Pure Mathematics 理论数学, 2021, 11(1), 103-108
Published Online January 2021 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2021.111015

Hilbert空间的非对称能级研究

罗嘉铭

河南科技大学数学与统计学院，河南 洛阳
Email: luojiaming332@163.com

收稿日期：2020年12月15日；录用日期：2021年1月15日；发布日期：2021年1月25日

摘 要

拓扑空间的相关理论在物理中有着非常广泛的应用，通过将Hilbert紧空间变换的理论推广到相对论量子力学的能级问题中，从而得到了在给定条件下非对称能级表达式，和在谐波振子状态下的相关物理量之间的关系。

关键词

拓扑空间，场方程，能级

Study on Asymmetric Energy Level of Hilbert Space

Jiaming Luo

School of Mathematics and Statistics, Henan University of Science and Technology, Luoyang Henan
Email: luojiaming332@163.com

Received: Dec. 15th, 2020; accepted: Jan. 15th, 2021; published: Jan. 25th, 2021

Abstract

The theory of topological space is widely used in physics. By extending the theory of Hilbert compact space transformation to the energy level problem of relativistic quantum mechanics, the relationship between the expression of asymmetric energy level under given conditions and the related physical quantities in the state of harmonic oscillator is obtained.

Keywords

Topological Space, Field Equation, Energy Level

文章引用: 罗嘉铭. Hilbert 空间的非对称能级研究[J]. 理论数学, 2021, 11(1): 103-108.
DOI: 10.12677/pm.2021.111015

1. 引言

拓扑学和相对论量子力学是上世纪数学和物理研究发展出的重要成果，从中产生了很多新的方法和问题，两者之间通过相互关联性而衍生出的学科交叉问题更是数学物理研究的重点。

2. Hilbert 紧空间与场方程的联系

考虑 Schwarzschild 度规下的时空方程[1]：

$$\mathrm{d}s^2 = \mathrm{e}^{\nu}\mathrm{d}t^2 - \mathrm{e}^{\lambda}\mathrm{d}r^2 - r^2\left(\mathrm{d}\theta^2 + \sin^2\theta\mathrm{d}\varphi^2\right)$$

取 Hilbert 空间中的点坐标

$$x^{\mu} = \left(ct, -r, -\theta, -\varphi\right) \tag{1}$$

显然 $x^{\mu} \in H$。由于 Hilbert 空间存在可数的处处稠密集，若 M 为 H 的子集，U 为 x^{μ} 的邻域，于是有 $\left[M\right] = M \cap U$，$M, U \subset S$，所以 $\left[M\right] = S$，因此 S 为稠密集[2]。

因为 $S, U \subset H$，其中 $U \subset S$，并且 H 是线性拓扑空间，所以子空间 S 和 U 也同样如此[3]。对于 $y^{\mu} \in S - U$ 必存在两个线性拓扑空间的线性算子 $A: H \to S - U$，使得

$$Ax^{\mu} = y^{\mu} \tag{2}$$

这里算子 $A \in D_A$，且 D_A 是线性流形。

因此，在所确定的线性空间中存在一点 x_n，使得

$$\left\|x^{\mu} - x_n\right\| = \left\|Ax^{\mu} - x_n\right\|$$

现在考虑弱拓扑的情况，当 $n \to \infty$ 时，$x_n \to 0$ 为空间 H 的零邻域系[3]，x_n 不与距离的中点重合的情况下，x^{μ} 和 y^{μ} 是非对称的，从而有非零的参数 $\pm L$，使得

$$2\left\|x^{\mu}\right\| \pm L = \left\|Ax^{\mu} - x^{\mu}\right\|$$

于是就有

$$2\sqrt{c^2t^2 + r^2 + \theta^2 + \varphi^2} \pm L = \left(A - 1\right)\sqrt{c^2t^2 + r^2 + \theta^2 + \varphi^2}$$

由

$$\mathcal{L} := \sqrt{c^2t^2 + r^2 + \theta^2 + \varphi^2} \Rightarrow 2\mathcal{L} \pm L = \left(A - 1\right)\mathcal{L}$$

得到 $A = \pm\dfrac{L}{\mathcal{L}} + 3$，再由式(1)和式(2)得到

$$y^{\mu} = \left(\pm\frac{L}{\mathcal{L}} + 3\right)\left(ct, -r, -\theta, -\varphi\right)$$

由此得到方程：

$$\mathrm{d}s'^2 = g'_{\mu\nu}\mathrm{d}x^{\mu}\mathrm{d}x^{\nu}$$

其中的度规为

$$g'_{\mu\nu}=\left(\pm\frac{L}{\mathcal{L}}+3\right)\begin{bmatrix} e^{\nu} & & & 0 \\ & -e^{\lambda} & & \\ & & -r^2 & \\ 0 & & & -r^2\sin^2\theta \end{bmatrix}$$

$$g'^{\mu\nu}=\left(\pm\frac{L}{\mathcal{L}}+3\right)\begin{bmatrix} e^{-\nu} & & & 0 \\ & -e^{-\lambda} & & \\ & & -r^{-2} & \\ 0 & & & -r^{-2}\sin^{-2}\theta \end{bmatrix}$$

根据 Einstein 场方程

$$R'_{\mu\nu}-\frac{1}{2}g'_{\mu\nu}R'=\kappa T'_{\mu\nu}$$

其中 Ricci 张量为

$$R'_{\mu\nu}=\frac{1}{\sqrt{-g'}}\partial_{\alpha}\left(\sqrt{-g'}\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}\right)-\partial_{\mu\nu}\left(\ln\sqrt{-g'}-\Gamma^{\alpha}_{\mu\beta}\Gamma^{\beta}_{\nu\alpha}\right)$$

并且由 Christoffel 记号的关系

$$\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}=\frac{1}{2}g'^{\alpha\beta}\Gamma_{\beta\mu\nu}=\frac{1}{2}g'^{\alpha\beta}\left(\frac{\partial g'_{\beta\mu}}{\partial x^{\nu}}+\frac{\partial g'_{\beta\nu}}{\partial x^{\mu}}-\frac{\partial g'_{\mu\nu}}{\partial x^{\beta}}\right)$$

其中 $g'=\det\left(g'_{\mu\nu}\right)$，经过计算得到

$$R'=g'^{\mu\nu}R_{\mu\nu}=e^{-\lambda}\left[\nu''-\frac{1}{2}\nu'\lambda'+\frac{1}{2}\nu'^2-\frac{2}{r}\left(\lambda'-\nu'\right)+\frac{2}{r^2}\right]-\frac{2}{r^2}$$

$$R'_{11}=\left(\pm\frac{L}{\mathcal{L}}+3\right)\left(-\frac{1}{2}\nu''+\frac{1}{4}\nu'\lambda'-\frac{1}{4}\nu'^2+\frac{\lambda'}{r}\right)$$

$$R'_{22}=\left(\pm\frac{L}{\mathcal{L}}+3\right)\left\{-e^{-\lambda}\left[1+\frac{1}{2}r\left(\nu'-\lambda'\right)\right]+1\right\}$$

$$R'_{33}=\left(\pm\frac{L}{\mathcal{L}}+3\right)\left\{-e^{-\lambda}\left[1+\frac{1}{2}r\left(\nu'-\lambda'\right)\right]\sin^2\theta+\sin^2\theta\right\}$$

$$R'_{00}=\left(\pm\frac{L}{\mathcal{L}}+3\right)\left[e^{\nu-\lambda}\left(\frac{1}{2}\nu''-\frac{1}{4}\nu'\lambda'+\frac{1}{4}\nu'^2+\frac{\nu'}{r}\right)\right]$$

由此可推出

$$\begin{aligned}\kappa T'_{00}&=R'_{00}-\frac{1}{2}g'_{00}R'\\&=\left(\pm\frac{L}{\mathcal{L}}+3\right)\left\{e^{\nu-\lambda}\left(\frac{1}{2}\nu''-\frac{1}{4}\nu'\lambda'+\frac{1}{4}\nu'^2+\frac{\nu'}{r}\right)\right.\\&\quad\left.-\frac{1}{2}e^{\nu-\lambda}\left[\nu''-\frac{1}{2}\nu'\lambda'+\frac{1}{2}\nu'^2-\frac{2}{r}\left(\lambda'-\nu'\right)+\frac{2}{r^2}\right]-\frac{e^{\nu}}{r^2}\right\}\\&=\left(\pm\frac{L}{\mathcal{L}}+3\right)\left[e^{\nu-\lambda}\frac{\nu'}{r}+\frac{e^{\nu-\lambda}}{r}\left(\lambda'-\nu'\right)-\frac{2e^{\nu-\lambda}}{r^2}-\frac{e^{\nu}}{r^2}\right]\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\kappa T_{11}' &= R_{11}' - \frac{1}{2} g_{11}' R' \\
&= \left(\pm \frac{L}{\mathcal{L}} + 3 \right) \left(-\frac{1}{2} \nu'' + \frac{1}{4} \nu' \lambda' - \frac{1}{4} \nu'^2 + \frac{\lambda'}{r} + \frac{1}{2} \nu'' \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{4} \nu' \lambda' + \frac{1}{4} \nu'^2 - \frac{\lambda' - \nu'}{r} + \frac{1}{r^2} - \frac{e^{\lambda}}{r^2} \right) \\
&= \left(\pm \frac{L}{\mathcal{L}} + 3 \right) \left(\frac{\nu'}{r} + \frac{1 - e^{\lambda}}{r^2} \right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\kappa T_{22}' &= R_{22}' - \frac{1}{2} g_{22}' R' \\
&= \left(\pm \frac{L}{\mathcal{L}} + 3 \right) \left(-e^{-\lambda} - \frac{e^{-\lambda} r (\nu' - \lambda')}{2} + 1 + \frac{1}{2} r e^{-\lambda} - \frac{1}{4} e^{-\lambda} \nu' \lambda' \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{4} e^{-\lambda} \nu'^2 - e^{-\lambda} \lambda' + e^{-\lambda} \nu' + \frac{e^{-\lambda}}{r} + \frac{1}{r} \right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\kappa T_{33}' &= R_{33}' - \frac{1}{2} g_{33}' R' \\
&= \left(\pm \frac{L}{\mathcal{L}} + 3 \right) \left\{ e^{-\lambda} \sin^2 \theta - \frac{1}{2} r (\nu' - \lambda') e^{-\lambda} \sin^2 \theta + \sin^2 \theta \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{2} r^2 \sin^2 \theta \left[e^{-\lambda} \nu'' - \frac{1}{2} e^{-\lambda} \nu' \lambda' + \frac{1}{2} e^{-\lambda} \nu'^2 - \frac{2}{r} e^{-\lambda} (\lambda' - \nu') + \frac{2}{r^2} e^{-\lambda} - \frac{2}{r^2} \right] \right\} \\
&= \left(\pm \frac{L}{\mathcal{L}} + 3 \right) \left[\frac{1}{2} r (\nu' - \lambda') e^{-\lambda} \sin^2 \theta + \frac{1}{2} r^2 e^{-\lambda} \nu'' \sin^2 \theta \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{4} r^2 e^{-\lambda} \nu' \lambda' \sin^2 \theta + \frac{1}{4} e^{-\lambda} r^2 \nu'^2 \sin^2 \theta \right]
\end{aligned}
$$

对于场方程 $R_{\mu\nu}' = \kappa \left(T_{\mu\nu}' - \frac{1}{2} g_{\mu\nu}' T' \right)$ 取最低近似，即 $T' = T_{\mu\nu}' g'^{\mu\nu} \cong T_{\mu\nu}' \eta'^{\mu\nu} \cong T_{00}' \eta'^{00} = T_{00}'$。

所以有 $\eta_{\mu\nu}'$ 下的弱引力场：$R_{\mu\nu}' = \kappa \left(T_{\mu\nu}' - \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu}' T' \right)$，其中 $\left| g_{\mu\nu}' - \eta_{\mu\nu}' \right| \ll 1$，所以 $\left| g_{\mu\nu} - \eta_{\mu\nu} \right| \ll \frac{1}{\frac{L}{\mathcal{L}} + 3}$，由于

$$
\kappa T' = \kappa T_{00}' = \left(\pm \frac{L}{\mathcal{L}} + 3 \right) \left[e^{\nu - \lambda} \frac{\nu'}{r} + \frac{e^{\nu - \lambda}}{r} (\lambda' - \nu') - \frac{2e^{\nu - \lambda}}{r^2} - \frac{e^{\nu}}{r^2} \right]
$$

其中 Einstein 场方程常数为 $\kappa = \frac{8\pi G}{c^4}$。所以

$$
T' = \frac{\left(\pm \frac{L}{\mathcal{L}} + 3 \right) c^4}{8\pi G} \left(\frac{e^{\nu - \lambda}}{r} \lambda'' - \frac{2e^{\nu - \lambda} + e^{\nu}}{r^2} \right) \tag{3}
$$

这里令 $T = \frac{e^{\nu - \lambda}}{r} \lambda'' - \frac{2e^{\nu - \lambda} + e^{\nu}}{r^2}$，所以式(3)变为 $T' = \frac{\left(\pm \frac{L}{\mathcal{L}} + 3 \right) c^4}{8\pi G} T$。

3. 谐波振子状态下的情况

将T'考虑为谐波振子的动能[4] [5] [6]，所以$\mathcal{H}'=T'+V'\left(z^{\mu}\right)$，因而

$$\mathcal{H}'=T'+V'\left(x\right)=\frac{\left(\pm\frac{L}{\mathcal{L}}+3\right)c^{4}}{8\pi G}T+V'\left(z^{\mu}\right)，其中\ T'=\frac{\left(\pm\frac{L}{\mathcal{L}}+3\right)c^{4}}{8\pi G}T=\frac{p'^{2}}{2m} \tag{4}$$

这里$V'\left(z^{\mu}\right)=\frac{1}{2}m\omega^{2}\left(z^{\mu}\right)^{2}$，$\omega=\sqrt{\frac{\kappa}{m}}$。

考虑振子在x^{μ}与Ax^{μ}两点确定的距离轴上运动的情况，即$\|x\|$的取值为$\min\left(\left\|x^{\mu}\right\|,\left\|Ax^{\mu}\right\|\right)<\left\|z^{\mu}\right\|<\max\left(\left\|x^{\mu}\right\|,\left\|Ax^{\mu}\right\|\right)$，因此在这种情况下势能$V'\left(z^{\mu}\right)\to 0$。所以

$$E'=T'=\frac{1}{2}m\dot{x}^{2}，且\ \dot{z}^{\mu}=\frac{\partial\mathcal{H}'}{\partial p'}=\frac{p'}{m} \tag{5}$$

根据式(4)、(5)得到$\left(\dot{z}^{\mu}\right)^{2}=\frac{p'^{2}}{m^{2}}=\frac{2}{m}T'=\frac{\left(\pm\frac{L}{\mathcal{L}}+3\right)c^{4}}{4\pi Gm}T$，所以$E'=\frac{\left(\pm\frac{L}{\mathcal{L}}+3\right)c^{4}}{8\pi G}T$，这里$\left(-\frac{L}{\mathcal{L}}+2\right)\mathcal{L}<L<\left(\frac{L}{\mathcal{L}}+2\right)\mathcal{L}$。当$L\to 0$时$E'\to\frac{3c^{4}}{8\pi G}T$，此时$x_{n}$位于中点处；当$L\to\left(\frac{L}{\mathcal{L}}+2\right)\mathcal{L}$时$E'^{(+)}\to\frac{Lc^{4}}{8\mathcal{L}\pi G}T+\frac{5c^{4}}{8\pi G}T$，得到情形(a)：$\left\|x_{n}\right\|$无限趋近$\min\left(\left\|x^{\mu}\right\|,\left\|Ax^{\mu}\right\|\right)$；当$L\to\left(-\frac{L}{\mathcal{L}}+2\right)\mathcal{L}$时$E'^{(-)}\to-\frac{Lc^{4}}{8\mathcal{L}\pi G}T+\frac{5c^{4}}{8\pi G}T$，得到情形(b)：$\left\|x_{n}\right\|$无限趋近$\max\left(\left\|x^{\mu}\right\|,\left\|Ax^{\mu}\right\|\right)$。

根据情形(a)就有$2\left(\left\|x^{\mu}\right\|+L_{n}\right)=\left(A-1\right)\mathcal{L}$，所以

$$L+2\mathcal{L}=2\mathcal{L}+2L_{n}\Rightarrow L=2L_{n}\Rightarrow E'^{(+)}=\frac{L_{n}c^{4}}{4\mathcal{L}\pi G}T+\frac{5c^{4}}{8\pi G}T=E_{n}'^{(+)}$$

根据情形(b)就有$\left\|x^{\mu}\right\|+L_{n}=\left(A-1\right)\mathcal{L}$，所以

$$\mathcal{L}+L_{n}=-L+2\mathcal{L}\Rightarrow -L=L_{n}-\mathcal{L}\Rightarrow E'^{(-)}=\frac{L_{n}c^{4}}{8\mathcal{L}\pi G}T+\frac{c^{4}}{2\pi G}T=E_{n}'^{(-)}$$

因此就得到紧空间内关于非对称点的能级：

$$E_{n}'^{(+)}=\frac{L_{n}c^{4}}{4\mathcal{L}\pi G}T+\frac{5c^{4}}{8\pi G}T,\quad E_{n}'^{(-)}=\frac{L_{n}c^{4}}{8\mathcal{L}\pi G}T+\frac{c^{4}}{2\pi G}T.$$

4. 总结

通过以上的论述和计算得到了在Hilbert紧空间变换条件下的两个从不同方向趋近的能级表达式，所得到的两个能级表达式体现为在谐波振子状态下的距离不对称性。然而相关的深入研究以及应用问题还需要进一步地加深探索。

参考文献

[1] Carmeli, M. (2006) Classical Fields: General Relativity and Gauge Theory. World Book Inc., Beijing.

[2] A. H. 柯尔莫戈洛夫, C. B. 佛明. 函数论与泛函分析初步[M]. 北京: 高等教育出版社, 2006.

[3] Munkres, J.R. 拓扑学[M]. 北京: 机械工业出版社, 2006.
[4] 朗道. 量子力学(非相对论理论) [M]. 北京: 高等教育出版社, 2008.
[5] Shankar, R. (2007) Principles of Quantum Mechanics. 2nd Edition, World Book Inc., Beijing.
[6] 塔诺季. 量子力学[M]. 北京: 高等教育出版社, 2014.