Pure Mathematics 理论数学, 2021, 11(2), 179-185
Published Online February 2021 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2021.112025

Hans汉斯

恰当方程概念的导入及齐次函数欧拉定理必要性的另一种证法和它的应用

孔志宏

太原师范学院数学系，山西 晋中
Email: kzh196408@126.com

收稿日期：2020年12月28日；录用日期：2021年1月28日；发布日期：2021年2月4日

摘 要

用由果溯因的方法导入恰当微分方程的概念。同时用另一种证法证明了齐次函数欧拉定理的必要条件，并举例说明了它的应用。

关键词

通解，二元函数，恰当微分，恰当微分方程，齐次函数，偏导数，积分因子

Introduction of the Concept of Exact Differential Equations and another Proof of Necessary Conditions on the Euler Theorem of Homogeneous Functions with Its Application

Zhihong Kong

Department of Mathematics, Taiyuan Normal University, Jinzhong Shanxi
Email: kzh196408@126.com

Received: Dec. 28th, 2020; accepted: Jan. 28th, 2021; published: Feb. 4th, 2021

Abstract

The concept of exact differential equations is introduced by the method of causality. Furthermore, in this paper, another proof of the necessary conditions for the Euler theorem of homogeneous functions is given. Meanwhile, some relevant examples are given.

文章引用: 孔志宏. 恰当方程概念的导入及齐次函数欧拉定理必要性的另一种证法和它的应用[J]. 理论数学, 2021, 11(2): 179-185. DOI: 10.12677/pm.2021.112025

Keywords

General Solution, Functions of Two Variables, Exact Differential, Exact Differential Equations, Homogeneous Functions, Partial Derivative, Integrating Factors

Copyright © 2021 by author(s) and Hans Publishers Inc.
This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).
http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/

1. 引言

恰当微分方程(全微分方程)是尤为重要的微分方程，因为用积分因子的观点可以统一各种一阶微分方程的初等积分法，也就是说，在理论上，积分因子法可以代替各种一阶微分方程的初等解法。因此，把作为根本的恰当微分方程(全微分方程)的概念剖析透彻是至关重要的。在导入恰当微分方程(全微分方程)的概念时，用通解来反推出和它对应的微分方程，一方面可以充分地体会到恰当微分方程(全微分方程)概念出现时的自然而然，一方面又可以再次强化对所求得的微分方程的通解是否正确的检验意识。

文中给出的齐次函数欧拉定理必要条件的证明中所采用的方法，既能加深对齐次函数特点的理解，又能很容易地理解[1] [2]中为什么把导数形式的微分方程

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=g\left(\frac{y}{x}\right) \tag{1}$$

称为齐次微分方程，以及[3]中所述的微分形式的齐次方程

$$P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y=0 \tag{2}$$

的一个等价定义是，它可以化为如下的形式：

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\phi\left(\frac{y}{x}\right). \tag{3}$$

这以及涉及齐次函数的积分因子和通解中运用齐次函数欧拉定理的问题，在所举的例子中都体现了出来。

2. 恰当方程概念的导入

例 1 通解如下的相应的微分方程是什么？其中 $y=y(x)$。

1) $xy=c$；2) $x^2y^3=c$；3) $\dfrac{x}{y}=c$。

解(1)等式两边对 x 求导，得

$$y+x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=0;$$

解(2)等式两边对 x 求导，得

$$2xy^3+3x^2y^2\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=0;$$

解(3)等式两边对 x 求导，得

$$\frac{1}{y}-\frac{x}{y^2}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=0 .$$

一般地，通解为$u(x,y)=c$的相应的微分方程为

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=0 .$$

从上面的例子也可以看出，两个偏导数$\frac{\partial u}{\partial x}$和$\frac{\partial u}{\partial y}$通常来说仍然是$x,y$的二元函数。记

$$\frac{\partial u}{\partial x}\equiv M(x,y),\quad \frac{\partial u}{\partial y}\equiv N(x,y),$$

则通解为$u(x,y)=c$的微分方程为

$$M(x,y)+N(x,y)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=0 \tag{4}$$

反之，在形如(4)的微分方程中，如果$M(x,y)$恰好是某一个二元函数$u(x,y)$对x的偏导数$\frac{\partial u}{\partial x}$，而$N(x,y)$恰好是这个二元函数$u(x,y)$对$y$的偏导数$\frac{\partial u}{\partial y}$，那么微分方程(4)的通解就是$u(x,y)=c$，这里$c$是任意常数。

这样一来，从这个角度出发，由果溯因，我们就发现了具有某种特征的一类微分方程的新的解法，结论就是：

设给定微分方程(4)，如果其中$M(x,y)\equiv\frac{\partial u}{\partial x},N(x,y)\equiv\frac{\partial u}{\partial y}$，则这个微分方程的通解就是$u(x,y)=c$，($c$是做任意常数)。

在这种情形，方程(4)称为恰当微分方程，在应用上，常把它写成更加对称的形式

$$M(x,y)\mathrm{d}x+N(x,y)\mathrm{d}y=0 . \tag{5}$$

于是，上面的讨论就写成

$$M(x,y)\mathrm{d}x+N(x,y)\mathrm{d}y\equiv\frac{\partial u}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial u}{\partial y}\mathrm{d}y\equiv \mathrm{d}u(x,y)=0 .$$

式子

$$M(x,y)\mathrm{d}x+N(x,y)\mathrm{d}y$$

称为恰当微分(全微分)，进而方程(5)称为恰当微分方程(全微分方程)。

例 2 设方程

$$\left(3x^2+6xy^2\right)\mathrm{d}x+\left(6x^2y+4y^3\right)\mathrm{d}y=0 \tag{6}$$

找出$u(x,y)$，求通解。

解 由于

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(x^3+3x^2y^2+y^4\right)=3x^2+6xy^2,\quad \frac{\partial}{\partial y}\left(x^3+3x^2y^2+y^4\right)=6x^2y+4y^3,$$

于是

$$u(x,y)=x^3+3x^2y^2+y^4,$$

方程(6)的通解为$x^3+3x^2y^2+y^4=c$，其中c是任意常数。

例3 求方程

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\frac{x}{y} \tag{7}$$

的通解。

解(7)改写为

$$x\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y=0 .$$

由于

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x^2+y^2}{2}\right)=x,\quad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x^2+y^2}{2}\right)=y,$$

方程即

$$\mathrm{d}\left(\frac{x^2+y^2}{2}\right)=0,\quad u(x,y)=\frac{x^2+y^2}{2}.$$

于是(7)的通解为

$$\frac{x^2+y^2}{2}=\tilde{c},$$

即

$$x^2+y^2=c,$$

这里$c=2\tilde{c}>0$为任意常数。

再有如$y\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y=0$，即$\mathrm{d}(xy)=0$，$u(x,y)=xy$，通解为$xy=c$，其中$c$是任意常数。

还有如

$\frac{1}{y}\mathrm{d}x-\frac{x}{y^2}\mathrm{d}y=0$，即$\mathrm{d}\left(\frac{x}{y}\right)=0$，$u(x,y)=\frac{x}{y}$，

通解为

$$\frac{x}{y}=c,$$

其中c是任意常数。

3. 关于齐次函数的欧拉定理的必要性的证明和该定理的应用

3.1. 必要性的证明

定理[4]若函数$u=F(x,y,z)$满足恒等式$F(tx,ty,tz)=t^kF(x,y,z)(t>0)$，则称$F(x,y,z)$为$k$次齐次函数。试证下述关于齐次函数的欧拉定理：可微函数$F(x,y,z)$为k次齐次函数的充要条件是

$$xF_x(x,y,z)+yF_y(x,y,z)+zF_z(x,y,z)=kF(x,y,z)$$

[5]给出了证明。现在给出必要性的另一种证法。

由于$F(tx,ty,tz)=t^kF(x,y,z)$，取$t=\frac{1}{x}$，则

$$F(x,y,z)=t^{-k}F\left(1,\frac{y}{x},\frac{z}{x}\right)=x^kF\left(1,\frac{y}{x},\frac{z}{x}\right), \tag{8}$$

于是

$$\begin{aligned}F_x(x,y,z)&=kx^{k-1}F\left(1,\frac{y}{x},\frac{z}{x}\right)+x^k\left[F_1\left(1,\frac{y}{x},\frac{z}{x}\right)\cdot 0+F_2\left(1,\frac{y}{x},\frac{z}{x}\right)\cdot\left(-\frac{y}{x^2}\right)+F_3\left(1,\frac{y}{x},\frac{z}{x}\right)\cdot\left(-\frac{z}{x^2}\right)\right],\\&=kx^{k-1}F\left(1,\frac{y}{x},\frac{z}{x}\right)-x^{k-2}yF_2\left(1,\frac{y}{x},\frac{z}{x}\right)-x^{k-2}zF_3\left(1,\frac{y}{x},\frac{z}{x}\right)\end{aligned}$$

$$F_y(x,y,z)=x^k\cdot\frac{1}{x}F_2\left(1,\frac{y}{x},\frac{z}{x}\right)=x^{k-1}F_2\left(1,\frac{y}{x},\frac{z}{x}\right),$$

$$F_z(x,y,z)=x^k\cdot\frac{1}{x}F_3\left(1,\frac{y}{x},\frac{z}{x}\right)=x^{k-1}F_3\left(1,\frac{y}{x},\frac{z}{x}\right)。$$

从而

$$xF_X(x,y,z)+yF_y(x,y,z)+zF_z(x,y,z)=kx^kF\left(1,\frac{y}{x},\frac{z}{x}\right),$$

注意到式(8)，则

$$xF_X(x,y,z)+yF_y(x,y,z)+zF_z(x,y,z)=kF(x,y,z)。$$

3.2. 例子

例 4 [1]试证齐次微分方程 $M(x,y)\mathrm{d}x+N(x,y)\mathrm{d}y=0$ 当 $xM+yN\neq 0$ 时有积分因子 $\mu=\dfrac{1}{xM+yN}$。

证 只需证明二元函数 $\mu=\dfrac{1}{xM(x,y)+yN(x,y)}$ 满足 $\dfrac{\partial(\mu M)}{\partial y}=\dfrac{\partial(\mu N)}{\partial x}$。

因

$$\begin{aligned}\frac{\partial(\mu M)}{\partial y}&=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{M}{xM+yN}\right)\\&=\frac{1}{(xM+yN)^2}\left[\frac{\partial M}{\partial y}\cdot(xM+yN)-M\cdot\frac{\partial(xM+yN)}{\partial y}\right]\\&=\frac{1}{(xM+yN)^2}\left(xM\frac{\partial M}{\partial y}+yN\frac{\partial M}{\partial y}-Mx\frac{\partial M}{\partial y}-MN-yM\frac{\partial N}{\partial y}\right)\\&=\frac{1}{(xM+yN)^2}\left(yN\frac{\partial M}{\partial y}-yM\frac{\partial N}{\partial y}-MN\right)\end{aligned}, \tag{9}$$

同理可得

$$\frac{\partial(\mu N)}{\partial x}=\frac{1}{(xM+yN)^2}\left(xM\frac{\partial N}{\partial x}-xN\frac{\partial M}{\partial x}-MN\right)。 \tag{10}$$

不妨设 M、N 为 m 次齐次函数，则有

$$x\frac{\partial M}{\partial x}+y\frac{\partial M}{\partial y}=mM \text{ 与 } x\frac{\partial N}{\partial x}+y\frac{\partial N}{\partial y}=mN,$$

从而

$$x\frac{\partial M}{\partial x}=mM-y\frac{\partial M}{\partial y}\text{，}\quad x\frac{\partial M}{\partial x}=mM-y\frac{\partial M}{\partial y}\text{。}$$

将它们代入(10)，则

$$\begin{aligned}\frac{\partial(\mu N)}{\partial x}&=\frac{1}{(xM+yN)^2}\left(mMN-yM\frac{\partial N}{\partial y}-mMN+yN\frac{\partial M}{\partial y}-MN\right)\\&=\frac{1}{(xM+yN)^2}\left(yN\frac{\partial N}{\partial y}-yM\frac{\partial N}{\partial y}-MN\right)\end{aligned}\text{。}$$

注意到式(9)，于是

$$\frac{\partial(\mu M)}{\partial y}=\frac{\partial(\mu N)}{\partial x}\text{。}$$

例 5 [3]证明齐次方程 $P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y=0$ 的一个等价定义是，它可以化为如下的形式：

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\phi\left(\frac{y}{x}\right)\text{。}$$

证 设 $P(tx,ty)=t^m p(x,y)$，$Q(tx,ty)=t^m Q(x,y)$。取 $t=\frac{1}{x}$，则

$$P\left(1,\frac{y}{x}\right)=\frac{1}{x^m}P(x,y)\text{，}\quad Q\left(1,\frac{y}{x}\right)=\frac{1}{x^m}Q(x,y)\text{，}$$

从而

$$P(x,y)=x^m P\left(1,\frac{y}{x}\right)\text{，}\quad Q(x,y)=x^m Q\left(1,\frac{y}{x}\right)\text{。}$$

原齐次方程可写成

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\frac{P(x,y)}{Q(x,y)}=-\frac{x^m P\left(1,\frac{y}{x}\right)}{x^m Q\left(1,\frac{y}{x}\right)}=\phi\left(\frac{y}{x}\right)\text{。}$$

例 6 [1]假设例 4 中微分方程还是恰当的，试证它的通解可表为 $xM(x,y)+yN(x,y)=c$ （c 为任意常数)。

证 由于方程 $M\mathrm{d}x+N\mathrm{d}y=0$ 是恰当的，则

$$\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x}\text{。}\tag{11}$$

又由于方程是齐次的，不妨设 M、N 是 m 次齐次函数，则有

$$x\frac{\partial M}{\partial x}+y\frac{\partial M}{\partial y}=mM\text{，}\tag{12}$$

$$x\frac{\partial N}{\partial x}+y\frac{\partial N}{\partial y}=mN\text{。}\tag{13}$$

结合上述(11)、(12)、(13)，可得到

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[xM(x,y)+yN(x,y)\right]=M+x\frac{\partial M}{\partial x}+y\frac{\partial N}{\partial x}=M+x\frac{\partial M}{\partial x}+y\frac{\partial M}{\partial y}=(m+1)M\text{，}\tag{14}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left[xM(x,y)+yN(x,y)\right]=x\frac{\partial M}{\partial y}+N+y\frac{\partial N}{\partial y}=N+x\frac{\partial N}{\partial x}+y\frac{\partial N}{\partial y}=(m+1)N\text{。} \tag{15}$$

原方程为$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\frac{M}{N}$，由(14)、(15)，则方程化为

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\frac{\frac{\partial}{\partial x}\left[xM(x,y)+yN(x,y)\right]}{\frac{\partial}{\partial y}\left[xM(x,y)+yN(x,y)\right]}\text{。}$$

即

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[xM(x,y)+yN(x,y)\right]\mathrm{d}x+\frac{\partial}{\partial y}\left[xM(x,y)+yN(x,y)\right]\mathrm{d}y=0\text{，}$$

或$\mathrm{d}\left[xM(x,y)+yN(x,y)\right]=0$。从而方程的通解为$xM(x,y)+yN(x,y)=c$，这里$c$是任意常数。

参考文献

[1] 王高雄, 周之铭, 朱思铭, 等. 常微分方程[M]. 第 3 版. 北京: 高等教育出版社, 2006: 50-51, 61.

[2] 东北师范大学微分方程教研室. 常微分方程[M]. 第 2 版. 北京: 高等教育出版社, 2005: 29-30.

[3] 丁同仁, 李承治. 常微分方程教程[M]. 第 2 版. 北京: 高等教育出版社, 2004: 39-40.

[4] 华东师范大学数学系. 数学分析(下册) [M]. 第 4 版. 北京: 高等教育出版社, 2010: 132.

[5] 任亲谋. 数学分析习题解析(下) [M]. 西安: 陕西师范大学出版社, 2016: 172.