t \Phi^{\gamma+\frac{3}{2}} \mathrm{d}s.
\end{aligned}
$$

将 K_1,K_2,K_3 的估计代入(12)，有

$$
\int_0^t \left\|\sqrt{\rho^k}\,u_t^k\right\|_{L^2(I)}^2 \mathrm{d}s + \frac{\mu_1}{4}\left\|u_x^k\right\|_{L^2(I)}^2 + \frac{\mu_0}{p_\infty}\int_0^t \left(1+\left|u_x^k\right|^2\right)^{\frac{p(x)}{2}} \mathrm{d}x \le C\left(1+\int_0^t \Phi_K^{\gamma+\frac{3}{2}}(t)\mathrm{d}s\right). \tag{13}
$$

引理 1 的证明完成。

引理 2：若 $\left(\rho^k,u^k\right)$ 是(6)~(7)的解，那么存在 $T\in(0,\infty)$，使得

$$
\begin{aligned}
&\max_{1\le k\le K}\Bigg(\sup_{0\le s\le t}\left\|\sqrt{\rho^k}\,u_t^k(t)\right\|_{L^2(I)}^2 + \left\|\sqrt{\rho^k}\,u_x^k(t)\right\|_{L^2(I)}^2 + \int_0^t \left\|u_{xt}^k\right\|_{L^2(I)}^2 \mathrm{d}s + \int_0^t \left\|u_{xx}^k\right\|_{L^2(I)}^2 \mathrm{d}s \\
&+ \int_0^t\int_0^1 \left(1+\left|u_x^k\right|^2\right)^{\frac{p(x)-2}{2}} \left|u_{xx}^k\right|^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}s + \int_0^t\int_0^1 \left(\left(1+\left|u_x^k\right|^2\right)^{\frac{p(x)-2}{2}}\right)\left|u_{xt}^k\right|^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}s \Bigg) \\
&\le C\int_0^t \Phi_K^{\gamma+\frac{7}{2}}(t)\mathrm{d}s
\end{aligned}
$$

证明：对(7)关于 t 求导有

$$
\left(\rho^k u_t^k\right)_t + \left(\rho^k u^{k-1} u_x^k\right)_t - \mu_1\left(u_{xx}^k\right)_t - \mu_0\left[\left(1+\left|u_x^k\right|^2\right)^{\frac{p(x)-2}{2}} u_x^k\right]_{xt} + \pi_{xt}^k = 0 \tag{14}
$$

将方程(14)两端同乘以 u_t^k 然后在(0,1)上关于 x 积分，可以得到

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_0^1 \rho^k\left(u_t^k\right)^2 \mathrm{d}x + \mu_1\int_0^1 \left(u_{xt}^k\right)^2 \mathrm{d}x + \mu_0\int_0^1 \left[\left(1+\left|u_x^k\right|^2\right)^{\frac{p(x)-2}{2}} u_x^k\right]_t u_{xt}^k \mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 \pi_t^k u_{xt}^k \mathrm{d}x + \int_0^1 \left(\rho^k u^{k-1}\right)_x \left(\frac{1}{2}\left(u_t^k\right)^2 + u^{k-1} u_x^k u_t^k\right)\mathrm{d}x \\
&\quad - \int_0^1 \rho^k u_t^{k-1} u_x^k u_t^k \mathrm{d}x - \int_0^1 \left(\rho^k u^{k-1}\right) u_{xt}^k u_t^k \mathrm{d}x
\end{aligned} \tag{15}
$$

因为$1<p_\infty \le p(x) \le p_0 < 2$，我们可以计算

$$\begin{aligned}
&\left[\left(1+\left|u_x^k\right|^2\right)^{\frac{p(x)-2}{2}} u_x^k\right]_t u_{xt}^k \\
&=\left(1+\left|u_x^k\right|^2\right)^{\frac{p(x)-2}{2}}\left(u_{xt}^k\right)^2\left[\frac{\left(p(x)-2\right)\left|u_x^k\right|^2}{1+\left|u_x^k\right|^2}+1\right] \\
&\ge \left(p(x)-1\right)\left(1+\left|u_x^k\right|^2\right)^{\frac{p(x)-2}{2}}\left(u_{xt}^k\right)^2 .
\end{aligned} \tag{16}$$

另一方面，应用质量守恒方程(6)有

$$\pi_t^k = -\gamma \pi^k u_x^{k-1} - \pi_x^k u^{k-1} \tag{17}$$

由(15)、(16)和(17)，得到如下不等式，

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left\|\sqrt{\rho^k}u_t^k\right\|_2^2+\mu_1\int_0^1\left|u_{xt}^k\right|^2\mathrm{d}x+\mu_0\int_0^1\left(p(x)-1\right)\left(1+\left|u_x^k\right|^2\right)^{\frac{p(x)-2}{2}}\left(u_{xt}^k\right)^2\mathrm{d}x \\
&\le \int_0^1\left|\pi_x^k\right|\left|u^{k-1}\right|\left|u_{xt}^k\right|\mathrm{d}x+\gamma\int_0^1\left|\pi^k\right|\left|u_x^{k-1}\right|\left|u_{xt}^k\right|\mathrm{d}x+2\int_0^1\rho^k\left|u^{k-1}\right|\left|u_t^k\right|\left|u_{xt}^k\right|\mathrm{d}x \\
&\quad+\int_0^1\rho^k\left|u^{k-1}\right|\left|u_x^{k-1}\right|\left|u_x^k\right|\left|u_t^k\right|\mathrm{d}x+\int_0^1\rho^k\left|u^{k-1}\right|^2\left|u_{xx}^k\right|\left|u_t^k\right|\mathrm{d}x \\
&\quad+\int_0^1\rho^k\left|u^{k-1}\right|^2\left|u_x^k\right|\left|u_{xt}^k\right|\mathrm{d}x+\int_0^1\rho^k\left|u_t^{k-1}\right|\left|u_x^k\right|\left|u_t^k\right|\mathrm{d}x \\
&=\sum_{j=1}^7 I_j .
\end{aligned} \tag{18}$$

应用 Sobolev 不等式，Hölder 不等式和 Young’s 不等式，我们可以估计$I_j, j=1,\cdots,7$。

$$I_1=\int_0^1\left|\pi_x^k\right|\left|u^{k-1}\right|\left|u_{xt}^k\right|\mathrm{d}x\le\left\|\pi_x^k\right\|_{L^2(I)}\left\|u^{k-1}\right\|_{L^\infty(I)}\left\|u_{xt}\right\|_{L^2(I)}\le C\Phi_K^{\gamma+1}(t)+\frac{\mu_1}{6}\left\|u_{xt}^k\right\|_{L^2(I)}^2;$$

$$I_2=\int_0^1\gamma\left|\pi^k\right|\left|u_x^{k-1}\right|\left|u_{xt}^k\right|\mathrm{d}x\le C\left\|\pi^k\right\|_{L^\infty(I)}\left\|u_x^{k-1}\right\|_{L^2(I)}\left\|u_{xt}^k\right\|_{L^2(I)}\le C\Phi_K^{\gamma+1}(t)+\frac{\mu_1}{6}\left\|u_{xt}^k\right\|_{L^2(I)}^2;$$

$$\begin{aligned}
I_3&=2\int_0^1\rho^k\left|u^{k-1}\right|\left|u_t^k\right|\left|u_{xt}^k\right|\mathrm{d}x\le 2\left\|\rho^k\right\|_{L^\infty(I)}^{\frac{1}{2}}\left\|u^{k-1}\right\|_{L^\infty(I)}\left\|\sqrt{\rho^k}u_t^k\right\|_{L^2(I)}\left\|u_{xt}^k\right\|_{L^2(I)} \\
&\le C\Phi_K^{\frac{5}{2}}(t)+\frac{\mu_1}{6}\left\|u_{xt}^k\right\|_{L^2(I)}^2;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_4&=\int_0^1\rho^k\left|u^{k-1}\right|\left|u_x^{k-1}\right|\left|u_x^k\right|\left|u_t^k\right|\mathrm{d}x\le\left\|u^{k-1}\right\|_{L^\infty(I)}\left\|u_x^{k-1}\right\|_{L^\infty(I)}\left\|\sqrt{\rho^k}u_x^k\right\|_{L^2(I)}\left\|\sqrt{\rho^k}u_t^k\right\|_{L^2(I)} \\
&\le C\Phi_K^3(t)+\eta_1\left\|u_{xx}^{k-1}\right\|_{L^2(I)}^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_5&=\int_0^1\rho^k\left|u^{k-1}\right|^2\left|u_{xx}^k\right|\left|u_t^k\right|\mathrm{d}x\le\left\|\rho^k\right\|_{L^\infty(I)}^{\frac{1}{2}}\left\|u^{k-1}\right\|_{L^\infty(I)}^2\left\|\sqrt{\rho^k}u_t^k\right\|_{L^2(I)}\left\|u_{xx}^k\right\|_{L^2(I)} \\
&\le C\Phi_K^{\frac{7}{2}}(x)+\frac{\mu_1}{5}\left\|u_{xx}^k\right\|_{L^2}^2;
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
I_6 &= \int_0^1 \left|\rho^k\right| \left|u^{k-1}\right|^2 \left|u_x^k\right| \left|u_{xt}^k\right| \mathrm{d}x \le \left\|\rho^k\right\|_{L^\infty(I)}^{\frac{1}{2}} \left\|u^{k-1}\right\|_{L^\infty(I)}^2 \left\|\sqrt{\rho^k} u_x^k\right\|_{L^2(I)} \left\|u_{xt}^k\right\|_{L^2(I)} \\
&\le C\Phi_K^{\frac{7}{2}}(t) + \frac{\mu_1}{6}\left\|u_{xt}^k\right\|_{L^2(I)}^2; \\
I_7 &= \int_0^1 \left|\rho^k\right| \left|u_t^{k-1}\right| \left|u_x^k\right| \left|u_t^k\right| \mathrm{d}x \le \left\|u_t^{k-1}\right\|_{L^\infty(I)} \left\|\sqrt{\rho^k} u_x^k\right\|_{L^2(I)} \left\|\sqrt{\rho^k} u_t^k\right\|_{L^2(I)} \\
&\le C\Phi_K^2(t) + \eta_2 \left\|u_{xt}^{k-1}\right\|_{L^2(I)}^2.
\end{aligned}
$$

其中η_1,η_2为与μ_1有关的足够小的常数。将上述估计代入(18)中有：

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left\|\sqrt{\rho^k} u_t^k\right\|_2^2 + \frac{\mu_1}{3}\int_0^1 \left|u_{xt}^k\right|^2 \mathrm{d}x + \mu_0 \int_0^1 \left(p(x)-1\right)\left(1+\left|u_x^k\right|^2\right)^{\frac{p(x)-2}{2}} \left(u_{xt}^k\right)^2 \mathrm{d}x \\
&\le C\Phi_K^{\gamma+\frac{7}{2}}(t) + \frac{\mu_1}{5}\left\|u_{xx}^k\right\|_{L^2(I)}^2 + \eta_1 \left\|u_{xx}^{k-1}\right\|_{L^2(I)}^2 + \eta_2 \left\|u_{xt}^{k-1}\right\|_{L^2(I)}^2.
\end{aligned} \tag{19}
$$

接下来，我们估计$\left\|\sqrt{\rho^k} u_x^k(t)\right\|_{L^2(I)}$。将方程(7)两端同乘以$-u_{xx}^k$，然后在$(0,1)$上关于$x$积分，由方程(6)和分部积分，我们得到

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_0^1 \rho^k \left(u_x^k\right)^2 \mathrm{d}x + \mu_1 \int_0^1 \left(u_{xx}^k\right)^2 \mathrm{d}x + \mu_0 \int_0^1 \left[\left(1+\left|u_x^k\right|^2\right)^{\frac{p(x)-2}{2}} u_x^k\right]_x u_{xx}^k \mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 \pi_x^k u_{xx}^k \mathrm{d}x + \int_0^1 \rho_t^k \left(u_x^k\right)^2 \mathrm{d}x - \int_0^1 \rho_x^k u_t^k u_x^k \mathrm{d}x.
\end{aligned} \tag{20}
$$

我们首先计算方程(20)左端的第三项，

$$
\begin{aligned}
&\left[\left(1+\left|u_x^k\right|^2\right)^{\frac{p(x)-2}{2}} u_x^k\right]_x u_{xx}^k = \left(e^{\frac{p(x)-2}{2}\ln\left(1+\left|u_x^k\right|^2\right)} u_x^k\right)_x u_{xx}^k \\
&= \left(1+\left|u_x^k\right|^2\right)^{\frac{p(x)-2}{2}} \left(u_{xx}^k\right)^2 + \left(1+\left|u_x^k\right|^2\right)^{\frac{p(x)-2}{2}} \left(\frac{p_x(x)}{2}\ln\left(1+\left|u_x^k\right|^2\right) + \frac{p(x)-2}{2}\frac{2\left|u_x^k\right|u_{xx}^k}{1+\left|u_x^k\right|^2}\right) u_x^k u_{xx}^k \\
&= \frac{p_x(x)}{2}\left(1+\left|u_x^k\right|^2\right)^{\frac{p(x)-2}{2}} u_x^k u_{xx}^k \ln\left(1+\left|u_x^k\right|^2\right) + \left(1+\left|u_x^k\right|^2\right)^{\frac{p(x)-2}{2}} \left(u_{xx}^k\right)^2 \left[\frac{\left(p(x)-2\right)\left(u_x^k\right)^2}{1+\left|u_x^k\right|^2} + 1\right] \\
&\ge \frac{p_x(x)}{2}\left(1+\left|u_x^k\right|^2\right)^{\frac{p(x)-2}{2}} u_x^k u_{xx}^k \ln\left(1+\left|u_x^k\right|^2\right) + \left(p(x)-1\right)\left(1+\left|u_x^k\right|^2\right)^{\frac{p(x)-2}{2}} \left(u_{xx}^k\right)^2.
\end{aligned}
$$

将上式代入(20)，有

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_0^1 \rho^k \left(u_x^k\right)^2 \mathrm{d}x + \mu_1 \int_0^1 \left(u_{xx}^k\right)^2 \mathrm{d}x + \mu_0 \int_0^1 \left(p(x)-1\right)\left(1+\left|u_x^k\right|^2\right)^{\frac{p(x)-2}{2}} \left(u_{xx}^k\right)^2 \mathrm{d}x \\
&\le \int_0^1 \left|\pi_x^k\right| \left|u_{xx}^k\right| \mathrm{d}x + \int_0^1 \left|\left(\rho^k u^k\right)_x\right| \left|u_x^k\right|^2 \mathrm{d}x + \int_0^1 \left|\rho^k\right| \left|\left(u_t^k u_x^k\right)_x\right| \mathrm{d}x \\
&\quad + \int_0^1 \left|\frac{p_x(x)}{2}\right| \left|\left(1+\left|u_x^k\right|^2\right)^{\frac{p(x)-2}{2}}\right| \left|u_x^k\right| \left|u_{xx}^k\right| \left|\ln\left(1+\left|u_x^k\right|^2\right)\right| \mathrm{d}x.
\end{aligned} \tag{21}
$$

为了估计(21)，我们需要仔细计算上式右端第四项。应用 Hölder 不等式和 Young's 不等式，我们可

以得到

$$\begin{aligned}
&\int_0^1\left|\frac{p_x(x)}{2}\right|\left|\left(1+\left|u_x^k\right|^2\right)^{\frac{p(x)-2}{2}}\right|\left|u_x^k\right|\left|u_{xx}^k\right|\left|\ln\left(1+\left|u_x^k\right|^2\right)\right|\mathrm{d}x\\
&\le C\int_0^1\left(\left|\frac{1}{2\sqrt{p(x)-1}}\right|\left|\left(1+\left|u_x^k\right|^2\right)^{\frac{p(x)-2}{4}}\right|\cdot\left|\sqrt{p(x)-1}\right|\left(1+\left|u_x^k\right|^2\right)^{\frac{p(x)-2}{4}}\left|u_x^k\right|\left|u_{xx}^k\right|\left|\ln\left(1+\left|u_x^k\right|^2\right)\right|\right)\mathrm{d}x\\
&\le C\left(\int_0^1\left|\frac{1}{2\sqrt{p(x)-1}}\right|^2\left|\left(1+\left|u_x^k\right|^2\right)^{\frac{p(x)-2}{2}}\right|\left(u_x^k\right)^2\left|\ln^2\left(1+\left|u_x^k\right|^2\right)\right|\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}} \qquad (22)\\
&\quad\cdot\left(\int_0^1\left|p(x)-1\right|\left(1+\left|u_x^k\right|^2\right)^{\frac{p(x)-2}{2}}\left|\left(u_{xx}^k\right)^2\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}\\
&\le C\int_0^1\left|\left(1+\left|u_x^k\right|^2\right)^{\frac{p(x)-2}{2}}\right|\left(u_x^k\right)^2\left|\ln^2\left(1+\left|u_x^k\right|^2\right)\right|\mathrm{d}x+\frac{\mu_0}{2}\int_0^1\left|\left(p(x)-1\right)\left(1+\left|u_x^k\right|^2\right)^{\frac{p(x)-2}{2}}\right|\left(u_{xx}^k\right)^2\mathrm{d}x,
\end{aligned}$$

其中$\left\|p_x(x)\right\|_\infty\le C$和$1<p_\infty\le p(x)\le p_0<2$。把(22)代入(21)，应用方程(6)有

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left\|\sqrt{\rho^k}u_x^k\right\|_{L^2(I)}^2+\mu_1\int_0^1\left(u_{xx}^k\right)^2\mathrm{d}x+\frac{\mu_0}{2}\int_0^1\left(p(x)-1\right)\left(1+\left|u_x^k\right|^2\right)^{\frac{p(x)-2}{2}}\left(u_{xx}^k\right)^2\mathrm{d}x\\
&\le\int_0^1\left|\pi_x^k\right|\left|u_x^k\right|\mathrm{d}x+\int_0^1\left|\rho_x^k\right|\left|u^k\right|\left|u_x^k\right|^2\mathrm{d}x+\int_0^1\left|\rho^k\right|\left|u_x^k\right|^3\mathrm{d}x+\int_0^1\left|\rho^k\right|\left|u_{xx}^k\right|\left|u_t^k\right|\mathrm{d}x\\
&\quad+\int_0^1\left|\rho^k\right|\left|u_x^k\right|\left|u_{xt}^k\right|\mathrm{d}x+\int_0^1\left(u_x^k\right)^2\mathrm{d}x+C\int_0^1\left|\left(1+\left|u_x^k\right|^2\right)^{\frac{p(x)}{2}}\right|\left|\ln^2\left(1+\left|u_x^k\right|^2\right)\right|\mathrm{d}x \qquad (23)\\
&=\sum_{i=1}^{7}J_i.
\end{aligned}$$

应用 Sobolev 不等式和 Young’s 不等式，有

$$J_1=\int_0^1\left|\pi_x^k\right|\left|u_x^k\right|\mathrm{d}x\le\left\|\rho_x^k\right\|_{L^2(I)}^{\gamma}\left\|u_x^k\right\|_{L^2(I)}\le\Phi_K^{\frac{\gamma}{2}+\frac{1}{2}}(t);$$

$$J_2=\int_0^1\left|\rho_x^k\right|\left|u^k\right|\left|u_x^k\right|^2\mathrm{d}x\le\left\|u^k\right\|_{L^\infty(I)}\left\|\rho_x^k\right\|_{L^2(I)}\left\|u_x^k\right\|_{L^2(I)}\left\|u_x^k\right\|_{L^\infty(I)}\le C\Phi_K^3(t)+\frac{\mu_1}{5}\left\|u_{xx}^k\right\|_{L^2(I)}^2;$$

$$J_3=\int_0^1\left|\rho^k\right|\left|u_x^k\right|^3\mathrm{d}x\le\left\|\rho^k\right\|_{L^\infty(I)}^{\frac{1}{2}}\left\|\sqrt{\rho^k}u_x^k\right\|_{L^2(I)}\left\|u_x^k\right\|_{L^2(I)}\left\|u_x^k\right\|_{L^\infty(I)}\le C\Phi_K^{\frac{5}{2}}(t)+\frac{\mu_1}{5}\left\|u_{xx}^k\right\|_{L^2(I)}^2;$$

$$J_4=\int_0^1\left|\rho^k\right|\left|u_{xx}^k\right|\left|u_t^k\right|\mathrm{d}x\le\left\|\rho^k\right\|_{L^\infty(I)}^{\frac{1}{2}}\left\|\sqrt{\rho^k}u_t^k\right\|_{L^2(I)}\left\|u_{xx}^k\right\|_{L^2(I)}\le C\Phi_K^{\frac{3}{2}}(t)+\frac{\mu_1}{5}\left\|u_{xx}^k\right\|_{L^2(I)}^2$$

$$J_5=\int_0^1\left|\rho^k\right|\left|u_x^k\right|\left|u_{xt}^k\right|\mathrm{d}x\le\left\|\rho^k\right\|_{L^\infty(I)}^{\frac{1}{2}}\left\|\sqrt{\rho^k}u_x^k\right\|_{L^2(I)}\left\|u_{xt}^k\right\|_{L^2(I)}\le\Phi_K^{\frac{3}{2}}(t)+\frac{\mu_1}{6}\left\|u_{xt}^k\right\|_{L^2(I)}^2$$

$$J_6=\int_0^1\left(u_x^k\right)^2\mathrm{d}x\le\Phi_K(t)$$

对于$1<p_\infty\le p(x)\le p_0<2$和$2<s<3$，在 Sobolev 不等式的帮助下，我们可以推出

$$
\begin{aligned}
J_7 &= C\int_0^1 \left| \left(1+\left|u_x^k\right|^2\right)^{\frac{p(x)}{2}} \right| \left| \ln^2\left(1+\left|u_x^k\right|^2\right) \right| \mathrm{d}x \\
&\le C\left[\int_0^1 \left(\left| \left(1+\left|u_x^k\right|^2\right)^{\frac{p(x)}{2}} \right|^2 \right)^{\frac{s}{2}} \mathrm{d}x\right]^{\frac{2}{s}} \left[\int_0^1 \left| \ln^2\left(1+\left|u_x^k\right|^2\right) \right|^{\frac{s}{s-2}} \mathrm{d}x\right]^{\frac{s-2}{s}} \\
&\le C\left\| \left(1+\left|u_x^k\right|^2\right)^{\frac{p(x)}{4}} \right\|_{L^s}^2 \left[\int_0^1 \left| \ln\left(1+\left|u_x^k\right|^2\right) \right|^{\frac{2s}{s-2}} \mathrm{d}x\right]^{\frac{s-2}{s}} \\
&\le C\left\| \left(1+\left|u_x^k\right|^2\right)^{\frac{p(x)}{4}} \right\|_{L^s}^2 \left[\int_0^1 \left(\frac{8}{(s-2)p(x)} \left| \ln\left(1+\left|u_x^k\right|^2\right) \right|^{\frac{(s-2)p(x)}{8}} \right)^{\frac{2s}{s-2}} \mathrm{d}x\right]^{\frac{s-2}{s}} \\
&\le C\left\| \left(1+\left|u_x^k\right|^2\right)^{\frac{p(x)}{4}} \right\|_{L^s}^2 \left[\int_0^1 \left(\frac{8}{(s-2)p(x)} \left| \left(1+\left|u_x^k\right|^2\right) \right|^{\frac{(s-2)p(x)}{8}} \right)^{\frac{2s}{s-2}} \mathrm{d}x\right]^{\frac{s-2}{s}} \\
&\le C\left\| \left(1+\left|u_x^k\right|^2\right)^{\frac{p(x)}{4}} \right\|_{L^s}^2 \left| \left(1+\left|u_x^k\right|^2\right)^{\frac{p(x)}{4}} \right|_{L^s}^{s-2} = C\left| \left(1+\left|u_x^k\right|^2\right)^{\frac{p(x)}{4}} \right|_{L^s}^{s}
\end{aligned}
$$

应用 Sobolev 嵌入定理和 $2<s<3$，下式成立，

$$
\begin{aligned}
J_7 &\le C\left\| \left(1+\left|u_x^k\right|^2\right)^{\frac{p(x)}{4}} \right\|_{L^2}^2 \left\| \left(1+\left|u_x^k\right|^2\right)^{\frac{p(x)}{4}} \right\|_{W^{1,2}}^{s-2} \\
&\le C_\varepsilon \left\| \left(1+\left|u_x^k\right|^2\right)^{\frac{p(x)}{4}} \right\|_{L^2}^{\frac{4}{4-s}} + \varepsilon \left\| \left(1+\left|u_x^k\right|^2\right)^{\frac{p(x)}{4}} \right\|_{W^{1,2}}^2 \\
&\le C_\varepsilon \left\| \left(1+\left|u_x^k\right|^2\right)^{\frac{p(x)}{4}} \right\|_{L^2}^{\frac{4}{4-s}} + \varepsilon \left\| \left(1+\left|u_x^k\right|^2\right)^{\frac{p(x)}{4}} \right\|_{L^2}^2 + \varepsilon \left\| \left(\left(1+\left|u_x^k\right|^2\right)^{\frac{p(x)}{4}} \right)_x \right\|_{L^2}^2 .
\end{aligned} \tag{24}
$$

类似(22)中的估计，我们可以得到

$$
\left\| \left(\left(1+\left|u_x^k\right|^2\right)^{\frac{p(x)}{4}} \right)_x \right\|_{L^2}^2 \le C\left(\int_0^1 \left(1+\left|u_x^k\right|^2\right)^{\frac{p(x)}{2}} \ln^2\left(1+\left|u_x^k\right|^2\right) \mathrm{d}x + \int_0^1 \left| \left(1+\left|u_x^k\right|^2\right)^{\frac{p(x)-2}{2}} \right| \left(u_{xx}^k\right)^2 \mathrm{d}x \right). \tag{25}
$$

因此，联立(24)和(25)，因为$1<p(x)<2$，$2<s<3$，选取足够小的ε，我们可以得到J_7的估计，

$$
J_7 \le C\left\| \left(1+\left|u_x^k\right|^2\right)^{\frac{p(x)}{4}} \right\|_{L^2}^4 + \varepsilon C\int_0^1 \left| \left(1+\left|u_x^k\right|^2\right)^{\frac{p(x)-2}{2}} \right| \left(u_{xx}^k\right)^2 \mathrm{d}x \le C\Phi_K^2(t) + \frac{\mu_0\left(p_\infty-1\right)}{2} \int_0^1 \left| \left(1+\left|u_x^k\right|^2\right)^{\frac{p(x)-2}{2}} \right| \left(u_{xx}^k\right)^2 \mathrm{d}x.
$$

收集 $J_i, i=1,\cdots,7$ 的估计，带入(23)，可以得到

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left\|\sqrt{\rho^k}u_x^k\right\|_2^2+\frac{2\mu_1}{5}\left\|u_{xx}^k\right\|_2^2+\frac{\mu_0\left(p_\infty-1\right)}{2}\int_0^1\left(1+\left|u_x^k\right|^2\right)^{\frac{p(x)-2}{2}}\left|u_{xx}^k\right|^2\mathrm{d}x\\&\le C\Phi_K^{\frac{\gamma}{2}+3}(t)+\frac{\mu_1}{6}\left\|u_{xt}^k\right\|_2^2.\end{aligned}\tag{26}$$

将(19)和(26)相加，可以得到

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\left\|\sqrt{\rho^k}u_t^k\right\|_{L^2(I)}^2+\left\|\sqrt{\rho^k}u_x^k\right\|_{L^2(I)}^2\right)+\frac{\mu_0\left(p_\infty-1\right)}{2}\int_0^1\left(1+\left|u_x^k\right|^2\right)^{\frac{p(x)-2}{2}}\left|u_{xx}^k\right|^2\mathrm{d}x\\&+\mu_0\left(p_\infty-1\right)\int_0^1\left(1+\left|u_x^k\right|^2\right)^{\frac{p(x)-2}{2}}\left|u_{xt}^k\right|^2\mathrm{d}x+\frac{\mu_1}{6}\int_0^1\left|u_{xt}^k\right|^2\mathrm{d}x+\frac{\mu_1}{5}\int_0^1\left|u_{xx}^k\right|^2\mathrm{d}x\\&\le C\Phi_K^{\gamma+\frac{7}{2}}(t)+\eta_1\left\|u_{xx}^{k-1}\right\|_{L^2(I)}^2+\eta_2\left\|u_{xt}^{k-1}\right\|_{L^2(I)}^2.\end{aligned}\tag{27}$$

将上述不等式在 $(\tau,t)\subset(0,t)$ 上积分，同时选取足够小的 η_1,η_2，对正整数 $K\ge 1$，我们有

$$\begin{aligned}&\max_{1\le k\le K}\left(\sup_{\tau\le s\le t}\left\|\sqrt{\rho^k}u_t^k(s)\right\|_{L^2(I)}^2+\left\|\sqrt{\rho^k}u_x^k(s)\right\|_{L^2(I)}^2+\int_\tau^t\left\|u_{xt}^k\right\|_{L^2(I)}^2\mathrm{d}s+\int_\tau^t\left\|u_{xx}^k\right\|_{L^2(I)}^2\mathrm{d}s\right.\\&\left.+\int_\tau^t\int_0^1\left(1+\left|u_x^k\right|^2\right)^{\frac{p(x)-2}{2}}\left|u_{xx}^k\right|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}s+\int_\tau^t\int_0^1\left(1+\left|u_x^k\right|^2\right)^{\frac{p(x)-2}{2}}\left|u_{xt}^k\right|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}s\right)\\&\le\left\|\sqrt{\rho^k}u_t^k(\tau)\right\|_{L^2(I)}^2+\left\|\sqrt{\rho^k}u_x^k(\tau)\right\|_{L^2(I)}^2+C\int_\tau^t\Phi_K^{\gamma+\frac{7}{2}}(s)\mathrm{d}s.\end{aligned}$$

由相容性条件(4)、方程(7)和 (ρ_0,u_0) 的正则性，可以得到

$$\begin{aligned}&\lim_{\tau\to 0}\int_0^1\rho^k\left|u_t^k\right|^2(\tau)\mathrm{d}x\le\left|\rho_0\right|_{L^\infty(I)}\left|u_0\right|_{L^\infty(I)}^2\left|u_{0x}\right|_{L^2(I)}^2+\left|g\right|_{L^2(I)}^2\le C;\\&\lim_{\tau\to 0}\left\|\sqrt{\rho^k}u_x^k\right\|_{L^2(I)}^2=\int_0^1\rho_0\left|u_{0x}\right|^2\mathrm{d}x=\left|\rho_0\right|_{L^\infty(I)}\left|u_{0x}\right|_{L^2(I)}^2\le C.\end{aligned}$$

由此，令 $\tau\to 0$，我们可以得到

$$\begin{aligned}&\max_{1\le k\le K}\left(\sup_{0\le s\le t}\left\|\sqrt{\rho^k}u_t^k(t)\right\|_{L^2(I)}^2+\left\|\sqrt{\rho^k}u_x^k(t)\right\|_{L^2(I)}^2+\int_0^t\left\|u_{xt}^k\right\|_{L^2(I)}^2\mathrm{d}s+\int_0^t\left\|u_{xx}^k\right\|_{L^2(I)}^2\mathrm{d}s\right.\\&\left.+\int_0^t\int_0^1\left(1+\left|u_x^k\right|^2\right)^{\frac{p(x)-2}{2}}\left|u_{xx}^k\right|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}s+\int_0^t\int_0^1\left(1+\left|u_x^k\right|^2\right)^{\frac{p(x)-2}{2}}\left|u_{xt}^k\right|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}s\right)\\&\le C\left(1+\int_0^t\Phi_K^{\gamma+\frac{7}{2}}(t)\mathrm{d}s\right).\end{aligned}$$

引理 2 证明完成。

引理 3： 假设 (ρ^k,u^k) 是方程(6)~(7)的解，存在 $T\in(0,\infty)$，对任意的 $t\in[0,T]$，

$$\sup_{0\le s\le t}\left\|\rho^k(t)\right\|_{H^1(I)}^2\le C\exp\left(\int_0^t C\Phi_K^{\gamma+\frac{7}{2}}\mathrm{d}s\right)$$

证明： 用 ρ^k 乘以方程(6)两端，并关于 x 在 $[0,1]$ 上积分，可以得到如下不等式

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_0^1\left|\rho^k(t)\right|^2\mathrm{d}x \le \int_0^1\left|\rho^k\right|^2\left|u_x^{k-1}\right|(t)\,\mathrm{d}x \le C\left\|u_{xx}^{k-1}\right\|_{L^2(I)}\left\|\rho^k\right\|_{L^2(I)}^2. \tag{28}$$

另一方面，(6)关于 x 求导后两边乘以 ρ_x^k 并关于 x 在 $[0,1]$ 上积分，得

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_0^1\left|\rho_x^k(t)\right|^2\mathrm{d}x &= -\int_0^1\left[\frac{3}{2}u_x^{k-1}\left(\rho_x^k\right)^2+\rho^k\rho_x^k u_{xx}^{k-1}\right]\mathrm{d}x\\ &\le C\left(\left\|u_{xx}^{k-1}\right\|_{L^2(I)}\left\|\rho_x^k\right\|_{L^2(I)}^2+\left\|\rho^k\right\|_{L^\infty(I)}\left\|\rho_x^k\right\|_{L^2(I)}\left\|u_{xx}^{k-1}\right\|_{L^2(I)}\right).\end{aligned} \tag{29}$$

综合(28)和(29)式，有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left\|\rho^k(t)\right\|_{H^1(I)}^2 \le C\left\|\rho^k\right\|_{H^1(I)}^2\left\|u_{xx}^{k-1}\right\|_{L^2(I)}, \tag{30}$$

由 Gronwall’s 不等式和引理 1，上式可推得

$$\left\|\rho^k(t)\right\|_{H^1(I)} \le \left\|\rho_0\right\|_{H^1(I)}\exp\left(C\int_0^t\left\|u_{xx}^{k-1}\right\|_{L^2(I)}\mathrm{d}s\right) \le C\exp\left(\int_0^t C\Phi_K^{\gamma+\frac{7}{2}}\mathrm{d}s\right). \tag{31}$$

引理 3 得证。

应用引理 1~3 和 $\Phi_K(t)$ 的定义可得

$$\Phi_K(t) \le C\exp\left(C\int_0^t\Phi_K^{\gamma+\frac{7}{2}}(s)\,\mathrm{d}s\right). \tag{32}$$

容易证明存在 $T_* = C^{-\gamma+\frac{7}{2}}e_2^{-C\left(\gamma+\frac{7}{2}\right)}$，使得

$$\int_0^{T_*}\Phi_K^{\gamma+\frac{7}{2}}(t)\,\mathrm{d}s < C$$

因此，我们得到逼近解 $\left(\rho^k,u^k\right)$ 的能量估计：对 $0\le t\le T_*$，下式成立

$$\begin{aligned}&\left(\sup_{0\le t\le T_*}\left\|\sqrt{\rho^k}u_t^k(t)\right\|_{L^2(I)}^2+\left\|\sqrt{\rho^k}u_x^k(t)\right\|_{L^2(I)}^2+\left\|u_x^k\right\|_{L^2(I)}^2+\int_0^1\left(1+\left|u_x^k\right|^2\right)^{\frac{p(x)}{2}}\mathrm{d}x+\left\|\rho^k(t)\right\|_{H^1(I)}^2\right)\\ &+\int_0^{T_*}\left\|u_{xt}^k\right\|_{L^2(I)}^2\mathrm{d}s+\int_0^{T_*}\left\|u_{xx}^k\right\|_{L^2(I)}^2\mathrm{d}s+\int_0^{T_*}\int_0^1\left(1+\left|u_x^k\right|^2\right)^{\frac{p(x)-2}{2}}\left|u_{xx}^k\right|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}s\\ &+\int_0^{T_*}\int_0^1\left(1+\left|u_x^k\right|^2\right)^{\frac{p(x)-2}{2}}\left|u_{xt}^k\right|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}s \le C\end{aligned}$$

3. 定理 1 的证明

在第二节中得到了逼近解的与密度下界无关的能量估计，应用[2]的方法，我们可以证明当 $k\to\infty,\delta\to 0$ 时，逼近解 $\left(\rho^k,u^k\right)$ 强收敛，进一步可以证明极限 (ρ,u) 为问题(1)~(2)的唯一解，至此，我们完成了定理 1 的证明。

基金项目

由国家自然科学基金项目资助(No.11901379)。

参考文献

[1] Winslow, W.M. (1949) Induced Fibration of Suspensions. *Journal of Applied Physics*, **20**, 1137-1140. https://doi.org/10.1063/1.1698285

[2] 黄晓娟, 带有 Power-Law 型粘性项的可压缩非牛顿流的光滑解[J]. 理论数学, 2019, 9(3): 243-253. https://doi.org/10.12677/PM.2019.93031

[3] Yang, D. and Tong, L.N. (2017) Existence and Uniqueness of Compressible Non-Newtonian Ellis Fluids for One-Dimension with Vacuum. *Communication on Applied Mathematics and Computation*, **31**, 128-142. http://qikan.cqvip.com/article/detail.aspx?id=671559827

[4] Yuan, H.J. and Li, H.P. (2012) Existence and Uniqueness of Solutions for a Class of Non-Newtonian Fluids with Vacuum and Damping. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **391**, 223-239. https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2012.02.015

[5] Rajagopal, K.R. and Růžička, M, (1996) On the Modeling of Eletrorheological Materials. *Mechanics Research Communications*, **23**, 401-407. https://doi.org/10.1016/0093-6413(96)00038-9

[6] Růžička, M. (2000) Electrorheological Fluids: Modeling and Mathematical Theory. Springer-Verlag, Berlin. https://doi.org/10.1007/BFb0104029

[7] Diening, L. (2002) Theoretical and Numerical Results for Electrorheological Fluid. University of Freiburg, Germany. https://www.researchgate.net/publication/29756045

[8] Tersenov, A.S. (2016) The One Dimensional Parabolic p(x)-Laplace Equation. *Nonlinear Differential Equations and Applications*, **23**, 27. https://doi.org/10.1007/s00030-016-0377-y

[9] Lian, S., Gao, W., Hongjun, Y. and Cao, C. (2012) Existence of Solutions to an Initial Dirichlet Problem of Evolution alp(x)-Laplace Equations. *Annales de l'Institut Henri Poincare. Analyse Non Lineaire*, **29**, 377-399. https://doi.org/10.1016/j.anihpc.2012.01.001

[10] Winkert, P. and Zacher, R. (2016) Global *A Priori* Bounds for Weak Solutions to Quasilinear Parabolic Equations with Nonstandard Growth. *Nonlinear Analysis*: *Theory, Methods & Applications*, **145**, 1-23. https://doi.org/10.1016/j.na.2016.06.012

[11] Chen. M.T. and Xu. X.J. (2016) Unique Solvability for the Density-Dependent Non-Newtonian Compressible Fluids with Vacuum. *Mathematische Nachrichten*, **289**, 452-470. https://doi.org/10.1002/mana.201100153

[12] Melikyan. A. (1998) Generalized Characteristics of First Order PDEs. Hamilton Printing, New York. https://doi.org/10.1007/978-1-4612-1758-9