Pure Mathematics 理论数学, 2021, 11(4), 574-577
Published Online April 2021 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2021.114070

Hans汉斯

有界域中带阻尼波动方程的全局吸引子

张廷聪

广州大学数学与信息科学学院，广东 广州
Email: 1418778532@qq.com

收稿日期：2021年3月13日；录用日期：2021年4月15日；发布日期：2021年4月22日

摘 要

本文主要研究了一类带阻尼的波动方程模型的长时间行为。通过分析该模型并结合已有文献，在一定条件下给出了这类方程全局吸引子的存在性。

关键词

有界域，阻尼，波动方程，全局吸引子

Global Attractor for a Damped Wave Equation in Bounded Domain

Tingcong Zhang

School of Mathematics and Information Science, Guangzhou University, Guangzhou Guangdong
Email: 1418778532@qq.com

Received: Mar. 13th, 2021; accepted: Apr. 15th, 2021; published: Apr. 22nd, 2021

Abstract

This note considers the long-time behavior of a wave equation with damping. Based on the known results in the references, by analyzing the model, we obtain the existence of a global attractor for this kind of model.

Keywords

Bounded Domain, Damped, Wave Equation, Global Attractor

文章引用: 张廷聪. 有界域中带阻尼波动方程的全局吸引子[J]. 理论数学, 2021, 11(4): 574-577.
DOI: 10.12677/pm.2021.114070

1. 引言

在过去的几十年里，耗散系统的定性性质及其演化过程的研究受到了极大的关注。在众多用于刻画解的渐近性态的概念中，吸引子是重要的概念之一，它包含了系统的解的所有可能的极限状态，极大地提高了动力系统解的定性性质的理解。对于由具体方程诱导的动力系统，特别是热传导方程、波动方程等，它们的解的长时间行为都已成功地用研究吸引子的方式得以刻画和描述。本文将概述一类波动方程模型的全局吸引子相关结果，这些结果及其证明来自于文献[1] [2] [3] [4] [5]以及其中的参考文献。

2. 预备知识

定理 2.1 ([4])令 X 是一个 Banach 空间，其范数记为$\|\cdot\|$，$\mathcal{T}=\{T(t),t\ge 0\}$ 是 X 上的半群。假定对于每个 $t\ge 0$，存在分解 $T(t)=S(t)+K(t)$ 且对于 X 中的有界子集 B，存在 $t_B\ge 0$ 使得：

1) $K(t)B$ 是相对紧的对于所有的 $t\ge t_B$；
2) $s_B(t)=\sup\limits_{x\in B}\|S(t)x\|_X<\infty$ 对所有的 $t\ge t_B$ 成立，且 $s_B(t)\to 0$ 当 $t\to\infty$。

那么 $\mathcal{T}$ 是渐近紧的。

3. 波动方程模型以及全局吸引子的构造

给定 $\theta\in[0,1],\eta>0$，考虑如下波动方程：

$$\begin{cases} u_{tt}+\eta(-\Delta)^{\theta}u_t+(-\Delta)u=f(u), & t>0,x\in\Omega, \\ u(x,0)=u_0(x),u_t(0,x)=v_0(x), x\in\Omega, & \\ u(x,t)=0, & t\ge 0,x\in\partial\Omega, \end{cases} \tag{3.1}$$

其中 Ω 是 $\mathbb{R}^n(n\ge 3)$ 中有界光滑定义域。

令 $A=-\Delta$ 是带有 Dirichlet 边界条件，易知 A 是正定的、自伴算子且有定义域 $D(A)=H^2(\Omega)\cap H_0^1(\Omega)$，因此 $-A$ 在 $X=L^2$ 上生成了一个解析半群(具体可参见[4], 6.5 节)。记 X^{α} 是与算子 A 相关的分数阶空间，也就是 $X^{\alpha}=D(A^{\alpha})$ 且赋予了图像范数，详细可见([4], 6.4 节)，并且记

$$X^0=X,X^{\frac{1}{2}}=H_0^1(\Omega),X^1=H^2(\Omega)\cap H_0^1(\Omega)。$$

问题(3.1)可以写成一个发展方程的形式且定义在空间 $Y=X^{\frac{1}{2}}\times X$ 中([1] [4])：

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{bmatrix}u\\v\end{bmatrix}+\mathcal{A}_{(\theta)}\begin{bmatrix}u\\v\end{bmatrix}=\mathcal{F}\left(\begin{bmatrix}u\\v\end{bmatrix}\right),t>0, \\ \begin{bmatrix}u(0)\\v(0)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}u_0\\v_0\end{bmatrix}\in Y \end{cases} \tag{3.2}$$

其中 $\mathcal{A}_{(\theta)}:D(\mathcal{A}_{(\theta)})\subset Y\to Y$ 和 $\mathcal{F}$ 有如下形式：

$$D(\mathcal{A}_{(\theta)})=Y_{(\theta)}^1=\left\{\begin{bmatrix}\varphi\\\xi\end{bmatrix}:\varphi\in X^{\frac{3}{2}-\theta},\xi\in X^{\frac{1}{2}},A^{1-\theta}\varphi+\eta\xi\in X^{\theta}\right\}，对于 \theta\in[0,1],$$

$$\mathcal{A}_{(\theta)}\begin{bmatrix}\varphi\\ \xi\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & -I\\ A & \eta A^{\theta}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\varphi\\ \xi\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\xi\\ A^{\theta}\left(A^{1-\theta}\varphi+\eta\xi\right)\end{bmatrix}，对\begin{bmatrix}\varphi\\ \xi\end{bmatrix}\in D\left(\mathcal{A}_{(\theta)}\right)和\mathcal{F}\left(\begin{bmatrix}u\\ v\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}0\\ F(u)\end{bmatrix},$$

且 F 是与 f 有关的 Nemytskii 算子，即 $F(u)(x)=f(u(x)), x\in\Omega$。在 Y 中关于(3.2)的线性问题变为：

$$\begin{cases}u_{tt}+\eta A^{\theta}u_t+Au=0, t>0,\\ u(0)=u_0, u_t(0)=v_0,\end{cases}$$

当 $\theta=0$ 时对应于弱阻尼波动方程，当 $\theta=(0,1]$ 时对应于强阻尼波动方程。对每个 $\theta=[0,1]$，算子 $-\mathcal{A}_{(\theta)}$ 生成了一个强连续的半群 $\left\{e^{-\mathcal{A}_{(\theta)}t}:t\geq 0\right\}\subseteq\mathcal{L}(Y)$。若 $\theta=0$，$\left\{e^{-\mathcal{A}_{(0)}t}:t\geq 0\right\}$ 可以成为一个群，对于 $\theta>0$，$\left\{e^{-\mathcal{A}_{(\theta)}t}:t\geq 0\right\}$ 不能成为一个群，但是可以用如下方式描述：

1) 若 $\theta\in\left(0,\frac{1}{2}\right)$，$-\mathcal{A}_{(\theta)}$ 生成了一个 Gevrey 类 $\delta>\frac{1}{2\theta}$ 的半群，因此它是可微的(参见[5])，

2) 若 $\theta\in\left[\frac{1}{2},1\right]$，$-\mathcal{A}_{(\theta)}$ 生成了一个解析半群(参见[6])。在[7]中作者给出了 $\mathcal{A}_{(\theta)}$ 的一个分数次定义域的刻画，也就是分数阶空间 $Y^{\alpha}_{(\theta)}$，$\alpha\in\left[\frac{1}{2},1\right]$。

对于 Hilbert 空间情形 $Y=H^1_0(\Omega)\times L^2(\Omega)$ 在参考文献[2] [8]中有相应的结果；对于 $\theta\in\left[\frac{1}{2},1\right]$，这个问题也可以通过空间 $W^{1,p}_0(\Omega)\times L^p(\Omega)$ 来解决(参见[9])。

关于方程(3.1)的局部适定性，如下结果成立：

定理 3.1 ([3])若 f 满足

$$\left|f(u)-f(u')\right|\leq c\left|u-u'\right|\left(1+|u|^{\rho-1}+|u'|^{\rho-1}\right) \tag{3.3}$$

其中 $\rho\leq\frac{n+2}{n-2}$ 当 $\theta\in\left[\frac{1}{2},1\right]$ 和 $\rho\leq\frac{n}{n-2}$ 当 $\theta\in\left[0,\frac{1}{2}\right)$，那么方程(3.1)在空间 $H^1_0(\Omega)\times L^2(\Omega)$ 是局部适定性的。若 ρ 的条件中严格不等式成立(即次临界增长)，(3.1)的解要么全局存在，要么有限时间在 $H^1_0(\Omega)\times L^2(\Omega)$ 中爆破。

从参考文献[2]的结果，方程(3.1)相关的半群在合适假设下存在全局吸引子，即如下结果成立：

定理 3.2 假设 f 满足(3.3)，$\rho<\frac{n+2}{n-2}$ 当 $\theta\in\left[\frac{1}{2},1\right]$ 和 $\rho<\frac{n}{n-2}$ 当 $\theta\in\left[0,\frac{1}{2}\right)$，且有耗散条件

$$\limsup_{|u|\to\infty}\frac{f(u)}{u}\leq 0. \tag{3.4}$$

那么问题(3.1)存在全局吸引子。

对于临界增长情形 $\rho=\frac{n+2}{n-2}$ 当 $\theta=1$，$\rho=\frac{n}{n-2}$ 当 $\theta\in\left[0,\frac{1}{2}\right)$，当增加额外假设并确保非线性变分公式的有效性，则可由文献[1]中的方法处理(也可参见[2]，4.3 节)。

在定理 3.2 的假设下，可以得到方程(3.1)的全局可解性，且有

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\|u_t\|^2_{L^2(\Omega)}+\frac{1}{2}\|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)}-\int_{\Omega}\int_0^u f(s)\,ds\right)=-\eta\left\|A^{\frac{\theta}{2}}u_t\right\|^2_{L^2(\Omega)}$$，这表明(3.1)的解满足

$$\left\|\begin{bmatrix}u(t,u_0,v_0)\\ v(t,u_0,v_0)\end{bmatrix}\right\|_Y\leq c+c'\mathcal{L}\left(\begin{bmatrix}u_0\\ v_0\end{bmatrix}\right)\leq C\left(\left\|\begin{bmatrix}u_0\\ v_0\end{bmatrix}\right\|_Y\right) \tag{3.5}$$

其中 c,c' 不依赖于 η 选取，

$$\mathcal{L}\left(\begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix}\right)=\frac{1}{2}\|w_2\|_{L^2(\Omega)}^2+\frac{1}{2}\|\nabla w_1\|_{L^2(\Omega)}^2-\int_\Omega\int_0^{w_1}f(s)\mathrm{d}s, w_1,w_2\in Y, \tag{3.6}$$

和 $C:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}^+$ 是局部有界函数且与 η 选取无关。我们记 $T(t):Y\to Y$ 是方程(3.1)的解算子。

从估计式(3.5)中，还可以得到 Y 的有界子集的轨道是有界的。根据 $\rho<\frac{n}{n-2}$，得出映射 $\mathcal{F}$ 是紧的。再加上半群 $\left\{e^{-\mathcal{A}(\theta)t}:t\geq 0\right\}$ 的指数衰减性，确保了 $\mathcal{T}=\left\{T(t),t\geq 0\right\}$ 的渐近紧性(参考定理 2.1)，

从而在空间 Y 中，定理 3.2 中全局吸引子存在性可由标准的无穷维动力系统吸引子理论得到，见[4]。

从以上分析和计算过程来看，对于具体的波动方程模型，根据耗散情形，重点和难点是构造其全局吸引子的存在性，作为强大的理论工具，全局吸引子的应用越来越广泛[10] [11] [12]。

参考文献

[1] Arrieta, J.M. Carvalho, A.N. and Hale, J.K. (1992) A Damped Hyperbolic Equation with Critical Exponent. *Communications in Partial Differential Equations*, **17**, 841-866. https://doi.org/10.1080/03605309208820866

[2] Carvalho, A.N. and Cholewa, J.W. (2002) Attractors for Strongly Damped Wave Equation with Critical Nonlinearities. *Pacific Journal of Mathematics*, **207**, 287-310. https://doi.org/10.2140/pjm.2002.207.287

[3] Carvalho, A.N. and Cholewa, J.W. (2002) Local Well Posedness for Strongly Damped Wave Equation with Critical Nonlinearities. *Bulletin of the Australian Mathematical Society*, **66**, 443-463. https://doi.org/10.1017/S0004972700040296

[4] Carvalho, A.N., Langa, J.A. and Robinson, J.C. (2013) Attractors for Infinite-Dimensional Nonautonomous Dynamical Systems. *Applied Mathematical Sciences*, **182**. https://doi.org/10.1007/978-1-4614-4581-4

[5] Chen, S.P. and Triggiani, R. (1990) Gevrey Class Semigroups Arising from Elastic Systems with Gentle Dissipation: The Case $0<\alpha<1/2$. *Proceedings of American Mathematical Society*, **110**, 401-415. https://doi.org/10.2307/2048084

[6] Chen, S.P. and Triggiani, R. (1988) Proof of Two Conjectures by G. Chen and D. L. Russell on Structural Damping for Elastic Systems. Approximation and Optimization (Havana, 1987), *Lecture Notes in Math.*, vol. 1354, Springer, Berlin, 234-256. https://doi.org/10.1007/BFb0089601

[7] Chen, S.P. and Triggiani, R. (1989) Proof of Extensions of Two Conjectures on Structural Damping for Elastic Systems. *Pacific Journal of Mathematics*, **136**, 15-55. https://doi.org/10.2140/pjm.1989.136.15

[8] Carvalho, A.N. and Cholewa, J.W. (2008) Regularity of Solutions on the Global Attractor for a Semilinear Damped Wave Equation. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **337**, 932-948. https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2007.04.051

[9] Carvalho, A.N., Cholewa, J.W. and Dlotko, T. (2008) Strongly Damped Wave Problems: Bootstrapping and Regularity of Solutions. *Journal of Differential Equations*, **244**, 2310-2333. https://doi.org/10.1016/j.jde.2008.02.011

[10] Ball, J.M. (1997) Continuity Properties and Global Attractors of Generalized Semiflows and the Navier-Stokes Equations. *Journal of Nonlinear Science*, **7**, 475-502. https://doi.org/10.1007/s003329900037

[11] Crauel, H. and Flandoli, F. (1994) Attractors for Random Dynamical Systems. *Probability Theory and Related Fields*, **100**, 365-393. https://doi.org/10.1007/BF01193705

[12] Freitas, M.M., Kalita, P. and Langa, J.A. (2018) Continuity of Non-Autonomous Attractors for Hyperbolic Perturbation of Parabolic Equations. *Journal of Differential Equations*, **264**, 1886-1945. https://doi.org/10.1016/j.jde.2017.10.007