Pure Mathematics 理论数学, 2021, 11(12), 1987-1992
Published Online December 2021 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2021.1112221

Hans汉斯

奇数阶的4度2-弧传递图

李晓琪，赖子峰

云南财经大学统计与数学学院，云南 昆明

收稿日期：2021年11月4日；录用日期：2021年12月6日；发布日期：2021年12月13日

摘 要

设Γ是一个连通图，$G \le Aut(\Gamma)$，如果G作用在图的2-弧集上是传递的，则称Γ为$(G,2)$-弧传递图。在本文中，我们通过研究G作用在$V\Gamma$上拟本原来刻画奇数阶4度$(G,2)$-弧传递图，并且利用陪集图来描述这些图。

关键词

2-弧传递图，自同构群，拟本原，几乎单群

Tetravalent 2-Arc-Transitive Graphs of Odd Order

Xiaoqi Li, Zifeng Lai

School of Statistics and Mathematics, Yunnan University of Finance and Economics, Kunming Yunnan

Received: Nov. 4th, 2021; accepted: Dec. 6th, 2021; published: Dec. 13th, 2021

Abstract

Let Γ be a connected graph, $G \le Aut(\Gamma)$. Γ is said to be $(G,2)$-arc-transitive if G acts transitively on its 2-arcs. In this paper, we characterize tetravalent $(G,2)$-arc-transitive graphs of odd order by studying the quasiprimitive case of G acting on vertex set of Γ, and a description of these graphs as coset graphs is given.

Keywords

2-Arc-Transitive, Automorphism Groups, Quasiprimitive, Almost Simple Group

文章引用: 李晓琪, 赖子峰. 奇数阶的 4 度 2-弧传递图[J]. 理论数学, 2021, 11(12): 1987-1992.
DOI: 10.12677/pm.2021.1112221

1. 引言

本文中，考虑的图都是无向的、连通的、无自环和无重边的。

设Γ是一个图，我们用$V\Gamma$、$E\Gamma$和$A\Gamma$分别表示图Γ的顶点集、边集和弧集。用$Aut(\Gamma)$表示Γ的全自同构群。设$G \le Aut(\Gamma)$，若G在$V\Gamma$、$E\Gamma$和$A\Gamma$上的作用传递，则分别称Γ为G-点传递图、G-边传递图和G-弧传递图。对于一个正整数s和Γ的一个顶点序列$(\alpha_0,\alpha_1,\cdots,\alpha_s)$，如果$\{\alpha_{i-1},\alpha_i\}\in E\Gamma$和$\alpha_{i-1}\ne\alpha_{i+1}(1\le i\le s-1)$，则称该序列为图$\Gamma$的一条$s$-弧。如果$G \le Aut(\Gamma)$在$s$-弧集上是传递的，则称$\Gamma$是$(G,s)$-弧传递的。进一步，如果$G \le Aut(\Gamma)$在$s$-弧集上传递，在$(s+1)$-弧集上不传递，则称$\Gamma$为$(G,s)$-传递的。特别地，若$G = Aut(\Gamma)$，则简称$\Gamma$为$s$-弧传递图。

群与图是组合数学的一个重要分支，主要是利用二者之间的相互作用来刻画群或者图，其中用群来刻画对称图是代数图论的主要内容。设群G是集合Ω上的传递置换群，如果G的任意非平凡正规子群都在Ω上传递，称G是Ω上的拟本原置换群；如果G的任意非平凡正规子群在Ω上至多有两个轨道且存在一个正规子群在Ω上恰有两个轨道，则称G是Ω上的二部拟本原置换群。

刻画小度数的弧传递图是代数图论中的热门话题，引起了众多学者的关注。例如，Gardiner 和 Praeger [1] [2]对 4 度弧传递图进行了广泛的研究。对 2-弧传递图的研究可以追溯到 Tutte [3]对 3 度s-弧传递图的研究。其后大量的研究随之展开，一个显著的结果是 Weiss [4]于 1981 年证明了不存在除圈外的 8-弧传递图。而对一般的 2-弧传递图进行分类是很困难的，Praeger [5]提供了一种一般性的策略：

1) 决定所有的顶点拟本原和二部拟本原 2-弧传递图；

2) 决定 1)中图的正规覆盖。

在此方案的指导下，大量的 2-弧传递图类被刻画，例如方新贵和 Praeger [6] [7]研究了容许一个 Ree 群和 Suzuki 群作用上的 2-弧传递图；Hassiani 和 Praeger [8]分类了容许二维线性群$PSL(2,q)$作用上的 2-弧传递图；潘江敏教授等人分类了容许交换群作用上的 2-弧传递 Cayley 图[9]等。

Table 1. Tetravalent 2-arc-transitive graphs of odd order
表 1. 奇数阶的 4 度 2 弧传递图

Γ	G	G_v	s
K_5	A_5	A_4	2
	S_5	S_4	2
O_3	A_7	$\mathbb{Z}_3:S_4$	3
	S_7	$S_3\times S_4$	3
ξ_1	$R(3^{2m+1})$	A_4	2
ξ_2	$soc(G)=PSL(2,q), q\equiv\pm3(\bmod 8)$	A_4	2

而本文的主要目的是刻画阶为 n 的 4 度 2-弧传递图，其中 n 为奇数。本文中所使用的有限群论和图论中的相关符号都是标准的，可参考文献[10] [11] [12] [13]。设 n 是正整数，我们用 $\mathbb{Z}_n$ 、D_{2n} 和 SD_{16} 分别表示 n 阶循环群，$2n$ 阶二面体群和16 阶半二面体群。对于两个群 N 和 H，用 $N\times H$ 、 $N.H$ 和 $N:H$ 分别表示 N 与 H 的直积，N 被 H 的扩张和 N 被 H 的可裂扩张。用 K_n 、O_3 分别表示 n 阶完全图和 35 阶的奇图。本文的主要结论如下：

定理 1.1 设 Γ 是连通的 n 阶 4 度 $(G,2)$-弧传递图，其中 $G\le Aut(\Gamma)$，n 为奇数，则 G 在 $V\Gamma$ 上拟本原，且表 1 之一成立，其中 G_v 是 G 中稳定 v 的点稳定子群，s 代表 Γ 是 (G,s)-传递的。

2. 预备知识

本节主要是给出一些重要的引理和图例。首先给出关于 4 度 s-传递图的点稳定子群的结构，它是后续研究的基础。

引理 2.1 ([14]，命题 2.3)设 Γ 是一个连通的 4 度 (G,s)-传递图， $v\in V\Gamma$ ， G_v 是 G 中稳定 v 的点稳定子群，则 $s=1$，2，3，4 或 7。进一步地，

1) 若 $s=1$，则 G_v 是 2-群；
2) 若 $s=2$ ，则 $G_v\cong A_4$ 或 S_4 ；
3) 若 $s=3$ ，则 $G_v\cong A_4\times\mathbb{Z}_3$ ， $\mathbb{Z}_3:S_4$ 或 $S_3\times S_4$ ；
4) 若 $s=4$ ，则 $G_v\cong\mathbb{Z}_3^2:GL(2,3)$ ；
5) 若 $s=7$ ，则 $G_v\cong\left[3^5\right]:GL(2,3)$ 。

由于 A_4 ， S_3 ， S_4 ， $GL(2,3)$ 的 Sylow 2-子群的结构分别为 $\mathbb{Z}_2^2$ ， $\mathbb{Z}_2$ ， D_8 和 SD_{16}，其中 SD_{16} 为 16 阶的半二面体群。我们立即可得下面的推论。

推论 2.2 设 Γ 是一个连通的 4 度 (G,s)-传递图，其中 $G\le Aut(\Gamma)$，且 $s\ge 2$ 。令 $v\in V\Gamma$ ，并设 S 是 G_v 的一个 Sylow 2-子群，则下面的结论成立：

1) 若 $s=2$ ，则 $S\cong\mathbb{Z}_2^2$ 或 D_8 ；
2) 若 $s=3$ ，则 $S\cong\mathbb{Z}_2^2,D_8$ 或 $D_8\times\mathbb{Z}_2$ ；
3) 若 $s=4$ 或 7，则 $S\cong SD_{16}$ 。

定义 2.3 [12]设 G 是有限群，H 是 G 的子群。令 D 是若干个形如 HxH （$x\notin H$)的双陪集之并。我们定义群 G 上关于 H 和 D 的陪集图 $\Gamma=\mathrm{Cos}(G,H,D)$：顶点集 $V\Gamma=[G:H]$，即 H 在 G 中的所有右陪集之并，边集 $E\Gamma=\{\{Hx,Hyx\}\mid x\in G,y\in D\}$ 。

下面介绍陪集图的一些性质。

引理 2.4 [12]设 $\Gamma=\mathrm{Cos}(G,H,D)$ 是群 G 关于 H 和 D 的陪集图，则

1) Γ 是连通图当且仅当 $\langle D\rangle=G$ ；
2) Γ 是无向图当且仅当 $D=D^{-1}$；
3) Γ 是 G-弧传递的当且仅当 $D=Hx_iH$ （$x\notin H$)是一个单个的双陪集。

陪集图通常可以用来构造一些图例。下面例子是根据 4 度图的点稳定子群的结构及陪集图的性质构造而成，可参看文献[6]和[8]。

例 2.5: 1) 设 $G=R\left(3^{2m+1}\right)$，则 G 有一个子群 $H\cong A_4$，且存在一个对合 g 使得陪集图 $\mathrm{Cos}(G,H,HgH)$ 是奇数阶的 4 度 $(G,2)$-弧传递图，记为 ξ_1 。

2) 设 $T=PSL(2,q)$， $G=T.o$ ，其中 $q=p^f\equiv\pm3(\mathrm{mod}\,8)$，$f$ 是奇数， $o\cong1$ 或 $Z_3\le Out(T)$，则 G 有一个子群 $H\cong A_4$， 且存在一个对合 g 使得陪集图 $\mathrm{Cos}(G,H,HgH)$ 是奇数阶的 4 度 $(G,2)$-弧传递图，记为 ξ_2 。

例 2.6 1) 设 $G=A_5$，则 G 有一个子群 $H\cong A_4$，由 Magma [15]可知，存在一个阶为 5 的 4 度 2-弧传递图，并且是完全图，记为 K_5，$Aut(K_5)=S_5$。

2) 设 $G=S_5$，则 G 有一个子群 $H\cong S_4$，由 Magma [15]可知，存在一个阶为 5 的 4 度 2-弧传递图，并且是完全图，记为 K_5，$Aut(K_5)=S_5$。

例 2.7 1) 设 $G=A_7$，则 G 有一个子群 $H\cong \mathbb{Z}_3:S_4$，由 Magma [15]可知，存在一个阶为 35 的 4 度 2-弧传递图，记为 O_3，且 $Aut(O_3)=S_7$。

2) 设 $G=S_7$，则 G 有一个子群 $H\cong S_3\times S_4$，由 Magma [15]可知，存在一个阶为 35 的 4 度 2-弧传递图，记为 O_3，且 $Aut(O_3)=S_7$。

引理 2.8 ([16]，定理 3.2)设 Γ 是连通的 $(G,2)$-弧传递图，其中 G 在 $V\Gamma$ 上拟本原。则 G 是下列四种情形之一：

1) HA (仿射型)：$soc(G)$ 是初等交换 2-群，且在 $V\Gamma$ 上正则；

2) AS (几乎单型)：$soc(G)$ 是非交换单群；

3) PA (乘积作用型)：$soc(G)=T^k$，其中 T 是非交换单群，$k\geq 2$，且 $soc(G)$ 中没有在 $V\Gamma$ 上正则的正规子群；

4) TW (扭圈积型)：$soc(G)=T^k$，其中 T 是非交换单群，$k\geq 2$，且 $soc(G)$ 在 $V\Gamma$ 上正则。

引理 2.9 ([16]，命题 3.3)设 Γ 是连通的奇数阶 (G,s)-弧传递图，其中 $G\leq Aut(\Gamma)$ 在 $V\Gamma$ 上拟本原。则 $s\leq 3$，且当 $s=2$ 或 3 时，G 是几乎单群。

3. 定理 1.1 的证明

设 Γ 是 (G,s)-弧传递图，$v\in V\Gamma$，$|V\Gamma|=n$，其中 $G\leq Aut(\Gamma)$，$s\geq 2$，n 是奇数。设 r 为正整数，我们用 r_2 表示 r 的 2-幂部分，例如 $|G|_2$ 即为 G 的 Sylow 2-子群的阶。

引理 2.10 设 T 是有限非交换单群，S 是 T 的一个 Sylow 2-子群。如果 $|S|\leq 16$，则见表 2。

Table 2. On Sylow 2-subgroups of finite simple groups of order up to 2^4
表 2. Sylow 2-子群阶不超过 2^4 的有限单群

Row	T	S	$\lvert S\rvert$	Conditions
1	A_7	D_8	2^3	
2	J_1	$\mathbb{Z}_2^3$	2^3	
3	M_{11}	SD_{16}	2^4	
4	$PSL(2,8)$	$\mathbb{Z}_2^3$	2^3	
5	$PSL(2,16)$	$\mathbb{Z}_2^4$	2^4	
6	$R(3^{2m+1})$	$\mathbb{Z}_2^3$	2^3	
7	$PSL(2,q)$	$\mathbb{Z}_2^2$	2^2	$q\equiv 3,5(\bmod 8)$
		D_8	2^3	$q\equiv 7,9(\bmod 16)$
		D_{16}	2^4	$q\equiv 15,17(\bmod 32)$
8	$PSL(3,q)$	SD_{16}	2^4	$q\equiv 3(\bmod 8)$
9	$PSU(3,q)$	SD_{16}	2^4	$q\equiv 5(\bmod 8)$

证明：根据有限单群分类定理，如果$T=A_n$，则$|T|=\frac{n!}{2}$。由$|S|\le 16$可得$5\le n\le 7$，即$T=A_5$，A_6或A_7。如果T是26个零散单群中的一个，由零散单群的阶[12]可知，满足条件的T只可能为M_{11}或J_1，且$|M_{11}|_2=16$，$|J_1|_2=8$。接下来考虑Lie型单群系列。由[12]比较阶可知，除$PSL(d,q)$，$PSU(d,q)$和$R(3^{2m+1})$外，其余的几种Lie型单群系列的Sylow 2-子群的阶均大于16。如果$T=PSL(d,q)$，则

$$|T|=\frac{1}{(d,q-1)}q^{\frac{d(d-1)}{2}}\left(q^d-1\right)\left(q^{d-1}-1\right)\cdots\left(q^2-1\right).$$

若$q=2^e$是偶数，则$2\le\frac{ed(d-1)}{2}\le 4$，即$ed(d-1)=4$，6或8，于是$d=2,e=1,2,3$或$d=3,e=1$。若$q$是奇数，设$d\ge 3$是奇数，则$\left|\left(q^d-1\right)\left(q^{d-1}-1\right)\cdots\left(q^2-1\right)\right|\ge 2^4$，当且仅当$d=3$时等号成立，即此时$T=PSL(3,q)$；设$d$是偶数，当$d\ge 4$时，$\left|\frac{\left(q^d-1\right)\left(q^{d-1}-1\right)\cdots\left(q^2-1\right)}{(d,q-1)}\right|_2\ge 2^6$，不满足条件，则$d=2$，即$T=PSL(2,q)$。如果$T\cong PSU(d,q)$，则

$$|T|=\frac{1}{(d,q+1)}q^{\frac{d(d-1)}{2}}\left(q^d-(-1)^d\right)\left(q^{d-1}-(-1)^{d-1}\right)\cdots\left(q^2-1\right),$$

类似的，$d=3$，即$T=PSU(3,q)$。如果$T=R(3^{2m+1})$，则$|T|=q^3\left(q^3+1\right)(q-1)$。由于$3^{4m+2}\equiv 1(\bmod 8)$，则$|T|_2=2^3$。

定理1.1的证明：

因为$|V\Gamma|=n$，n是奇数，故G在$V\Gamma$上只能是拟本原的。由引理2.9知，$s=2$或3，且G是几乎单群。设$soc(G)=T$，其中T是非交换单群，则Γ是T-弧传递的，且$G=T.o$，$o\le Out(T)$。由推论2.2和$|G:G_v|=n$可得$|G|_2=4$，8或16，则$|T|_2=4$，8或16。由引理2.10，T见表2。

如果$T=A_7$，$Out(T)=\mathbb{Z}_2$，则$G\cong T.o\cong A_7$或者S_7，$o\le Out(T)$。由于$|G:G_v|=n$，则(G,G_v)有下列3种情形：(A_7,S_4)，$(A_7,\mathbb{Z}_3:S_4)$或$(S_7,S_3\times S_4)$。由例2.7，$\Gamma=O_3$。

如果$T=J_1$，$Out(T)=1$，则$G\cong J_1$，且G的Sylow 2-子群同构于$\mathbb{Z}_2^3$。由引理2.1，此时$G_v\cong S_4$或$\mathbb{Z}_3:S_4$，而G_v的Sylow 2-子群同构于D_8，矛盾。

如果$T=M_{11}$，$Out(T)=1$，则$G\cong M_{11}$，且G的Sylow 2-子群同构于SD_{16}。由引理2.1，此时$G_v\cong S_3\times S_4$，且G_v的Sylow 2-子群同构于$D_8\times\mathbb{Z}_2$，矛盾。

如果$T=PSL(2,8)$，$Out(T)=\mathbb{Z}_3$，则$G\cong T.o\cong PSL(2,8)$或$P\Gamma L(2,8)$，$o\le Out(T)$。并且G的Sylow 2-子群同构于$\mathbb{Z}_2^3$。由引理2.1，此时$G_v\cong S_4$或$\mathbb{Z}_3:S_4$，而G_v的Sylow 2-子群同构于D_8，矛盾。

如果$T=PSL(2,16)$，$Out(T)=\mathbb{Z}_4$，则$G\cong T.o$，其中$o\le Out(T)$。若$G\cong T.\mathbb{Z}_2$或$T.\mathbb{Z}_4$，$|G|_2\ge 2^5$，矛盾，故$G\cong PSL(2,16)$，且G的Sylow 2-子群同构于$\mathbb{Z}_2^4$。由引理2.1，此时$G_v\cong S_3\times S_4$，且G_v的Sylow 2-子群同构于$D_8\times\mathbb{Z}_2$，矛盾。

如果$T=R(3^{2m+1})$或$PSL(2,q)$，其中$m\ge 1$，q是奇数，此时Γ见例2.5。特别地，当$q=5$时，$T\cong A_5$，$Out(T)=\mathbb{Z}_2$，则$G\cong T.o\cong A_5$或S_5，$o\le Out(T)$。由$|G:G_v|=n$，可知$(G,G_v)=(A_5,A_4)$或(S_5,S_4)。由例2.6，$\Gamma=K_5$。

如果$T=PSL(3,q)$，$q=p^f$是奇数，$Out(T)\cong\mathbb{Z}_{(3,q-1)}.\mathbb{Z}_f.\mathbb{Z}_2$，则$G\cong T.o$，$o\le Out(T)$。但因为$|G|_2\le 2^4$，故$o\le\mathbb{Z}_{(3,q-1)}.\mathbb{Z}_f$，且$f$为奇数，于是$G$的Sylow 2-子群同构于$SD_{16}$。而由引理2.1知此时$G_v\cong S_3\times S_4$，且$G_v$的Sylow 2-子群同构于$D_8\times\mathbb{Z}_2$，矛盾。类似地，如果$T=PSU(3,q)$，也是不可能的。

基金项目

云南省科技厅应用基础研究项目(2019FD16)资助。

参考文献

[1] Gardiner, A. and Praeger, C.E. (1994) On 4-Valent Symmetric Graphs. *European Journal of Combinatorics*, **15**, 375-381. https://doi.org/10.1006/eujc.1994.1041

[2] Gardiner, A. and Praeger, C.E. (1994) A Characterization of Certain Families of 4-Valent Symmetric Graphs. *European Journal of Combinatorics*, **15**, 383-397. https://doi.org/10.1006/eujc.1994.1042

[3] Tutte, W.T. (1947) A Family of Cubical Graphs. *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, **43**, 621-624. https://doi.org/10.1017/S0305004100023720

[4] Weiss, R. (1981) The Nonexistence of 8-Transitive Graphs. *Combinatorica*, **1**, 309-311. https://doi.org/10.1007/BF02579337

[5] Praeger, C.E. (1992) An O'Nan-Scott Theorem for Finite Quaiprimitive Permutation Groups and an Application to 2-Arc-Transitive Graphs. *Journal of the London Mathematical Society*, **47**, 227-239. https://doi.org/10.1112/jlms/s2-47.2.227

[6] Fang, X.G. and Praeger, C.E. (1999) Finite Two-Arc Transitive Graphs Admitting a REE Simple Group. *Communication in Algebra*, **27**, 3755-3769. https://doi.org/10.1080/00927879908826660

[7] Fang, X.G. and Praeger, C.E. (1999) Finite Two-Arc Transitive Graphs Admitting a Suzuki Simple Group. *Communication in Algebra*, **27**, 3727-3754. https://doi.org/10.1080/00927879908826659

[8] Hassani, A., Nochefranca, L.R. and Praeger, C.E. (1999) Two-Arc Transitive Graphs Admitting a Two-Dimensional Projective Linear Group. *Journal of Group Theory*, **2**, 335-354. https://doi.org/10.1515/jgth.1999.023

[9] Li, C.H. and Pan, J.M. (2008) Finite 2-Arc-Transitive Abelian Cayley Graphs. *European Journal of Combinatorics*, **29**, 148-158. https://doi.org/10.1016/j.ejc.2006.12.001

[10] Huppert, B. and Lempken, W. (2000) Simple Groups of Order Divisible by at Most Four Primes. *Francisk Skorina Gomel State University*, **16**, 64-75.

[11] 徐明曜. 有限群导引(上) [M]. 北京: 科学出版社, 1999.

[12] 徐明曜. 有限群导引(下) [M]. 北京: 科学出版社, 1999.

[13] Dixon, J. and Mortimer, D.B. (1997) Permutation Groups. Spring-Verlag, New York. https://doi.org/10.1007/978-1-4612-0731-3

[14] Zhou, J.X. (2009) Tetravalent s-Transitive Graphs of Order 4*p*. *Discrete Mathematics*, **309**, 6081-6086. https://doi.org/10.1016/j.disc.2009.05.014

[15] Bosma, W., Cannon, J. and Playoust, C. (1997) The MAGMA Algebra System I: The User Language. *Journal of Symbolic Computation*, **24**, 235-265. https://doi.org/10.1006/jsco.1996.0125

[16] Li, C.H. (2001) On Finite s-Transitive Graphs of Odd Order. *Journal of Combinatorial Theory*, *Series B*, **81**, 307-317. https://doi.org/10.1006/jctb.2000.2012