Pure Mathematics 理论数学, 2021, 11(4), 454-460
Published Online April 2021 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2021.114058

Hans汉斯

关于两个完全单半群的Malcev积的注

陈孟琪，刘靖国*

临沂大学数学与统计学院，山东 临沂
Email: *liujingguo@lyu.edu.cn

收稿日期：2021年3月4日；录用日期：2021年4月6日；发布日期：2021年4月13日

摘 要

论文是对第二作者关于完全π-正则半群若干子类的Malcev积的研究工作的继续。在完全π-正则半群范围内，刻画完全单半群、幂零半群的Malcev积，重点是两个完全单半群的Malcev积。论文给出了若干Malcev积的包含关系，注重用具体半群对结论进行说明。

关键词

完全π-正则半群，Malcev积，完全单半群

A Note on the Malcev Products of Two Completely Simple Semigroups

Mengqi Chen, Jingguo Liu*

School of Mathematics and Statistics, Linyi University, Linyi Shandong
Email: *liujingguo@lyu.edu.cn

Received: Mar. 4th, 2021; accepted: Apr. 6th, 2021; published: Apr. 13th, 2021

Abstract

This is a continuation of the work of the second author on the Malcev products of some classes of epigroups. Under the universal of epigroups, we proceed to characterize the Malcev products of classes of completely simple semigroups and of nil-semigroups. The descriptions of the Malcev products of completely simple semigroups are the focuses of the thesis. The information about the set inclusion relations among them is also provided, and we put more emphasis on concrete semigroups as examples to illustrate these statements.

*通讯作者。

文章引用: 陈孟琪, 刘靖国. 关于两个完全单半群的 Malcev 积的注[J]. 理论数学, 2021, 11(4): 454-460.
DOI: 10.12677/pm.2021.114058

Keywords

Completely π-Regular Semigroup, Malcev Product, Completely Simple Semigroup

1. 引言

半群是最简单、最自然的一类代数系统，是拥有满足结合律的二元运算的代数系统。具体来说，一个非空集合 S 连同定义在它上面的一个结合的(即满足结合律的)二元运算“$\circ$”的代数系统 $(S,\circ)$ 称为一个半群，半群 $(S,\circ)$ 简记为 S。若半群中任意元的某个方幂属于所给半群的子群，则称该型半群为完全 π-正则半群。对所给完全 π-正则半群 S 中的元 x，群元 x^n (n 为正整数)属于的最大子群记作 G_x，该子群 G_x 自身作为群有其单位元，记作 x^{ω}。可以证明，$xx^{\omega}=x^{\omega}x\in G_x$，该结论的由来可以参见[1]。若记 $x^{\omega}x$ 在 G_x 中的群逆元为 $\bar{x}$，则映射 $x\to\bar{x}$ 称作是 S 上的一元伪逆运算。这样完全 π-正则半群 S 可以看作是具有一元伪逆运算和二元半群乘法运算的一元半群 $(S,\circ,{}^{-})$，此类半群记为 $\mathbf{E}$。完全 π-正则半群的某一子类简称为完全 π-正则半群类。若半群中任意元属于该半群的子群，则称该型半群为完全正则半群。显然完全正则半群、有限半群属于完全 π-正则半群类。对所给半群 S 及其元 $e\in S$，若 $e^2=e$，称 e 是 S 中的幂等元。S 的幂等元集记为 E_S。设 ρ 为 S 上的等价关系，若对 $a,b,c\in S$，$a\ \rho\ b$ 蕴含 $ac\ \rho\ bc,\ ca\ \rho\ cb$，则称 ρ 为 S 上的同余。$c\rho$ 表示 c 的同余 ρ-类，S/ρ 表示同余 ρ 诱导下的同态象。对于完全 π-正则半群类 $\mathbf{U},\mathbf{V}$，记

$$\mathbf{U}\circ\mathbf{V}=\left\{S\in\mathbf{E}\mid 存在S上的同余\rho,\ 使得S/\rho\in\mathbf{V},\ e\rho\in\mathbf{V},\ \forall\, e\in E_S\right\},$$

称其为完全 π-正则半群类 $\mathbf{U},\mathbf{V}$ 的 Malcev 积。论文利用关于完全 π-正则半群理论研究的已有结果(参考[1])，特别是关于幂零半群、完全单半群和半格等完全 π-正则半群类在 Malcev 积下生成的群胚及其元的一些结果[2]，得到完全单半群与完全单半群的 Malcev 积的若干结论。我们知道，在完全正则半群范围内，完全单半群与完全单半群的 Malcev 积还是完全单半群；但是完全 π-正则半群泛代数下它们的 Malcev 积已经不是完全单半群，文中给出具体半群给予说明。论文亦用具体实例说明完全单半群与完全单半群的 Malcev 积在同态下不封闭。

下面给出论文中用到的一些术语与记号。其他譬如 Green 关系、蛋壳图等未说明的定义或结论见文献[3] [4]。

令 S 为一半群。若存在 $1\in S$，对任意 $x\in S$，有 $1x=x1=x$，则称元 1 为半群 S 的幺元(或单位元)。给出记号 $S^1=\begin{cases}S, & 若S含幺元;\\ S\cup\{1\}, & 其他.\end{cases}$ 若存在 $0\in S$，对任意 $x\in S$，有 $0x=x0=0$，则称元 0 为半群 S 的零元。半群 S 上的等价关系 $\mathcal{J}$ 如下定义，对 $a,b\in S$，$a\ \mathcal{J}\ b\Leftrightarrow S^1aS^1=S^1bS^1$。$a$ 的 $\mathcal{J}$-类记作 J_a。半群 S 称为单半群，若对任意 $a\in S$，有 $S^1aS^1=S$，即 $\mathcal{J}=S\times S$。完全正则单半群称为完全单半群，所有完全单半群之集为完全 π-正则半群类，记作 $\mathbf{CS}$。若含零元半群 S 中任意元的某个方幂为零元，则称该型半群为幂零半群，显然所有幂零半群之集为完全 π-正则半群类，记作 $\mathbf{N}$。可以证明 $\mathbf{CS}$ 与 $\mathbf{N}$ 的交集为平凡半群 $\mathbf{T}$。若半群 S 中任意元 $z,s\in S$，都成立 $zs=s$，则称 S 为左零半群，该类半群记作 $\mathbf{LZ}$。设 S 为完全 π-正则

半群，对 $a,b\in S$，分别如下定义 S 上的等价关系 $\mathcal{P}$ 和 S 上的偏序关系 $\leq$，

$$a\ \mathcal{P}\ b \Leftrightarrow \overline{a}=\overline{b}\text{，}\quad a\leq b \Leftrightarrow \left(\exists e,f\in E_{S^1}\right) a=eb=bf\text{。}$$

下面给出的由半群表现给出的左零半群的二元幂零半群，

$$L_{3,1}=\left\langle a,f \mid a^2 f=a^2, fa=f^2=f\right\rangle=\left\{a,f,af,a^2\right\}\text{，}$$

和 n 阶循环群 $C_{1,n}$ (n 为正整数)在后文中会用到。

2. 主要结论

结合([2]，引理 4.8(i))和([2]，命题 5.4(iii))，如下命题给出 $\mathbf{CS}\circ\mathbf{CS}$ 的一个等价刻画。

命题 2.1 完全 π-正则半群 S 上的下列条件等价：

(i) $S\in\mathbf{CS}\circ\mathbf{CS}$；

(ii) 存在 S 上的同余 ρ 使得 $(\leq\cup\mathcal{P})\subseteq\rho$，且对 $e\in E_S$，有 $e\rho\subseteq J_e$。

命题 2.2 作为完全 π-正则半群类，$\mathbf{CS}\circ\mathbf{CS}\cap\mathbf{N}\circ\mathbf{CS}=\mathbf{T}\circ\mathbf{CS}$。

证明 明显 $\mathbf{T}\circ\mathbf{CS}\subset\mathbf{CS}\circ\mathbf{CS}\cap\mathbf{N}\circ\mathbf{CS}$。对于反包含，令 $S\in\mathbf{CS}\circ\mathbf{CS}\cap\mathbf{N}\circ\mathbf{CS}$，设 λ,ρ 是 S 上的 $\mathbf{CS}$-同余，其幂等元同余类分别为 $\mathbf{CS},\mathbf{N}$。则 $\lambda\cap\rho$ 的幂等元同余类为 $\mathbf{CS}\cap\mathbf{N}=\mathbf{T}$。从而 $S/(\lambda\cap\rho)$ 为 S/λ 和 S/ρ 的子直积，而完全单半群的子直积仍为完全单半群，这说明 $S/(\lambda\cap\rho)\in\mathbf{CS}$，故 $S\in\mathbf{T}\circ\mathbf{CS}$。■

定理 2.3 作为完全 π-正则半群类，$\mathbf{CS}\subsetneqq\mathbf{T}\circ\mathbf{CS}\subsetneqq\mathbf{CS}\circ\mathbf{CS}\subsetneqq\mathbf{CS}\circ\mathbf{N}$。

证明 明显 $\mathbf{CS}\subseteq\mathbf{T}\circ\mathbf{CS}\subseteq\mathbf{CS}\circ\mathbf{CS}$。

对于要证明的第三个包含关系 $\mathbf{CS}\circ\mathbf{CS}\subset\mathbf{CS}\circ\mathbf{N}$，令 $S\in\mathbf{CS}\circ\mathbf{CS}$，设 ρ 为 S 上的同余使得 $S/\rho\in\mathbf{CS}$，ρ 的幂等元类属于 $\mathbf{CS}$。取 $a,b\in S$，既然 $S/\rho\in\mathbf{CS}\subset\mathbf{CS}\circ\mathbf{N}$，则由([2]，命题 5.1)，$\left(a^\omega ba^\omega\right)^\omega\ \rho a^\omega$。由于 $\left(a^\omega ba^\omega\right)\leq a^\omega$，则 $\left(a^\omega ba^\omega\right)=a^\omega$，既然 $a^\omega\rho\in\mathbf{CS}$，而完全单半群的偏序关系 $\leq$ 是平凡的(详见[4]，命题 III.1.5)。这样 S 满足等式 $\left(x^\omega yx^\omega\right)^\omega=x^\omega$，再由([2]，命题 5.1)，有 $S\in\mathbf{CS}\circ\mathbf{N}$。这样我们就证明了 $\mathbf{CS}\circ\mathbf{CS}\subseteq\mathbf{CS}\circ\mathbf{N}$。

考虑半群 $L_{3,1}$ 和生成元为 g、阶为 $n\cup\infty$ (n 为正整数)的循环群 $C_{1,n}$ 的直积，其中 $g^n=g^\omega$ 记作 e。容易验证子集 $(a,g)\cup f\times C_{1,n}\cup af\times C_{1,n}\cup a^2\times C_{1,n}$ 为 $L_{3,1}\times C_{1,n}$ 的子半群，记作 $L_{3,1}^{(n)}$。

对 $n=1$，显然 $L_{3,1}^{(1)}\cong L_{3,1}$，且 $L_{3,1}\in\mathbf{LZ}\circ\mathbf{N}$，当然 $L_{3,1}\in\mathbf{CS}\circ\mathbf{N}$。又注意到 $\left(a^2,e\right)\leq(a,e)$，而 $\left(\left(a^2,e\right),(a,e)\right)\notin\mathcal{J}$。则由命题 2.1，$L_{3,1}\notin\mathbf{CS}\circ\mathbf{CS}$。这样就说明了 $\mathbf{CS}\circ\mathbf{CS}\subsetneqq\mathbf{CS}\circ\mathbf{N}$。

对 $n=2$，$L_{3,1}^{(2)}=\left\{(a,g),(f,g),(f,e),(af,g),(af,e),\left(a^2,g\right),\left(a^2,e\right)\right\}$，其 Green 关系蛋壳图由图 1 给出(或见附录 GAP 输出的其对偶半群的结果，关于 GAP 软件信息详见文献[5])。现在考虑该半群 $L_{3,1}^{(2)}$ 作为集合的分割(见图 1)，

$$\left\{(a,g),\left(a^2,g\right),(af,g)\right\},\left\{\left(a^2,e\right),(af,e)\right\},\left\{(f,g)\right\},\left\{(f,e)\right\}\text{。}$$

可以证明该分割诱导 $L_{3,1}^{(2)}$ 上的同余 ρ，且有 $L_{3,1}^{(2)}/\rho\cong L_2\times C_{1,2}\in\mathrm{CS}$，其中 L_2 表示二元左零半群，每一个幂等元 ρ-类为平凡半群或二元左零半群，注意代表元为 (a,g) 的 ρ-类不是幂等的。这样 $L_{3,1}^{(2)}\in\mathbf{CS}\circ\mathbf{CS}$。

我们断言 $L_{3,1}^{(2)}\notin\mathbf{T}\circ\mathbf{CS}$。否则 $L_{3,1}^{(2)}\in\mathbf{N}\circ\mathbf{CS}$，由([2]，命题 5.5)，$L_{3,1}^{(2)}$ 中任意元满足等式 $(xyx)^\omega=x^\omega$。显然此结论不真，因为在 $L_{3,1}^{(2)}$ 中 $\left((a,g)(f,e)(a,g)\right)^\omega=(af,e)\neq\left(a^2,e\right)=(a,g)^\omega$。从而 $\mathbf{T}\circ\mathbf{CS}\subsetneqq\mathbf{CS}\circ\mathbf{CS}$。

考虑 $L_{3,1}^{(2)}$ 的子半群 $M=\left\{(a,g),\left(a^2,g\right),\left(a^2,e\right)\right\}$。显然 $M\notin\mathbf{CS}$。考察 M 的分割 $\left\{(a,g),\left(a^2,g\right)\right\},\left\{\left(a^2,e\right)\right\}$。可以验证该分割诱导 M 上的同余 σ，$M/\sigma\cong C_{1,2}\in\mathbf{G}$，$\sigma$ 的幂等元同余类为平凡半群。这样 $M\in\mathbf{T}\circ\mathbf{CS}$。这就说明 $\mathbf{CS}\subsetneqq\mathbf{T}\circ\mathbf{CS}$。■

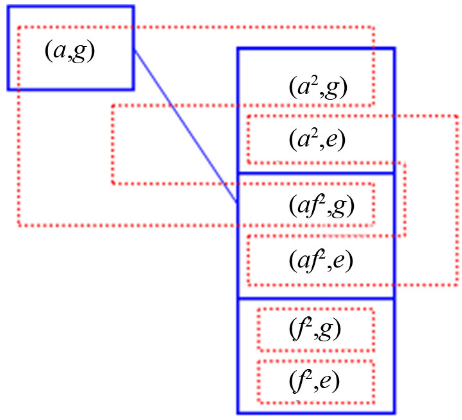

Figure 1. Egg box of $L_{3,1}^{(2)}$ and its a partition

图 1. 半群 $L_{3,1}^{(2)}$ 的蛋壳图及其一个分割

在图 1 半群 $L_{3,1}^{(2)}$ 的蛋壳图中，每一个蛋壳作为一个等价类，这些等价类构成一个 $L_{3,1}^{(2)}$ 的分割，得到 $L_{3,1}^{(2)}$ 上的 Green 关系 $\mathcal{H}$。由([2]，引理 5.3)，$\mathcal{H}$ 是 $L_{3,1}^{(2)}$ 上的同余，$L_{3,1}^{(2)}/\mathcal{H} \cong L_{3,1}$，即半群 $L_{3,1}$ 是半群 $L_{3,1}^{(2)}$ 的同态象。现在由定理 2.3 的证明 $L_{3,1}^{(2)} \in \mathbf{CS} \circ \mathbf{CS}$，而 $L_{3,1} \notin \mathbf{CS} \circ \mathbf{CS}$。这样可以断言

推论 2.4 完全 π-正则半群类 $\mathbf{CS} \circ \mathbf{CS}$ 同态下不封闭。

下面给出完全 π-正则半群类 $\mathbf{CS} \circ \mathbf{CS}$ 成员的几个元素性质。

引理 2.5 令 $S \in \mathbf{CS} \circ \mathbf{CS}$。

i) 对 $a \in S$，$e \in E_S$，若 $e \le a$，则 $a = e$；

ii) 对 $a, x \in S$，若 $(ax)^\omega a = \left((ax)^\omega a\right)^\omega$，则 $a = a^\omega$；

iii) 对 $a \in S$，若 $aa^\omega = a^\omega$，则 $a = a^\omega$。

证明 i) 由([2]，命题 5.4)和本文命题 2.1，$a\left(\rho_{\mathbf{CS}} \cap \mathcal{D}\right)e$。同时由定理 2.3，$S \in \mathbf{CS} \circ \mathbf{N}$，这样，$a$ 为一群元，即 $a = aa^\omega$。

另一方面，因为 $e \le a$，存在 $f, g \in E_{S^1}$ 使得 $e = fa = ag$。若 $f = 1$，或 $g = 1$，当然有 $a = e$；若 $f, g \in E_S$，则由命题([2]，命题 5.1)，$e = e^\omega = (agfa)^\omega = \left(a^\omega agfaa^\omega\right)^\omega = a^\omega$。这样 $e\ (\mathcal{H} \cap \le)\ aa^\omega = a$，从而由([2]，引理 2.4) $a = e$。

ii) 因 $(ax)^\omega a \le a$，由 i)和条件 $(ax)^\omega a = \left((ax)^\omega a\right)^\omega$，可得 $a = a^\omega$，即 a 为幂等元。

iii) 令 $x = a$，由 ii)和条件 $aa^\omega = a^\omega$，可得 $a = a^\omega$。■

命题 2.6 作为完全 π-正则半群类，

i) $\mathbf{CS} \circ \mathbf{CS}$ 和 $\mathbf{N} \circ \mathbf{CS}$ 关于包含偏序是不可比的；

ii) 对 $a, x \in S$，若 $(ax)^\omega a = \left((ax)^\omega a\right)^\omega$，则 $\mathbf{CS} \circ \mathbf{CS} \cap \mathbf{N} \circ \mathbf{CS} = \mathbf{T} \circ \mathbf{CS}$。

证明 i) 令 $N_2 = \{a, 0\}$ 为二元幂零半群，其中 $a^2 = 0a = a0 = 0$，令 $C_{1,2} = \{g, e\}$ 为 2 阶循环群，并且它们的交集为空集，即它们是非交的。

一方面，首先考察直积 $N_2 \times C_{1,2}$。由([2]，命题 5.5)，$N_2 \times C_{1,2} \in \mathbf{N} \circ \mathbf{CS}$。观察到 $(a,e)\ \mathcal{P}\ (0,e) \not\Rightarrow (a,e)\ \mathcal{D}\ (0,e)$，由命题 2.1，$N_2 \times C_{1,2} \notin \mathbf{CS} \circ \mathbf{CS}$。这样就证明了 $\mathbf{N} \circ \mathbf{CS} \not\subseteq \mathbf{CS} \circ \mathbf{CS}$。

令一方面，由定理 2.3 中的证明，$L_{3,1}^{(2)} \in \mathbf{CS} \circ \mathbf{CS}$，而 $L_{3,1}^{(2)} \notin \mathbf{N} \circ \mathbf{CS}$。所以 $\mathbf{CS} \circ \mathbf{CS} \not\subseteq \mathbf{N} \circ \mathbf{CS}$。

ii) 显然 $\mathbf{T} \circ \mathbf{CS} \subseteq \mathbf{CS} \circ \mathbf{CS} \cap \mathbf{N} \circ \mathbf{CS}$。对于反包含，令 $S \in \mathbf{CS} \circ \mathbf{CS} \cap \mathbf{N} \circ \mathbf{CS}$，设 λ, ρ 为 S 上的 $\mathbf{CS}$-同余，且其幂等元同余类分别属于 $\mathbf{CS}$，$\mathbf{N}$。则同余 λ, ρ 的交 $\lambda \cap \rho$ 的幂等元同余类为 $\mathbf{CS} \cap \mathbf{N} = \mathbf{T}$，且有

$S/(\lambda\cap\rho)$ 为 S/λ 和 S/ρ 的子直积。从而得 $S\in\mathbf{T}\circ\mathbf{CS}$。■

基金项目

第一作者得到临沂大学大学生创新创业训练计划项目资助(项目编号 S202010452102)。

参考文献

[1] Shevrin, L.N. (1995) On the Theory of Epigroups, I. *Russian Academy of Sciences*. *Sbornik Mathematics*, **82**, 485-512. https://doi.org/10.1070/SM1995v082n02ABEH003577

[2] Liu, J.G. (2020) On the Malcev Products of Some Classes of Epigroups, I. *Open Mathematics*, **18**, 307-332. https://doi.org/10.1515/math-2020-0019

[3] Howie, J.M. (1995) Fundamentals of Semigroup Theory. Clarendon, Oxford.

[4] Petrich, M. and Reilly, N.R. (1999) Completely Regular Semigroups. John Wiley & Sons, New York.

[5] 刘靖国. 两个表示定义半群的构造及其 GAP 验证[J]. 数学的实践与认识, 2019, 49(21): 235-244.

附　录：

在该附录中我们利用 GAP 软件来讨论本文第 2 节中给出的半群 $L_{3,1}^{(2)}$ 的简单性质，注意 $L_{3,1}^{(2)}$ 不是由半群表现给出的。对于 $L_{3,1}^{(2)}$ 中所用元素集合 $\{(a,g),(f,g),(f,e),(af,g),(af,e),(a^2,g),(a^2,e)\}$，根据半群 $L_{3,1}$ 半群表现表达式以及二元群的元素的简单性质，又注意到 $L_{3,1}^{(2)}$ 为 $L_{3,1}$ 和循环群 $C_{1,2}$ 的直积半群的子半群。易得 $L_{3,1}^{(2)}$ 的乘法表如下表 1。

Table 1. The Cayley table of $L_{3,1}^{(2)}$ (1)

表 1. $L_{3,1}^{(2)}$ 的乘法表(1)

	(a,g)	(a^2,g)	(af,g)	(f,g)	(a^2,e)	(af,e)	(f,e)
(a,g)	(a^2,e)	(a^2,e)	(a^2,e)	(af,e)	(a^2,g)	(a^2,g)	(af,g)
(a^2,g)	(a^2,e)	(a^2,e)	(a^2,e)	(a^2,e)	(a^2,g)	(a^2,g)	(a^2,g)
(af,g)	(af,e)	(af,e)	(af,e)	(af,e)	(af,g)	(af,g)	(af,g)
(f,g)	(f,e)	(f,e)	(f,e)	(f,e)	(f,g)	(f,g)	(f,g)
(a^2,e)	(a^2,g)	(a^2,g)	(a^2,g)	(a^2,g)	(a^2,e)	(a^2,e)	(a^2,e)
(af,e)	(af,g)	(af,g)	(af,g)	(af,g)	(af,e)	(af,e)	(af,e)
(f,e)	(f,g)	(f,g)	(f,g)	(f,g)	(f,e)	(f,e)	(f,e)

为借助软件 GAP 研究该半群，同时改变半群 $L_{3,1}^{(2)}$ 中元的记号不影响问题讨论，由表 1，为了得到与之同构的完全变换半群的子半群，可分别记

$$(a,g)=1,\ (a^2,g)=2,\ (af,g)=3,\ (f,g)=4,\ (a^2,e)=5,\ (af,e)=6,\ (f,e)=7$$

这样 $L_{3,1}^{(2)}$ 的乘法表又可以改写如下元素构成的乘法表(见表 2)。

Table 2. The Cayley table of $L_{3,1}^{(2)}$ (2)

表 2. $L_{3,1}^{(2)}$ 的乘法表(2)

	1	2	3	4	5	6	7
1	5	5	5	6	2	2	3
2	5	5	5	5	2	2	2
3	6	6	6	6	3	3	3
4	7	7	7	7	4	4	4
5	2	2	2	2	5	5	5
6	3	3	3	3	6	6	6
7	4	4	4	4	7	7	7

用如下 GAP 命令验证该乘法运算是否满足结合律，该半群是否存在，以及输出结果说明这样的半群的确存在(输出结果告诉我们该半群为 7 元半群，有 7 个生成元)。

```
gap>SemigroupByMultiplicationTable([[5,5,5,6,2,2,3],[5,5,5,5,2,2,2],[6,6,6,6,3,3,3],[7,7,7,7,4,4,4],
[2,2,2,2,5,5,5], [3,3,3,3,6,6,6], [4,4,4,4,7,7,7]]);
<semigroup of size 7, with 7 generators>
```

由参考文献[5]中方法，结合表 2，我们如下构造 $L_{3,1}^{(2)}$ 的**对偶**半群 R231。

```
m1:= Transformation([5,5,5,6,2,2,3]);
m2:= Transformation([5,5,5,5,2,2,2]);
m3:= Transformation([6,6,6,6,3,3,3]);
m4:= Transformation([7,7,7,7,4,4,4]);
m5:= Transformation([2,2,2,2,5,5,5]);
m6:= Transformation([3,3,3,3,6,6,6]);
m7:= Transformation([4,4,4,4,7,7,7]);
R231:= Semigroup(m1, m2, m3, m4, m5, m6, m7);
```

下面的命令与输出结果给出半群 R231 的 H-类元。

```
gap> GreensHClasses( R231 );
[ <Green's H-class: Transformation( [ 2, 2, 2, 2, 5, 5, 5 ] )>, <Green's H-class: Transformation( [ 3, 3, 3, 3, 6, 6, 6 ] )>, <Green's H-class: Transformation( [ 4, 4, 4, 4, 7, 7, 7 ] )>, <Green's H-class: Transformation( [ 5, 5, 5, 6, 2, 2, 3 ] )> ]
```

如下命令与输出结果显示半群 R231 的半群结构情况(*代表正则 J-类)。

```
gap> DisplaySemigroup( R231 );
Rank 4:    [H size = 1, 1 L-class, 1 R-class]
Rank 2: *[H size = 2, 3 L-classes, 1 R-class]
```

如下命令与输出结果显示 R231 半群的 m2 的 J-蛋壳类(1 代表 H-类为群)。

```
gap>DisplayEggBoxOfDClass(GreensDClassOfElement( R231,m2));
[ [    1,    1,    1 ] ]
```