Pure Mathematics 理论数学, 2021, 11(4), 442-453
Published Online April 2021 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2021.114057

代数整数环上的 Ramanujan 展开

刘旭瑞

华南理工大学，广东 广州
Email: lxr19927525199@163.com

收稿日期：2021年3月4日；录用日期：2021年4月6日；发布日期：2021年4月13日

摘 要

大约一百多年前，Ramanujan 首次定义了经典的 Ramanujan 和:

$$c_q(n) = \sum_{\substack{k \bmod q \\ (k,q)=1}} e^{\frac{2\pi ikn}{q}} (q, n \in \mathbb{N}),$$

其中 $\mathbb{N}$ 是正整数集. (k,q) 是 k 和 q 的最大公因子. 1976年, 在 Wintner 的结果的基础上, Delange 证明了定义在整数环 $\mathbb{Z}$ 上的单变量算术函数可以通过 Ramanujan 和加以展开. 2018 年, Tóth 证明了定义在$\mathbb{Z}$上的多元算术函数可以通过 Ramanujan 和与酉 Ramanujan 和加以展开. 在此基础上, 本文试图将定义在代数整数环上的多元理想函数通过 Ramanujan 和加以展开, 同时也将进一步研究代数整数环上 Ramanujan 和的乘性与正交关系等性质.

关键词

Ramanujan 和, 代数整数环, 多元理想函数

Ramanujan Expansion over Algebraic Integer Rings

Xurui Liu

South China University of Technology, Guangzhou Guangdong
Email: lxr19927525199@163.com

文章引用: 刘旭瑞. 代数整数环上的 Ramanujan 展开[J]. 理论数学, 2021, 11(4): 442-453.
DOI: 10.12677/pm.2021.114057

Received: Mar. 4^{th}, 2021; accepted: Apr. 6^{th}, 2021; published: Apr. 13^{th}, 2021

Abstract

One hundred years ago, Ramanujan first defined the following classic Ramanujan sum:

$$c_q(n) = \sum_{\substack{k \bmod q \\ (k,q)=1}} e^{\frac{2\pi ikn}{q}} (q, n \in \mathbb{N}),$$

where $\mathbb{N}$ is the set of positive integers, and (k, q) is the greatest common factor of k and q. In 1976, on the basis of Wintner's results, Delange proved that all univariate arithmetic functions defined on the integer ring $\mathbb{Z}$ can be expanded by Ramanujan sum. In 2018, Tóth proved that the multivariate arithmetic function defined on $\mathbb{Z}$ can be expanded by Ramanujan sum and unitary Ramanujan sum. On this basis, this paper attempts to expand the multivariate ideal function defined on $\mathfrak{D}$ through the Ramanujan sum. At the same time, it will further study the multiplicative and orthogonal relations of the Ramanujan sum on $\mathfrak{D}$.

Keywords

Ramanujan Sum, $\mathfrak{D}$, Multivariate Ideal Function

1. 引言

一百多年前, Ramanujan首次定义了如下经典的 Ramanujan和:

$$c_q(n) = \sum_{\substack{k \bmod q \\ (k,q)=1}} e^{\frac{2\pi ikn}{q}} (q, n \in \mathbb{N}), \tag{1.1}$$

其中 $\mathbb{N}$ 是正整数集, (k, q) 是 k 和 q 的最大公因子.

1976 年, Delange [1]在 Wintner [2]结果的基础上证明了定义在整数环 $\mathbb{Z}$ 上的单变量算术函数

都可以通过 Ramanujan 和加以展开. 这类似于经典数学分析中周期函数的 Fourier 展开式. 他的结果如下:

定理1 (Delange [1]). 设 $f:\mathbb{N}\to\mathbb{C}$ 是任意的算术函数. 如果

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^{\omega(n)} \frac{|(\mu * f)(n)|}{n} < \infty.$$

那么对任意的 $n\in\mathbb{N}$ ，我们有下面绝对收敛的 Ramanujan 展开式

$$f(n)=\sum_{q=1}^{\infty} a_q c_q(n),$$

其中系数 a_q 由下式给出

$$a_q=\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(\mu * f)(mq)}{mq} \quad (q\in\mathbb{N}).$$

另外, Delange 还得到以上结果对于乘性函数的应用. 需要指出的是, 在 Delange之前, Cohen [3]也曾对某些特殊的单变量乘性函数类得到了推出绝对收敛的 Ramanujan 展开式的方法.

2016年, Ushiroya [4]将上述结果推广到两个变量的情形, 同时得到了定义在 $\mathbb{Z}$ 上某些特殊函数的经典 Ramanujan展开式的具体表达.

2018年, Tóth [5]又将其推广到多元情形,证明了定义在 $\mathbb{Z}$ 上的多元算术函数都可以通过Ramanujan和加以展开. Tóth 给出以下定义:

对任意固定的 $k\in\mathbb{N}$, 令 $f,g:\mathbb{N}^k\to\mathbb{C}$ 是两个算术函数, 那么它们的 Dirichlet卷积定义为

$$(f*g)(n_1,\cdots,n_k)=\sum_{d_1|n_1,\cdots,d_k|n_k} f(d_1,\cdots,d_k)g\left(\frac{n_1}{d_1},\cdots,\frac{n_k}{d_k}\right). \tag{1.2}$$

并得到以下定理.

定理2 (Tóth [5]定理 2). 假设 $f:\mathbb{N}^k\to\mathbb{C}$ 是任一算术函数 ($k\in\mathbb{N}$). 如果

$$\sum_{n_1,\cdots,n_k=1}^{\infty} 2^{\omega(n_1)+\cdots+\omega(n_k)}\frac{|(\mu_k * f)(n_1,\cdots,n_k)|}{n_1\cdots n_k}<\infty. \tag{1.3}$$

那么, 对任意的 $n_1,\cdots,n_k\in\mathbb{N}$, 我们有绝对收敛的 Ramanujan展开式

$$f(n_1,\cdots,n_k)=\sum_{q_1,\cdots,q_k=1}^{\infty} a_{q_1,\cdots,q_k} c_{q_1}(n_1)\cdots c_{q_k}(n_k), \tag{1.4}$$

其中

$$a_{q_1,\cdots,q_k}=\sum_{m_1,\cdots,m_k=1}^{\infty}\frac{(\mu_k * f)(m_1q_1,\cdots,m_kq_k)}{m_1q_1\cdots m_kq_k}.$$

在这个结果中令 $f(n_1,\cdots,n_k)=g((n_1,\cdots,n_k))$, 其中$(n_1,\cdots,n_k)$ 是 $n_1,\cdots,n_k\in\mathbb{N}$ 的最大公因子, g 为 $\mathbb{N}\to\mathbb{C}$的任一算术函数, Tóth 进一步得到以下结论.

定理3 (Tóth [5]定理 3). 假设 $f: \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ 的任一算术函数($k \in \mathbb{N}$). 如果

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^{k\omega(n)} \frac{|(\mu * f)(n)|}{n^k} < \infty. \tag{1.5}$$

那么, 对任意 $n_1, \cdots, n_k \in \mathbb{N}$, 我们有下面绝对收敛的级数

$$g\left((n_1, \cdots, n_k)\right) = \sum_{q_1, \cdots, q_k=1}^{\infty} a_{q_1 \cdots, q_k} c_{q_1}\left(n_1\right) \cdots c_{q_k}\left(n_k\right), \tag{1.6}$$

$$g\left((n_1, \cdots, n_k)\right) = \sum_{q_1 \cdots, q_k=1}^{\infty} a^*_{q_1 \cdots, q_k} c^*_{q_1}\left(n_1\right) \cdots c^*_{q_k}\left(n_k\right), \tag{1.7}$$

其中

$$a_{q_1, \cdots, q_k} = \frac{1}{Q^k} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(\mu * f)(mQ)}{m^k}, \tag{1.8}$$

$$a^*_{q_1, \cdots, q_k} = \frac{1}{Q^k} \sum_{\substack{m=1 \\ (m,Q)=1}}^{\infty} \frac{(\mu * f)(mQ)}{m^k}.$$

且 $Q = [q_1, \cdots, q_k]$.

注意到乘性函数可以由其在素幂处的值完全确定，由此结果还可进一步得到 $\mathbb{Z}$ 上某些特殊的多元乘性函数关于经典Ramanujan和以及酉Ramanujan和展开式的具体表达，更进一步地，它们与经典的Riemann zeta 函数 $\zeta(z)$ 有关.

设 $\mathbb{A}_+$是有限域上一元多项式环 $\mathbb{A} = \mathbb{F}_q[T]$ 中首一多项式的全体. 类比经典的 Ramanujan 和, 美国数论学家 L.Carlitz [6]首次引入 $\mathbb{A}$ 上模 H 的多项式 Ramanujan 和 $\eta(G, H)$ 的定义：

$$\eta(G, H) = \sum_{\substack{D \bmod H \\ (D,H)=1}} E(G, H)(D),$$

其中$G, H \in \mathbb{A}$, (G, H) 是 G, H 的首一的最大公因子.

我国数论学家郑志勇 [7]教授在最近的文献中系统地研究了多项式 Ramanujan 和的性质.

类比酉 Ramanujan 和的定义, 齐田芳在她的毕业论文 [8]中定义了 $\mathbb{A}$ 上的酉多项式 Ramanujan 和 $\eta^*(G, H)$ ：

$$\eta^*(G, H) = \sum_{\substack{D \bmod H \\ (D,H)_*=1}} E(G, H)(D). \tag{1.9}$$

其中 $G, H \in \mathbb{A}$, $(G, H)_* = \max_{\deg}\{D : D|H, D||G\}$, 即 $(G, H)_*$ 是多项式集合 $\{D : D|H, D||G\}$ 中次数最高的元.

她也将上述有关 Ramanujan 展开的结果进一步推广到有限域的一元多项式环 $\mathbb{A}$ 中，得到了定义在 $\mathbb{A}$ 上的多元算术函数都可以通过多项式 Ramanujan 和以及酉多项式 Ramanujan 和加以展开.

定理4 (齐田芳 [8]定理 7)**.** 令 $f : (\mathbb{A}_+)^k \to \mathbb{C}$ 的任一算术函数，其中 $k \in \mathbb{N}$. 如果

$$\sum_{G_1,\cdots,G_k\in\mathbb{A}_+} 2^{\omega(G_1)+\cdots+\omega(G_k)} \frac{|(\mu_k * f)(G_1,\cdots,G_k)|}{|G_1|\cdots|G_k|} < \infty. \tag{1.10}$$

那么, 对任意 $G_1,\cdots,G_k \in \mathbb{A}_+$, 我们有绝对收敛的 Ramanujan 展开式

$$f(G_1,\cdots,G_k) = \sum_{H_1,\cdots,H_k\in\mathbb{A}_+} \mathcal{C}_{H_1,\cdots,H_k} \eta(G_1,H_1)\cdots\eta(G_k,H_k), \tag{1.11}$$

和

$$f(G_1,\cdots,G_k) = \sum_{H_1,\cdots,H_k\in\mathbb{A}_+} \mathcal{C}^*_{H_1,\cdots,H_k} \eta^*(G_1,H_1)\cdots\eta^*(G_k,H_k), \tag{1.12}$$

其中

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_{H_1,\cdots,H_k} &= \sum_{M_1,\cdots,M_k\in\mathbb{A}_+} \frac{(\mu_k * f)(M_1H_1,\cdots,M_kH_k)}{|M_1H_1|\cdots|M_kH_k|}, \\ \mathcal{C}^*_{H_1,\cdots,H_k} &= \sum_{\substack{M_1,\cdots,M_k\in\mathbb{A}_+ \\ (M_1,H_1)=1,\cdots,(M_k,H_k)=1}} \frac{(\mu_k * f)(M_1H_1,\cdots,M_kH_k)}{|M_1H_1|\cdots|M_kH_k|}. \end{aligned} \tag{1.13}$$

令 $(G_1,\cdots,G_k)$ 与 $[G_1,\cdots,G_k]$ 分别为 $G_1,\cdots,G_k \in \mathbb{A}$ 的最大公因子及最小公倍数. g 是从 $\mathbb{A}_+$ 到 $\mathbb{C}$ 的算术函数. 令定理 7 中的 $f(G_1,\cdots,G_k) = g((G_1,\cdots,G_k))$，她又进一步得到了下面的结果.

定理5 (齐田芳 [8]定理 8)**.**] 令$g : \mathbb{A}_+ \to \mathbb{C}$ 的任一算数函数, $k \in \mathbb{N}$. 如果

$$\sum_{G\in\mathbb{A}_+} 2^{k\omega(G)} \frac{|(\mu * g)(G)|}{|G|^k} < \infty. \tag{1.14}$$

那么对任意的 $G_1,\cdots,G_k \in \mathbb{A}_+$, 有绝对收敛的级数

$$g((G_1,\cdots,G_k)) = \sum_{H_1,\cdots,H_k\in\mathbb{A}_+} \mathcal{C}_{H_1,\cdots,H_k} \eta(G_1,H_1)\cdots\eta(G_k,H_k), \tag{1.15}$$

和

$$g((G_1,\cdots,G_k)) = \sum_{H_1,\cdots,H_k\in\mathbb{A}_+} \mathcal{C}^*_{H_1,\cdots,H_k} \eta^*(G_1,H_1)\cdots\eta^*(G_k,H_k), \tag{1.16}$$

其中

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_{H_1,\cdots,H_k} &= \frac{1}{|Q|^k} \sum_{M\in\mathbb{A}_+} \frac{(\mu * g)(MQ)}{|M|^k}, \\ \mathcal{C}^*_{H_1,\cdots,H_k} &= \frac{1}{|Q|^k} \sum_{\substack{M\in\mathbb{A}_+ \\ (M,Q)=1}} \frac{(\mu * g)(MQ)}{|M|^k}, \end{aligned} \tag{1.17}$$

且 $Q := [H_1, \cdots, H_k]$.

2020年，王玉洁 [9]在最近的文献中定义了代数整数环的 Ramanujan 和：

$$C(\mathfrak{m},\mathfrak{n}) = \sum_{\mathfrak{d}|(\mathfrak{m},\mathfrak{n})} N(\mathfrak{d})\mu(\mathfrak{n}/\mathfrak{d}) = \sum_{\substack{x(\bmod\ \mathfrak{n})\\(x,\mathfrak{n})=1}} e^{2\pi i\,\mathrm{Tr}(xy)}, \tag{1.18}$$

其中 $\mathfrak{m},\mathfrak{n}$ 为代数整数环的非零理想, y 为主理想 $\langle y\rangle = \mathfrak{m}\mathfrak{n}^{-1}\mathfrak{D}_{\mathfrak{o}}^{-1}R$ 的主因子, 且 $\mathfrak{D}_0^{-1} = \{x \in K|\ \mathrm{Tr}(x\mathfrak{D}) \subseteq \mathbb{Z}\}$, $\mathrm{Tr}(xy)$为元素 xy 的迹.

定理6 (王玉洁 [9]定理 1.2)**.**] $\mathfrak{D}$ 为数域 $\mathbf{K}$ 的代数整数环, 令 $\mathfrak{n}$ 为代数整数环 $\mathfrak{D}$ 中的任一非零理想, $\mathfrak{m}$ 为 $\mathfrak{D}$ 中的任一理想. 那么存在一个理想 R 满足 $(R, \mathfrak{m}\mathfrak{n}\mathfrak{D}_{\mathfrak{o}}) = 1$ 且 $\mathfrak{m}\mathfrak{n}^{-1}\mathfrak{D}_{\mathfrak{o}}^{-1}R$ 是一个分式主理想. 令 $y \in \mathbf{K}$ 为 $\mathfrak{m}\mathfrak{n}^{-1}\mathfrak{D}_{\mathfrak{o}}^{-1}R$ 的生成元, 即 $\langle y\rangle = \mathfrak{m}\mathfrak{n}^{-1}\mathfrak{D}_{\mathfrak{o}}^{-1}R$. 我们有

$$C(\mathfrak{m},\mathfrak{n}) = \sum_{\substack{x(\bmod\ \mathfrak{n})\\(x,\mathfrak{n})=1}} e^{2\pi i\,\mathrm{Tr}(xy)}, \tag{1.19}$$

其中

$$\mathfrak{D}_0^{-1} = \{x \in \mathbf{K} \mid \mathrm{Tr}(x\mathfrak{D}) \subseteq \mathbb{Z}\}, \tag{1.20}$$

分式理想 $\mathfrak{D}_0^{-1}$ 是 $\mathfrak{D}/\mathbb{Z}$ 的差分 $\mathfrak{D}_0$ 的补集, 显然 $\mathfrak{D}_0$ 是代数整数环 $\mathfrak{D}$ 中的理想.

本文考虑将已得到的定义在 $\mathbb{Z}$ 上的多元算术函数通过 Ramanujan 和加以展开, 进一步推广到定义在代数整数环 $\mathfrak{D}$ 上的多元理想函数可以通过 Ramanujan 和加以展开,并得到以下结果.

定理7. 假设 $f: \mathfrak{D}^k \to \mathbb{C}$ 为任一多元理想函数, $(k \in \mathbb{N})$. 如果

$$\sum_{\mathfrak{m}_1,\cdots,\mathfrak{m}_k \lhd \mathfrak{D}} 2^{\omega(\mathfrak{m}_1)+\cdots+\omega(\mathfrak{m}_k)} \frac{|(\mu_k * f)(\mathfrak{m}_1,\cdots,\mathfrak{m}_k)|}{N(\mathfrak{m}_1)\ldots N(\mathfrak{m}_k)} < \infty \tag{1.21}$$

那么,对任意 $\mathfrak{m}_1,\cdots,\mathfrak{m}_k \lhd \mathfrak{D}$, 我们有下面绝对收敛的级数

$$f(\mathfrak{m}_1,\cdots,\mathfrak{m}_k) = \sum_{\mathfrak{n}_1,\cdots,\mathfrak{n}_k \lhd \mathfrak{D}} \eta_{\mathfrak{n}_1,\cdots,\mathfrak{n}_k} C(\mathfrak{m}_1,\mathfrak{n}_1)\cdots C(\mathfrak{m}_k,\mathfrak{n}_k), \tag{1.22}$$

其中

$$\eta_{\mathfrak{n}_1,\cdots,\mathfrak{n}_k} = \sum_{\mathfrak{l}_1,\cdots,\mathfrak{l}_k \lhd \mathfrak{D}} \frac{(\mu_k * f)(\mathfrak{n}_1\mathfrak{l}_1,\cdots,\mathfrak{n}_k\mathfrak{l}_k)}{N(\mathfrak{n}_1\mathfrak{l}_1)\ldots N(\mathfrak{n}_k\mathfrak{l}_k)}. \tag{1.23}$$

2. 定理 7 的证明及其推论

为了证明本章的结论, 需要下面的命题. 对代数整数环 $\mathfrak{D}$ 中的任一非零理想 $\mathfrak{n}$, $y \in \mathbf{K}$ 为 $\mathfrak{m}\mathfrak{n}^{-1}\mathfrak{D}_{\mathfrak{o}}^{-1}R$ 的生成因子.

命题1. 下面这个等式成立

$$\sum_{x \bmod \mathfrak{n}} e^{2\pi i\,\mathrm{Tr}(xy)} = \begin{cases} N(\mathfrak{n}), & \text{若}\mathfrak{n}|\mathfrak{m} \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

证明 如果 $\mathfrak{n}|\mathfrak{m}$, 那么 $\mathfrak{m}\mathfrak{n}^{-1} \in \mathfrak{O}$, 因为 $\langle y\rangle = \mathfrak{m}\mathfrak{n}^{-1}\mathfrak{D}_0^{-1}R \subseteq \mathfrak{D}_0^{-1}$, 我们可以得到 $y \in \mathfrak{D}_0^{-1}$, 也就是说 $\mathrm{Tr}(xy) \in \mathbb{Z}$, $e^{2\pi i\,\mathrm{Tr}(xy)} = 1$. 因此,

$$\sum_{x \bmod \mathfrak{n}} e^{2\pi i\,\mathrm{Tr}(xy)} = N(\mathfrak{n}).$$

如果$\mathfrak{n}\nmid\mathfrak{m}$, 那么令

$$A = \sum_{x \bmod \mathfrak{n}} e^{2\pi i\,\mathrm{Tr}(xy)}.$$

注意到, 如果 α 是一个整数, 则当 x 经过一个完全剩余系 $mod\ \mathfrak{n}$ 时, $x+\alpha$ 亦然, 也就是说

$$A = A\cdot e^{2\pi i\,\mathrm{Tr}(\alpha y)}. \tag{2.1}$$

每个整数 α 的指数因子不能等于 1,因为 $\mathrm{Tr}(\alpha y)$ 总是一个有理数, 因此, 根据 $\mathfrak{D}_0^{-1}$ 的定义, 我们可以得到 $\mathfrak{n}|\mathfrak{m}$ 与假设相反. 因此从 (2.1) 可以推出 $A = 0$.

□

命题2. $C(\mathfrak{m},\mathfrak{n})$ 是关于 $\mathfrak{n}\in\mathfrak{O}$ 的乘性函数.

证明 令 $\mathfrak{n}_1$, $\mathfrak{n}_2$ 为代数整数环 $\mathfrak{O}$ 中的理想并满足 $(\mathfrak{n}_1,\mathfrak{n}_2) = 1$. 然后我们可以得到

$$\begin{aligned} C(\mathfrak{m},\mathfrak{n}_1\mathfrak{n}_2) &= \sum_{\substack{x \pmod{\mathfrak{n}_1\mathfrak{n}_2}\\ (x,\mathfrak{n}_1\mathfrak{n}_2)=1}} e^{2\pi i\,\mathrm{Tr}(xy)} \\ &= \sum_{\substack{x \pmod{\mathfrak{n}_1}\\ (x,\mathfrak{n}_1)=1}} e^{2\pi i\,\mathrm{Tr}(xy_1)} \sum_{\substack{x \pmod{\mathfrak{n}_2}\\ (x,\mathfrak{n}_2)=1}} e^{2\pi i\,\mathrm{Tr}(xy_2)} \\ &= C(\mathfrak{m},\mathfrak{n}_1)C(\mathfrak{m},\mathfrak{n}_2), \end{aligned}$$

其中 $\langle y_1\rangle = \mathfrak{m}\mathfrak{n}_1^{-1}\mathfrak{D}_0^{-1}R$, $\langle y_2\rangle = \mathfrak{m}\mathfrak{n}_2^{-1}\mathfrak{D}_0^{-1}R$, 和 $\langle y_1y_2\rangle = \langle y\rangle$. □

因为 $C(\mathfrak{m},\mathfrak{n})$ 完全取决于其素理想的幂. 由于 $C(\mathfrak{m},\mathfrak{n})$ 是乘性函数, 我们可以得到以下命题.

命题3. 对于 $\mathfrak{O}$ 中的任意非零理想 $\mathfrak{q},\mathfrak{m}$, 有以下等式成立

$$\sum_{\mathfrak{d}|\mathfrak{n}} C(\mathfrak{m},\mathfrak{d}) = \begin{cases} N(\mathfrak{n}), & 若\mathfrak{n}|\mathfrak{m} \\ 0, & 其它 \end{cases} \tag{2.2}$$

证明 首先, 我们来证明以下等式成立

$$C(\mathfrak{m},\mathfrak{p}^e) = \begin{cases} N(\mathfrak{p})^e - N(\mathfrak{p})^{e-1}, & 若\mathfrak{p}^e|\mathfrak{m} \\ -N(\mathfrak{p})^{e-1}, & 若\mathfrak{p}^e\nmid\mathfrak{m}, \mathfrak{p}^{e-1}\mid\mathfrak{m} \\ 0, & 其它 \end{cases}$$

如果 $\mathfrak{p}^e|\mathfrak{m}$, 则

$$C(\mathfrak{m},\mathfrak{p}^e)=\sum_{\substack{x \pmod{\mathfrak{p}^e}\\(x,\mathfrak{p}^e)=1}} e^{2\pi i\,\mathrm{Tr}(xy)}.$$

由于 $\mathfrak{p}^e|\mathfrak{m}$ 时, $e^{2\pi i\,\mathrm{Tr}(xy)}=1$. 故,

$$C(\mathfrak{m},\mathfrak{p}^e)=\sum_{\substack{x\ (mod\ \mathfrak{p}^e)\\(x,\mathfrak{p}^e)=1}} 1=\varphi(\mathfrak{p}^e)=N(\mathfrak{p})^e-N(\mathfrak{p})^{e-1}.$$

当 $\mathfrak{p}^e\nmid\mathfrak{m}$ 时, 我们有以下情形,

$$\begin{aligned}
&(\mathfrak{m},\mathfrak{p}^e)=\mathfrak{p}^{e-1},\ \ \mathfrak{d}=\mathfrak{p}^{e-1},\cdots,\mathfrak{p},O_k\\
&(\mathfrak{m},\mathfrak{p}^e)=\mathfrak{p}^{e-2},\ \ \mathfrak{d}=\mathfrak{p}^{e-2},\cdots,\mathfrak{p},O_k\\
&\cdots\cdots\\
&(\mathfrak{m},\mathfrak{p}^e)=1,\ \ \mathfrak{d}=O_k
\end{aligned}$$

这表示当 $\mathfrak{p}^e\nmid\mathfrak{m}$,$\mathfrak{p}^{e-1}\mid\mathfrak{m}$,

$$C(\mathfrak{m},\mathfrak{p}^e)=-N(\mathfrak{p})^{e-1},$$

在其他情况下, $C(\mathfrak{m},\mathfrak{p}^e)=0$.

接下来, 对理想 $\mathfrak{n}$ 做素分解,有 $\mathfrak{n}=\mathfrak{p}_1^{e_1}\ldots\mathfrak{p}_s^{e_s}$. 我们可以直接的得到

$$\begin{aligned}
&\sum_{\mathfrak{d}|\mathfrak{n}} C(\mathfrak{m},\mathfrak{d})\\
&=\sum_{\mathfrak{d}_1\ldots\mathfrak{d}_s|\mathfrak{p}_1^{e_1}\ldots\mathfrak{p}_s^{e_s}} C(\mathfrak{m},\mathfrak{d}_1\ldots\mathfrak{d}_s)\\
&=\sum_{\mathfrak{d}_1|\mathfrak{p}_1^{e_1}}\cdots\sum_{\mathfrak{d}_s|\mathfrak{p}_s^{e_s}} C(\mathfrak{m},\mathfrak{d}_1\ldots\mathfrak{d}_s)\\
&=\sum_{\mathfrak{d}_1|\mathfrak{p}_1^{e_1}} C(\mathfrak{m},\mathfrak{d}_1)\cdots\sum_{\mathfrak{d}_s|\mathfrak{p}_s^{e_s}} C(\mathfrak{m},\mathfrak{d}_s).
\end{aligned}$$

我们断言,

$$\sum_{\mathfrak{d}|\mathfrak{p}^e} C(\mathfrak{m},\mathfrak{d})=\begin{cases} N(\mathfrak{p})^e, & 若\mathfrak{p}^e|\mathfrak{m}\\ 0, & 其它\end{cases}$$

事实上, 如果 $\mathfrak{p}^e|\mathfrak{m}$, 那么

$$\begin{aligned}
&\sum_{\mathfrak{d}|\mathfrak{p}^e} C(\mathfrak{m},\mathfrak{d})\\
&=C(\mathfrak{m},O_k)+C(\mathfrak{m},\mathfrak{p})+\cdots+C(\mathfrak{m},\mathfrak{p}^e)\\
&=1+(N(\mathfrak{p})-1)+\cdots+(N(\mathfrak{p})^e-N(\mathfrak{p})^{e-1})\\
&=N(\mathfrak{p})^e.
\end{aligned}$$

如果 $\mathfrak{p}^i \nmid \mathfrak{m},\ \mathfrak{p}^{i-1}|\mathfrak{m},\ i=1,\cdots,e$, 那么

$$\begin{aligned}
&\sum_{\mathfrak{d}|\mathfrak{p}^e} C(\mathfrak{m},\mathfrak{d}) \\
&= C(\mathfrak{m},O_k)+\cdots+C(\mathfrak{m},\mathfrak{p}^{i-1})+C(\mathfrak{m},\mathfrak{p}^i)+\cdots+C(\mathfrak{m},\mathfrak{p}^e) \\
&= 1+(N(\mathfrak{p})-1)+\cdots+(N(\mathfrak{p}^{i-1})-N(\mathfrak{p}^{i-2}))+N(\mathfrak{p}^{i-1})+0 \\
&= 0.
\end{aligned}$$

我们推断

$$\begin{aligned}
&\sum_{\mathfrak{d}|\mathfrak{n}} C(\mathfrak{m},\mathfrak{d}) \\
&= \sum_{\mathfrak{d}_1|\mathfrak{p}_1^{e1}} C(\mathfrak{m},\mathfrak{d}_1)\cdots\sum_{\mathfrak{d}_s|\mathfrak{p}_s^{e_s}} C(\mathfrak{m},\mathfrak{d}_s) \\
&= \begin{cases} N(\mathfrak{p}_1)^{e_1}, & \mathfrak{p}_1^{e_1}|m \\ 0, & \text{其它} \end{cases}\cdots\begin{cases} N(\mathfrak{p}_s)^{e_s}, & \mathfrak{p}_s^{e_s}|m \\ 0, & \text{其它} \end{cases} \\
&= \begin{cases} N(\mathfrak{n}), & \text{若}\mathfrak{n}|\mathfrak{m} \\ 0, & \text{其它}. \end{cases}
\end{aligned}$$

□

定理 7 的证明 我们需要先证明

$$\sum_{\mathfrak{d}|\mathfrak{p}^e} |C(\mathfrak{m},\mathfrak{d})| = \begin{cases} N(\mathfrak{p})^e, & \text{若}\mathfrak{p}^e|\mathfrak{m} \\ 2N(\mathfrak{p})^{i-1}, & \text{若 }\mathfrak{p}^i\nmid\mathfrak{m},\mathfrak{p}^{i-1}|\mathfrak{m}, i=1,\cdots,e \end{cases} \tag{2.3}$$

事实上, 如果 $\mathfrak{p}^e|\mathfrak{m}$, 那么可以得到

$$\begin{aligned}
&\sum_{\mathfrak{d}|\mathfrak{p}^e} |C(\mathfrak{m},\mathfrak{d})| \\
&= |C(\mathfrak{m},1)|+|C(\mathfrak{m},\mathfrak{p})|+\cdots+|C(\mathfrak{m},\mathfrak{p}^e)| \\
&= 1+|N(\mathfrak{p})-1|+\cdots+\left|N(\mathfrak{p})^e-N(\mathfrak{p})^{e-1}\right| \\
&= 1+(N(\mathfrak{p})-1)+\cdots+(N(\mathfrak{p})^e-N(\mathfrak{p})^{e-1}) \\
&= N(\mathfrak{p})^e,
\end{aligned}$$

如果 $\mathfrak{p}^i\nmid\mathfrak{m},\mathfrak{p}^{i-1}|\mathfrak{m}, i=1,\cdots,e$, 那么

$$\sum_{\mathfrak{d}|\mathfrak{p}^e} |C(\mathfrak{m},\mathfrak{d})| = 2N(\mathfrak{p})^{i-1},$$

等式 (2.3) 成立, 同时我们可以得到

$$\sum_{\mathfrak{d}|\mathfrak{p}^e} |C(\mathfrak{m},\mathfrak{d})| \ \le \ 2N(\mathfrak{p})^{v_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{m})},$$

这表示

$$\begin{aligned}
&\sum_{\mathfrak{d}|\mathfrak{q}} |C(\mathfrak{m},\mathfrak{d})| \\
&= \prod_{\mathfrak{p}|\mathfrak{q}} \sum_{\mathfrak{d}|\mathfrak{p}^e} |C(\mathfrak{m},\mathfrak{d})| \\
&\le \Big(\prod_{\substack{\mathfrak{p}|\mathfrak{q}\\ \mathfrak{p}\nmid\mathfrak{m}}} 2\Big) \Big(\prod_{\mathfrak{p}|(\mathfrak{q},\mathfrak{m})} 2N(\mathfrak{p})^{v_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{m})}\Big) \\
&\le 2^{\omega(\mathfrak{q})} \prod_{\mathfrak{p}|(\mathfrak{q},\mathfrak{m})} N(\mathfrak{p})^{v_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{m})}) \\
&\le 2^{\omega(\mathfrak{q})}\, N(\mathfrak{m}).
\end{aligned}$$

因此, 我们得到

$$\begin{aligned}
&|f(\mathfrak{m}_1,\cdots,\mathfrak{m}_k)| \\
&\le \sum_{\mathfrak{n}_1,\cdots,\mathfrak{n}_k \lhd \mathfrak{D}} |\eta_{\mathfrak{n}_1,\cdots,\mathfrak{n}_k}|\, |C(\mathfrak{m}_1,\mathfrak{n}_1)| \cdots |C(\mathfrak{m}_k,\mathfrak{n}_k)| \\
&\le \sum_{\mathfrak{n}_1,\cdots,\mathfrak{n}_k \lhd \mathfrak{D}} \sum_{\mathfrak{l}_1,\cdots,\mathfrak{l}_k \lhd \mathfrak{D}} \frac{|(\mu_k * f)(\mathfrak{n}_1\mathfrak{l}_1,\cdots,\mathfrak{n}_k\mathfrak{l}_k)|}{N(\mathfrak{n}_1\mathfrak{l}_1)\dots N(\mathfrak{n}_k\mathfrak{l}_k)} |C(\mathfrak{m}_1,\mathfrak{n}_1)| \cdots |C(\mathfrak{m}_k,\mathfrak{n}_k)| \\
&= \sum_{\mathfrak{t}_1,\cdots,\mathfrak{t}_k \lhd \mathfrak{D}} \frac{|(\mu_k * f)(\mathfrak{t}_1,\cdots,\mathfrak{t}_k)|}{N(\mathfrak{t}_1)\dots N(\mathfrak{t}_k)} \sum_{\substack{\mathfrak{n}_1\mathfrak{l}_1=\mathfrak{t}_1\\ \mathfrak{n}_1|\mathfrak{t}_1}} |C(\mathfrak{m}_1,\mathfrak{n}_1)| \ \cdots \sum_{\substack{\mathfrak{n}_k\mathfrak{l}_k=\mathfrak{t}_k\\ \mathfrak{n}_k|\mathfrak{t}_k}} |C(\mathfrak{m}_k,\mathfrak{n}_k)| \\
&\le \sum_{\mathfrak{t}_1,\cdots,\mathfrak{t}_k \lhd \mathfrak{D}} \frac{|(\mu_k * f)(\mathfrak{t}_1,\cdots,\mathfrak{t}_k)|}{N(\mathfrak{t}_1)\dots N(\mathfrak{t}_k)} 2^{\omega(\mathfrak{t}_1)}N(\mathfrak{m}_1)\cdots 2^{\omega(\mathfrak{t}_k)}N(\mathfrak{m}_k) \\
&= N(\mathfrak{m}_1\cdots\mathfrak{m}_k) \sum_{\mathfrak{t}_1,\cdots,\mathfrak{t}_k \lhd \mathfrak{D}} 2^{\omega(\mathfrak{t}_1)+\cdots+\omega(\mathfrak{t}_k)} \frac{|(\mu_k * f)(\mathfrak{t}_1,\cdots,\mathfrak{t}_k)|}{N(\mathfrak{t}_1)\dots N(\mathfrak{t}_k)} \\
&< \ \infty,
\end{aligned}$$

这证明了绝对收敛性. □

若 f 是乘性函数, 则 (1.21) 等价于

$$\sum_{\mathfrak{m}_1,\cdots,\mathfrak{m}_k \lhd \mathfrak{D}} \frac{|(\mu_k * f)(\mathfrak{m}_1,\cdots,\mathfrak{m}_k)|}{N(\mathfrak{m}_1)\dots N(\mathfrak{m}_k)} < \infty \tag{2.4}$$

和

$$\sum_{\mathfrak{p}\lhd P} \sum_{\substack{e_1,\cdots,e_k=0\\ e_1+\cdots+e_k\ge 0}} \frac{|(\mu_k * f)(\mathfrak{p}^{e_1},\cdots,\mathfrak{p}^{e_k})|}{N(\mathfrak{p})^{e_1+\cdots+e_k}} < \infty. \tag{2.5}$$

因此我们可以得到以下结论.

推论1. 假设乘性理想函数 $f:\mathfrak{D}^k\to\mathbb{C}$，其中$k\in\mathbb{N}$. 假设 (2.4) 或 (2.5) 成立, 那么对于任意的 $\mathfrak{m}_1,\cdots,\mathfrak{m}_k\in\mathfrak{D}$ 我们有绝对收敛的展开式 (1.22), 且其系数可以写成：

$$\eta_{\mathfrak{n}_1,\cdots,\mathfrak{n}_k}=\prod_{\mathfrak{p}\lhd P}\sum_{\substack{e_i\geq v_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{n}_i)\\ i=0,\cdots,k}}\frac{(\mu_k*f)\left(\mathfrak{p}^{e_1},\cdots,\mathfrak{p}^{e_k}\right)}{N(\mathfrak{p})^{e_1+\cdots+e_k}}.$$

证明 若 f 是乘性函数, 那么 μ_k*f 也是乘性函数, 且对于 $v_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{n}_i\mathfrak{l}_i)\geq v_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{n}_i), i=0,\cdots,k$. 我们令$e_i=v_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{n}_i\mathfrak{l}_i)$，其中$\mathfrak{p}\in P$，可以得到

$$\begin{aligned}\eta_{\mathfrak{n}_1,\cdots,\mathfrak{n}_k}&=\prod_{\mathfrak{p}\lhd P}\sum_{\substack{\mathfrak{l}_1,\cdots,\mathfrak{l}_k\lhd\mathfrak{D}\\ v_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{n}_i\mathfrak{l}_i)\geq v_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{n}_i)}}\frac{(\mu_k*f)\left(\mathfrak{p}^{v_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{n}_1\mathfrak{l}_1)},\cdots,\mathfrak{p}^{v_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{n}_k\mathfrak{l}_k)}\right)}{N(\mathfrak{p})^{v_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{n}_1\mathfrak{l}_1)+\cdots+v_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{n}_k\mathfrak{l}_k)}}\\&=\prod_{\mathfrak{p}\lhd P}\sum_{\substack{e_i\geq v_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{n}_i)\\ i=0,\cdots,k}}\frac{(\mu_k*f)\left(\mathfrak{p}^{e_1},\cdots,\mathfrak{p}^{e_k}\right)}{N(\mathfrak{p})^{e_1+\cdots+e_k}}.\end{aligned}$$

这就证明了我们的结论.

致 谢

感谢我的导师胡甦以及师姐陈曼和齐田芳, 在研究进程中, 他们和我进行了多次讨论, 给了我莫大的帮助.

参考文献

[1] Delange, H. (1976) On Ramanujan Expansions of Certain Arithmetic Functions. *Acta Arithmetica*, **31**, 259-270. https://doi.org/10.4064/aa-31-3-259-270

[2] Wintner, A. (2017) Eratosthenian Averages. Waverly Press, Baltimore.

[3] Cohen, E. (1959) Representations of Even Functions (mod r), II. Cauchy Products. *Duke Mathematical Journal*, **26**, 165-182. https://doi.org/10.1215/S0012-7094-59-02646-8

[4] Ushiroya, N. (2016) Ramanujan-Fourier Series of Certain Arithmetic Functions of Two Variables. *Hardy-Ramanujan Journal*, **39**, 1-20.

[5] Tóth, L. (2018) Ramanujan Expansions of Arithmetic Functions of Several Variables. *The Ramanujan Journal*, **47**, 589-603. https://doi.org/10.1007/s11139-017-9944-z

[6] Carlitz, L. (1947) The Singular for Sums of Squares of Polynomials. *Duke Mathematical Journal*, **14**, 1105-1120. https://doi.org/10.1215/S0012-7094-47-01484-1

[7] Zheng, Z.Y. (2018) On the Polynomial Ramanujan Sums over Finite Fields. *The Ramanujan Journal*, **46**, 863-898. https://doi.org/10.1007/s11139-017-9941-2

[8] 齐田芳. 数论中若干解析问题的研究[D]: [硕士学位论文]. 广州: 华南理工大学, 2020.

[9] Wang, Y.J. and Ji, C.G. (2020) Ramanujan's Sum in the Ring of Integers of an Algebraic Number Field. *International Journal of Number Theory*, **16**, 65-76.