Pure Mathematics 理论数学, 2021, 11(12), 1967-1973
Published Online December 2021 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2021.1112219

一类常见摆方程的摄动问题

孟凡卉，邱汶华*

枣庄学院数学与统计学院，山东 枣庄

收稿日期：2021年11月2日；录用日期：2021年12月3日；发布日期：2021年12月13日

摘 要

本文主要研究了一类常见摆方程的摄动问题。该摆方程不同于经典的摆方程。本文研究了此类方程带扰动形式的可约化性。借助于KAM迭代法的思想，通过无穷次迭代，可以将方程约化为系数为常数的形式。

关键词

摆方程，迭代法，可约化性

Perturbation Problems for a Class of Common Pendulum Equations

Fanhui Meng, Wenhua Qiu*

School of Mathematics and Statistics, Zaozhuang University, Zaozhuang Shandong

Received: Nov. 2nd, 2021; accepted: Dec. 3rd, 2021; published: Dec. 13th, 2021

Abstract

This paper focuses on perturbation problems for a class of common pendulum equations. The pendulum equations are different from classical pendulum equations. We study the reducibility of the perturbed form for such equations. With the thought of KAM iterative method, the equation can be reduced to a suitable form, and the coefficient will be reduced to constant by infinite iterations.

Keywords

Pendulum Equation, Iterative Method, Reducibility

*通讯作者。

文章引用: 孟凡卉, 邱汶华. 一类常见摆方程的摄动问题[J]. 理论数学, 2021, 11(12): 1967-1973.
DOI: 10.12677/pm.2021.1112219

1. 引言

在生产生活中，有时需要用起重机吊起大铁球来拆除旧建筑物，可以用起重机的吊臂前后摇动铁球，使铁球来回撞击建筑物，最后将建筑物拆除(如图 1)。在图 1 中我们通过建立直角坐标系来描述该球的运动轨迹，用 $x(t)$ 表示 t 时刻 A 在 X 轴中的位置，$r(t)$ 表示 t 时刻索的长度，θ 表示 t 时刻索 AP 与 y 轴的夹角。进行力的分解，得到相应的运动方程，详见文献[1]。

$$\ddot{\theta}+\frac{2\dot{r}}{r}\dot{\theta}+\frac{g}{r}\sin\theta-\frac{\ddot{x}}{r}\cos\theta=0. \tag{1}$$

经典的受迫摆方程

$$\ddot{\theta}+\frac{\mu}{m}\dot{\theta}+\frac{g}{l}\sin\theta=0 \tag{2}$$

其中 $m>0$ 表示摆的质量，$l>0$ 表示摆的长度，$\mu\geq 0$ 为受迫系数，g 是重力常数。与经典的摆方程相比，系统(1)中 $\dot{\theta}$ 的系数依赖于时间 t。本文将利用约化理论研究这种摆的摄动问题。

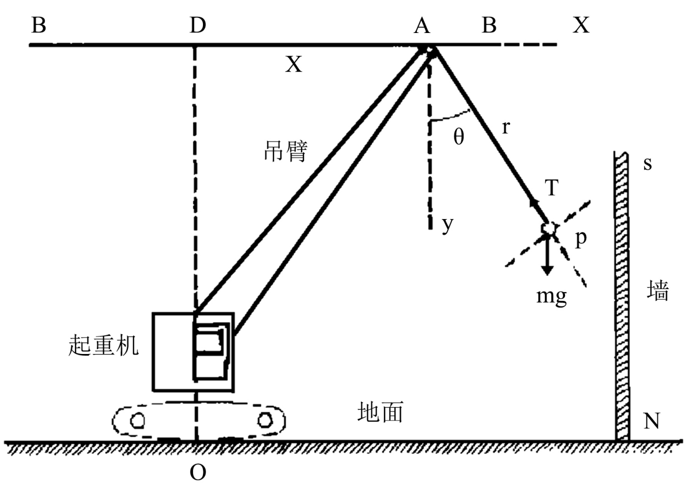

Figure 1. Working diagram of pendulum in engineering
图 1. 工程中的摆工作图

在微分方程的研究中，若线性方程能变换成常系数的方程，则我们称这种变换为李雅普诺夫变换。具体定义如下：

定义 1.1 考虑方程

$$\dot{x}(t)=A(t)x(t) \tag{3}$$

$A(t)$ 是实数域上的 $n\times n$ 矩阵。如果存在一个非奇异的 $n\times n$ 矩阵函数 $S(t)$ 满足下列条件：

1) $S(t)$ 和 $\dot{S}(t)$ 在实数域 R 上连续；

2) $S(t)$ 和 $\dot{S}(t)$ 在实数域 R 上有界，即存在数 $M>0$，使得

$$\left|S(t)\right| \le M, \left|\dot{S}(t)\right| \le M.$$

3) 通过变换 $x = S(t)y$，方程(3)可变成常系数方程

$$\dot{y} = Ry.$$

这时我们称方程(3)是可约化的，$S(t)$ 称为李雅普诺夫矩阵，变换 $x = S(t)y$ 称为李雅普诺夫变换。由弗洛凯(Floquet)定理可知，如果 $A(t)$ 是周期函数，那么(3)是可约化的。

对于摄动问题，许多人近年来针对不同的系统做了大量的工作，详见文献[2]-[7]等。借助于 KAM 迭代法的思想研究系统的约化问题是动力系统的一个重要的研究方向。在前人工作的基础之上，本文主要研究上述摆方程的摄动问题。

2. 摆方程摄动问题的可约化性

首先，我们把方程(1)变成下面的形式：

$$\begin{cases} \dot{\theta} = h \\ \dot{h} = -\dfrac{2\dot{r}}{r}h - \dfrac{g}{r}\sin\theta + \dfrac{\ddot{x}}{r}\cos\theta \end{cases}$$

令 $y = (\theta, h)$，则有

$$\dot{y} = f(t)y + g(t, y), \tag{4}$$

其中

$$f(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\dfrac{2\dot{r}}{r} \end{bmatrix}, g(t, y) = \begin{bmatrix} 0 \\ -\dfrac{g}{r}\sin\theta + \dfrac{\ddot{x}}{r}\cos\theta \end{bmatrix}.$$

当方程(1)是摄动系统时的可约化性问题，即 $-\dfrac{2\dot{r}}{r} = S + \varepsilon h(t)$，$S$ 是常数。这时

$$f(t) = S + \varepsilon H(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & s \end{bmatrix} + \varepsilon \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & h(t) \end{bmatrix},$$

$$g(t, y) = \begin{bmatrix} 0 \\ -\dfrac{g}{r}\sin\theta + \dfrac{\ddot{x}}{r}\cos\theta \end{bmatrix}.$$

定理 2.1 我们考虑下面的参数系统

$$\dot{y} = \left(S + \varepsilon H(t)\right)y + g(t, y), \tag{5}$$

其中 $\varepsilon > 0$，$H(t)$ 是一有界函数。则存在一个变换

$$\Phi^* : y = P(t)z,$$

经过此变换，系统(5)变成

$$\dot{z} = Sz + g^*(t, z). \tag{6}$$

证明： 定理的证明过程将用到 KAM 迭代方法。

1) 第一步

给定变换 $\Phi_1 : y = \left(I + \varepsilon P_1(t)\right)y_1$，其中 $P_1(t)$ 是下述方程的解

$$\dot{P}_1(t) = SP_1(t) - P_1(t)S + H(t). \tag{7}$$

原系统经过变换后得

$$\begin{aligned}\dot{y} &= \left(S+\varepsilon H(t)\right)y + g(t,y)\\ &= \left(S+\varepsilon H(t)\right)\left(I+\varepsilon P_1(t)\right)y_1 + g\left(t,\left(I+\varepsilon P_1(t)\right)y_1\right)\\ &= \varepsilon\dot{P}_1(t)y_1 + \left(I+\varepsilon P_1(t)\right)\dot{y}_1\end{aligned}$$

$$\left(I+\varepsilon P_1(t)\right)\dot{y}_1 = \left[S+\varepsilon SP_1(t)+\varepsilon H(t)-\varepsilon\dot{P}_1(t)+\varepsilon^2 H(t)P_1(t)\right]y_1 + g\left(t,\left(I+\varepsilon P_1(t)\right)y_1\right)$$

故

$$\begin{aligned}\dot{y}_1 = {}&\left(I+\varepsilon P_1(t)\right)^{-1}\left[S+\varepsilon SP_1(t)+\varepsilon H(t)-\varepsilon\dot{P}_1(t)+\varepsilon^2 H(t)P_1(t)\right]y_1\\ &+\left(I+\varepsilon P_1(t)\right)^{-1} g\left(t,\left(I+\varepsilon P_1(t)\right)y_1\right).\end{aligned}$$

根据(7)，可得

$$\begin{aligned}\dot{y}_1 &= \left[S+\varepsilon^2\left(I+\varepsilon P_1(t)\right)^{-1} H(t)P_1(t)\right]y_1 + \left(I+\varepsilon P_1(t)\right)^{-1} g\left(t,\left(I+\varepsilon P_1(t)\right)y_1\right)\\ &= \left[S+\varepsilon^2 H_1(t)\right]y_1 + g_1(t,y_1).\end{aligned}$$

下面我们来求解(7)

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix}\dot{p}_{111} & \dot{p}_{112}\\ \dot{p}_{121} & \dot{p}_{122}\end{bmatrix} &= \begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & s\end{bmatrix}\begin{bmatrix}p_{111} & p_{112}\\ p_{121} & p_{122}\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}p_{111} & p_{112}\\ p_{121} & p_{122}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & s\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & h(t)\end{bmatrix}\\ &= \begin{bmatrix}p_{121} & p_{122}\\ sp_{121} & sp_{122}\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}0 & p_{111}+sp_{112}\\ 0 & p_{121}+sp_{122}\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & h(t)\end{bmatrix}\\ &= \begin{bmatrix}p_{121} & p_{122}-p_{111}-sp_{112}\\ sp_{121} & h(t)-p_{121}\end{bmatrix}.\end{aligned}$$

因此有

$$\begin{aligned}\dot{p}_{111} &= p_{121},\\ \dot{p}_{112} &= p_{122}-p_{111}-sp_{112},\\ \dot{p}_{121} &= sp_{121},\\ \dot{p}_{122} &= h(t)-p_{121}.\end{aligned}$$

对于此方程组，可以先求解第三个方程，再求解第一个和第四个方程，得

$$p_{111} = C\mathrm{e}^{st},\ p_{121} = C\mathrm{e}^{st},\ p_{122} = \int h(t)\mathrm{d}t + C\mathrm{e}^{st}.$$

最后求解第二个方程，有

$$p_{112} = C\mathrm{e}^{-st} + \mathrm{e}^{-st}\int\left(p_{122}-p_{111}\right)\mathrm{e}^{st}\mathrm{d}t.$$

2) 第 *n* 步

对于变换

$$\Phi_n : y_n = \left(I+\varepsilon^{2^n}P_n(t)\right)y_{n+1},$$

系统(5)变成

$$\dot{y}_{n+1}=\left[S+\varepsilon^{2^{n+1}}H_{n+1}(t)\right]y_{n+1}+g_{n+1}(t,y_{n+1}),$$

$$g_{n+1}(t,y_{n+1})=\left(I+\varepsilon^{2^n}P_n(t)\right)^{-1}g_n(t,y_n).$$

其中 $P_n(t)$ 是下列方程的解，

$$\dot{P}_n(t)=SP_n(t)-P_n(t)S+H_n(t).$$

此方程的解法同第一步的解法类似。

$$\begin{bmatrix}\dot{p}_{n11} & \dot{p}_{n12}\\ \dot{p}_{n21} & \dot{p}_{n22}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & s\end{bmatrix}\begin{bmatrix}p_{n11} & p_{n12}\\ p_{n21} & p_{n22}\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}p_{n11} & p_{n12}\\ p_{n21} & p_{n22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & s\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}h_{n11}(t) & h_{n12}(t)\\ h_{n21}(t) & h_{n22}(t)\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}p_{n21} & p_{n22}\\ sp_{n21} & sp_{n22}\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}0 & p_{n11}+sp_{n12}\\ 0 & p_{n21}+sp_{n22}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}h_{n11}(t) & h_{n12}(t)\\ h_{n21}(t) & h_{n22}(t)\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}p_{n21}+h_{n11}(t) & p_{n22}-sp_{n12}+h_{n12}(t)\\ sp_{n21}+h_{n21}(t) & p_{n21}+2sp_{n22}+h_{n22}(t)\end{bmatrix}.$$

由此可得

$$\dot{p}_{n11}=p_{n21}+h_{n11}(t),$$

$$\dot{p}_{n12}=p_{n22}-sp_{n12}+h_{n12}(t),$$

$$\dot{p}_{n21}=sp_{n21}+h_{n21}(t),$$

$$\dot{p}_{n22}=p_{n21}+2sp_{n22}+h_{n22}(t).$$

对于此方程组，可以先求解第三个方程，得

$$p_{n21}=C\mathrm{e}^{st}+\mathrm{e}^{st}\int h_{n21}(t)\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t.$$

接下来求解第一个方程，得

$$p_{n21}=\int\left[p_{n21}+h_{n21}(t)\right]\mathrm{d}t.$$

再求解第四个方程，得

$$p_{n22}=C\mathrm{e}^{2st}+\mathrm{e}^{2st}\int\left[p_{n21}+h_{n21}(t)\right]\mathrm{e}^{-2st}\mathrm{d}t.$$

最后求解第二个方程，得

$$p_{n22}=C\mathrm{e}^{-st}+\mathrm{e}^{-st}\int\left[p_{n22}+h_{n12}(t)\right]\mathrm{e}^{st}\mathrm{d}t.$$

3) 迭代

经过若干步之后，我们可以得到一个变换序列：

$$\Phi_1,\Phi_2,\cdots,\Phi_j,\cdots.$$

作变换

$$\Phi^n=\Phi_n\Phi_{n-1}\cdots\Phi_1,$$

$$\Phi^n: y=\left(I+\varepsilon P_1(t)\right)\cdots\left(I+\varepsilon^{2^n}P_n(t)\right)y_{n+1},$$

经过变换，原方程变成

$$\dot{y}_{n+1} = \left[S + \varepsilon^{2^{n+1}} H_{n+1}(t)\right] y_{n+1} + g_{n+1}(t, y_{n+1}).$$

$$\begin{aligned}
\left\|\Phi^n - \Phi^{n-1}\right\| &= \left\|\left(I + \varepsilon P_1(t)\right)\cdots\left(I + \varepsilon^{2^n} P_n(t)\right) - \left(I + \varepsilon P_1(t)\right)\cdots\left(I + \varepsilon^{2^{n-1}} P_{n-1}(t)\right)\right\| \\
&= \left\|\left(I + \varepsilon P_1(t)\right)\cdots\left(I + \varepsilon^{2^{n-1}} P_{n-1}(t)\right)\left[I + \varepsilon^{2^n} P_n(t) - I\right]\right\| \\
&= \left\|\left(I + \varepsilon P_1(t)\right)\cdots\left(I + \varepsilon^{2^{n-1}} P_{n-1}(t)\right)\varepsilon^{2^n} P_n(t)\right\| \\
&\le C 2^{n-1} \varepsilon^{2^n} < \varepsilon
\end{aligned}$$

故$\left\{\Phi^n\right\}$收敛，即

$$\Phi^n \to \Phi^*,\ n \to \infty.$$

我们记

$$\Phi^* : y = P(t) z.$$

对于充分小的$\varepsilon > 0$，当$n \to \infty$时，有

$$\varepsilon^{2^n} H_n(t) \to 0.$$

$$\begin{aligned}
g_n(t, y_n) &= \left(I + \varepsilon^{2^{n-1}} P_{n-1}(t)\right)^{-1} \cdots \left(I + \varepsilon P_1(t)\right)^{-1} g(t, y) \\
&\to P^{-1}(t) g\left(t, P(t) z\right) = g^*(t, z),\ n \to \infty.
\end{aligned}$$

故经过变换Φ^*，系统(5)变成

$$\dot{z} = Sz + g^*(t, z).$$

定理证毕。

本定理用数学中的理论和方法研究了这种摆方程的可约化性，其中迭代的思想广泛应用于解决数学和物理问题中。在处理摄动问题时，可以借助于现有的理论和 KAM 迭代的思想把系统变换成简单的形式。

致　谢

作者感谢编辑和审稿人对稿件的认真阅读，并提供宝贵的建议，这些建议将极大地提高论文的质量。

基金项目

国家自然科学基金(12171420)，枣庄学院博士基金(1020704)。

参考文献

[1] 张子方，蒋建军，傅英贵，林军，苏英. 一类摆动方程概周期解的存在性[J]. 浙江大学学报(理学版), 2001, 28(4): 360-363.

[2] Jorba, A. and Simo, C. (1996) On Quasi-Periodic Perturbations of Elliptic Equilibrium Points. *SIAM Journal on Mathematical Analysis*, **27**, 1704-1737. https://doi.org/10.1137/S0036141094276913

[3] Xu, J. (2007) Persistence of Floquet Invariant Tori for a Class of Non-Conservative Dynamical Systems. *Proceedings of the American Mathematical Society*, **135**, 805-814. https://doi.org/10.1090/S0002-9939-06-08529-7

[4] Geng, J. and Wu, J. (2017) Real Analytic Quasi-Periodic Solutions with More Diophantine Frequencies for Perturbed KdV Equations. *Journal of Dynamics and Differential Equations*, **29**, 1103-1130. https://doi.org/10.1007/s10884-016-9529-3

[5] Her, H. and You, J. (2008) Full Measure Reducibility for Generic One-Parameter Family of Quasi-Periodic Linear

Systems. *Journal of Dynamics and Differential Equations*, **20**, 831-866. https://doi.org/10.1007/s10884-008-9113-6

[6] Qiu, W.H. and Si, J.G. (2015) On Small Perturbation of Four-Dimensional Quasi-Periodic Systems with Degenerate Equilibrium Point. *Communications on Pure and Applied Analysis*, **14**, 421-437. https://doi.org/10.3934/cpaa.2015.14.421

[7] Xu, J.X. (2011) On Small Perturbation of Two-Dimensional Quasi-Periodic Systems with Hyperbolic-Type Degenerate Equilibrium Point. *Journal of Differential Equations*, **250**, 551-571. https://doi.org/10.1016/j.jde.2010.09.030