

具时变系数和时滞的模糊细胞神经网络的固定时间同步

刘 阳, 张松环, 丁 玮*

上海师范大学, 数理学院, 上海

Email: *dingwei@shnu.edu.cn

收稿日期: 2021年6月11日; 录用日期: 2021年7月13日; 发布日期: 2021年7月21日

摘 要

本文研究的是具有时变系数和时变时滞的模糊细胞神经网络(FCNNs)的固定时间同步问题, 目的是通过构造合适的控制器, 使两个具有时变系数和时变时滞的 FCNNs 在有限时间内同步, 并且可以通过改变控制器的参数来预先设定系统同步所需要的时间。主要方法是构造合适的控制器以及Lyapunov函数, 利用固定时间稳定性理论及一些不等式技巧, 得到具有时变系数和时变时滞的FCNNs固定时间同步的一些新的充分条件。最后还给了一个数值模拟的例子证明本文主要结果的有效性。

关键词

模糊细胞神经网络, 固定时间同步, 时变系数, 时变时滞

Fixed-Time Synchronization for Fuzzy Cellular Neural Networks with Time-Varying Coefficients and Delays

Yang Liu, Songhuan Zhang, Wei Ding*

* 通讯作者。

Department of Mathematics, Shanghai Normal University, Shanghai

Email: *dingwei@shnu.edu.cn

Received: Jun. 11th, 2021; accepted: Jul. 13th, 2021; published: Jul. 21st, 2021

Abstract

This paper studies the fixed-time synchronization problem of fuzzy cellular neural networks (FCNNs) with time-varying coefficients and time-varying delays. The purpose is to be able to make two FCNNs with time-varying coefficients and time-varying delays can be synchronized in a finite time by constructing a suitable controller, and the time required for system synchronization can be preset by changing the parameters of the controller. The main method is to construct a suitable controller and Lyapunov function, and use the fixed-time stability theory and some inequality techniques to obtain some new sufficient conditions for fixed-time synchronization of FCNNs with time-varying coefficients and time-varying delays. Finally, an example is given to prove the validity of the main results of this paper.

Keywords

Fuzzy Cellular Neural Network, Fixed-Time Synchronization, Time-Varying Coefficient, Time-Varying Delay

Copyright © 2021 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

在神经网络这一领域,神经网络的同步问题在过去的几十年里引起了人们的极大关注,并且神经网络的同步也包括多种同步类型.而在这些同步类型中,固定时间同步和有限时间同步的应用更加广泛,因为许多实际应用都要求系统能够在有限的时间内实现同步.

模糊细胞神经网络 (FCNNs) 是一种同时考虑模糊逻辑和局部连通性的非线性网络结构. 对于 FCNNs 的有限时间及固定时间同步问题, 已经有许多有价值的成果, 例如文献 [1] [2] [3], 其中文献 [1] [2] 研究的都是有限时间同步问题, 所估计的同步时间都与系统初始条件相关. 相比于文献 [1] [2], 本文研究的则是固定时间同步问题, 同样能够实现系统于有限的时间内达到同步, 优势在于所估计的同步时间和系统初始条件没有关系, 在实际应用中更加方便且广泛.

2. 模型描述

在本文中, 我们研究的是如下具有时变系数和时变时滞的 FCNNs:

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x}_i(t) = -c_i(t)x_i(t) + \sum_{j=1}^n a_{ij}(t)f_j(x_j(t)) + \sum_{j=1}^n b_{ij}(t)f_j(x_j(t - \tau_j(t))) + \sum_{j=1}^n d_{ij}(t)v_j(t) \\ \quad + \bigwedge_{j=1}^n T_{ij}(t)v_j(t) + \bigwedge_{j=1}^n \alpha_{ij}(t)f_j(x_j(t - \tau_j(t))) + \bigvee_{j=1}^n S_{ij}(t)v_j(t) \\ \quad + \bigvee_{j=1}^n \beta_{ij}(t)f_j(x_j(t - \tau_j(t))) + I_i(t), \\ x_i(s) = \phi_i(s), s \in [-\tau, 0], \end{array} \right. \quad (2.1)$$

其中 $i, j \in J = \{1, 2, \dots, n\}$, $x_i(t)$ 代表第 i 个神经元在 t 时的状态; $c_i(t)$ 是衰减率; $f_j(\cdot)$ 是激励函数; 在 $a_{ij}(t), b_{ij}(t)$ 和 $d_{ij}(t)$ 中, 前两个是反馈模板的元素, 最后一个的前馈模板的元素; \bigwedge (\bigvee) 表示模糊和 (或) 运算; $T_{ij}(t)$ ($S_{ij}(t)$) 和 $\alpha_{ij}(t)$ ($\beta_{ij}(t)$) 分别是模糊前馈最小 (最大) 模板和模糊反馈最小 (最大) 模板的元素; $v_j(t)$ 和 $I_i(t)$ 分别代表输入与偏置; $\tau_j(t)$ 为时变时滞; 系统 (2.1) 的初值为 $\phi_i(s) \in \mathcal{C}([-\tau, 0], \mathbb{R}^n)$, 其中 $\mathcal{C}([-\tau, 0], \mathbb{R}^n)$ 是从 $[-\tau, 0]$ 映射到 \mathbb{R}^n 的连续函数集, 并且 $\tau = \max_{1 \leq j \leq n} \{\tau_j(t)\}$.

上面的系统 (2.1) 是驱动系统, 对应的响应系统如下所示:

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{y}_i(t) = -c_i(t)y_i(t) + \sum_{j=1}^n a_{ij}(t)f_j(y_j(t)) + \sum_{j=1}^n b_{ij}(t)f_j(y_j(t - \tau_j(t))) + \sum_{j=1}^n d_{ij}(t)v_j(t) \\ \quad + \bigwedge_{j=1}^n T_{ij}(t)v_j(t) + \bigwedge_{j=1}^n \alpha_{ij}(t)f_j(y_j(t - \tau_j(t))) + \bigvee_{j=1}^n S_{ij}(t)v_j(t) \\ \quad + \bigvee_{j=1}^n \beta_{ij}(t)f_j(y_j(t - \tau_j(t))) + I_i(t) + u_i(t), \\ y_i(s) = \varphi_i(s), s \in [-\tau, 0], \end{array} \right. \quad (2.2)$$

其中 $u_i(t)$ 为之后要设计的控制器.

用系统 (2.2) 减去系统 (2.1) 可得误差系统为:

$$\begin{cases} \dot{e}_i(t) = -c_i(t)e_i(t) + \sum_{j=1}^n a_{ij}(t)f_j(e_j(t)) + \sum_{j=1}^n b_{ij}(t)f_j(e_j(t - \tau_j(t))) \\ \quad + \sum_{j=1}^n \alpha_{ij}(t)f_j(e_j(t - \tau_j(t))) + \sum_{j=1}^n \beta_{ij}(t)f_j(e_j(t - \tau_j(t))) + u_i(t), \\ e_i(s) = \varphi_i(s) - \phi_i(s), s \in [-\tau, 0], \end{cases} \quad (2.3)$$

其中 $e_i(\cdot) = y_i(\cdot) - x_i(\cdot)$, $f_j(e_j(\cdot)) = f_j(y_j(\cdot)) - f_j(x_j(\cdot))$.

定义 2.1. 若存在常数 T_0 满足条件: (i) $\lim_{t \rightarrow T_0} e_i(t) = 0$, (ii) $\forall t > T_0, e_i(t) \equiv 0, i \in J$. 那么系统 (2.1) 和 (2.2) 在稳定时间 T_0 能够固定时间同步, 其中 T_0 和系统的初始条件没有关系.

引理 2.1 ([4]). 对于 $i, j \in J, x_j, y_j, \zeta_{ij}, \varsigma_{ij} \in \mathbb{R}, f_j : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 是连续的, 则有

$$\begin{aligned} \left| \sum_{j=1}^n \zeta_{ij} f_j(x_j) - \sum_{j=1}^n \zeta_{ij} f_j(y_j) \right| &\leq \sum_{j=1}^n |\zeta_{ij}| |f_j(x_j) - f_j(y_j)|, \\ \left| \sum_{j=1}^n \varsigma_{ij} f_j(x_j) - \sum_{j=1}^n \varsigma_{ij} f_j(y_j) \right| &\leq \sum_{j=1}^n |\varsigma_{ij}| |f_j(x_j) - f_j(y_j)|. \end{aligned}$$

引理 2.2 ([5]). 令 $0 < \mu \leq 1 < \lambda, \kappa_i \geq 0, \iota_i \geq 0, i \in J$, 则

$$\sum_{i=1}^n \iota_i^\mu \geq \left(\sum_{i=1}^n \iota_i \right)^\mu, \quad \sum_{i=1}^n \kappa_i^\lambda \geq n^{1-\lambda} \left(\sum_{i=1}^n \kappa_i \right)^\lambda.$$

引理 2.3 ([6]). 若存在一个径向无界, 正定并且连续的函数 $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_+ \cup \{0\}$ 有 $\dot{V}(e(t)) \leq -aV^\lambda(e(t)) - bV^\mu(e(t))$, 其中 $0 < \mu < 1 < \lambda, a > 0, b > 0$, 那么误差系统 (2.3) 固定时间稳定, 则系统 (2.1) 和 (2.2) 在稳定时间 T_0 时固定时间同步, 并且有

$$T_0 \leq T_{max} = \frac{1}{a(\lambda - 1)} + \frac{1}{b(1 - \mu)}.$$

3. 主要结果

本文有如下两条假设:

(A₁). 对于 $\forall x, y \in \mathbb{R}^n, x \neq y$, 存在常数 $\omega_i > 0$ 满足 $|f_i(y) - f_i(x)| \leq \omega_i |y - x|, i \in J$.

(A₂). 假设 $c_i(t), a_{ij}(t), b_{ij}(t), d_{ij}(t), T_{ij}(t), \alpha_{ij}(t), S_{ij}(t), \beta_{ij}(t), v_j(t), I_i(t) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 是连续并且有界的函数. 对于连续有界函数 $g(t)$, 有如下记号: $g^- = \inf_{t \in \mathbb{R}} g(t), g^+ = \sup_{t \in \mathbb{R}} g(t)$.

为了使得系统 (2.1) 和 (2.2) 能够实现固定时间同步, 我们构造了如下控制器:

$$u_i(t) = -k_i e_i(t) - \eta_i \text{sign}(e_i(t)) |e_i(t - \tau_i(t))| - \rho_i \text{sign}(e_i(t)) |e_i(t)|^\lambda - l_i \text{sign}(e_i(t)) |e_i(t)|^\mu, \quad (3.1)$$

其中 $k_i \geq 0$, $\eta_i \geq 0$, $\rho_i > 0$, $l_i > 0$, $0 < \mu < 1 < \lambda$, $i \in J$.

定理 3.1. 在 (A_1) , (A_2) 和控制器 (3.1) 下, 若下列不等式成立:

$$\begin{cases} c_i^- + k_i - \sum_{j=1}^n |a_{ji}|^+ \omega_i \geq 0, \\ \eta_i - \sum_{j=1}^n (|b_{ji}|^+ + |\alpha_{ji}|^+ + |\beta_{ji}|^+) \omega_i \geq 0, \end{cases} \quad (3.2)$$

那么系统 (2.1) 和 (2.2) 可以在固定时间 T_0 同步, 并且

$$T_0 \leq T_{max} = \frac{1}{\rho n^{1-\lambda}(\lambda-1)} + \frac{1}{l(1-\mu)}, \quad (3.3)$$

其中 $\rho = \min_{1 \leq i \leq n} \{\rho_i\} > 0$, $l = \min_{1 \leq i \leq n} \{l_i\} > 0$, $i, j \in J$.

证明. 考虑如下 Lyapunov 函数

$$V(e(t)) = \sum_{i=1}^n |e_i(t)|. \quad (3.4)$$

(i) 当 $e_i(t) = 0$ 时, 对于控制器 (3.1) 有 $u_i(t) = 0$, 并且误差系统 (2.3) 在这时是稳定的. 因此总是有合适的参数满足条件 (3.2). 也就是说, 定理 3.1 一定是成立的.

(ii) 当 $e_i(t) \neq 0$ 时, 计算 (3.4) 的导数得

$$\dot{V}(e(t)) = \sum_{i=1}^n \text{sign}(e_i(t)) \dot{e}_i(t).$$

将 (2.3) 和 (3.1) 代入后进行放缩可得

$$\begin{aligned} \dot{V}(e(t)) &= \sum_{i=1}^n \text{sign}(e_i(t)) [-c_i(t)e_i(t) + \sum_{j=1}^n a_{ij}(t)f_j(e_j(t)) + \sum_{j=1}^n b_{ij}(t)f_j(e_j(t - \tau_j(t))) \\ &\quad + \bigwedge_{j=1}^n \alpha_{ij}(t)f_j(e_j(t - \tau_j(t))) + \bigvee_{j=1}^n \beta_{ij}(t)f_j(e_j(t - \tau_j(t))) - k_i e_i(t) \\ &\quad - \eta_i \text{sign}(e_i(t))|e_i(t - \tau_i(t))| - \rho_i \text{sign}(e_i(t))|e_i(t)|^\lambda - l_i \text{sign}(e_i(t))|e_i(t)|^\mu] \\ &\leq \sum_{i=1}^n -(c_i(t) + k_i)|e_i(t)| + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |a_{ij}(t)||f_j(e_j(t))| + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |b_{ij}(t)||f_j(e_j(t - \tau_j(t)))| \\ &\quad + \sum_{i=1}^n |\bigwedge_{j=1}^n \alpha_{ij}(t)f_j(e_j(t - \tau_j(t)))| + \sum_{i=1}^n |\bigvee_{j=1}^n \beta_{ij}(t)f_j(e_j(t - \tau_j(t)))| \\ &\quad - \sum_{i=1}^n \eta_i |e_i(t - \tau_i(t))| - \sum_{i=1}^n \rho_i |e_i(t)|^\lambda - \sum_{i=1}^n l_i |e_i(t)|^\mu. \end{aligned}$$

根据引理 2.1 有

$$\begin{aligned} \dot{V}(e(t)) \leq & \sum_{i=1}^n -(c_i(t) + k_i)|e_i(t)| + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |a_{ij}(t)||f_j(e_j(t))| \\ & + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |b_{ij}(t)||f_j(e_j(t - \tau_j(t)))| \\ & + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |\alpha_{ij}(t)||f_j(e_j(t - \tau_j(t)))| \\ & + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |\beta_{ij}(t)||f_j(e_j(t - \tau_j(t)))| \\ & - \sum_{i=1}^n \eta_i |e_i(t - \tau_i(t))| - \sum_{i=1}^n \rho_i |e_i(t)|^\lambda - \sum_{i=1}^n l_i |e_i(t)|^\mu. \end{aligned}$$

根据 (A₁) 和 (A₂) 可得

$$\begin{aligned} \dot{V}(e(t)) \leq & \sum_{i=1}^n -(c_i^- + k_i)|e_i(t)| + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |a_{ij}|^+ \omega_j |e_j(t)| \\ & + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (|b_{ij}|^+ + |\alpha_{ij}|^+ + |\beta_{ij}|^+) \omega_j |e_j(t - \tau_j(t))| \\ & - \sum_{i=1}^n \eta_i |e_i(t - \tau_i(t))| - \sum_{i=1}^n \rho_i |e_i(t)|^\lambda - \sum_{i=1}^n l_i |e_i(t)|^\mu \\ = & \sum_{i=1}^n -(c_i^- + k_i)|e_i(t)| + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |a_{ji}|^+ \omega_i |e_i(t)| \\ & + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (|b_{ji}|^+ + |\alpha_{ji}|^+ + |\beta_{ji}|^+) \omega_i |e_i(t - \tau_i(t))| \\ & - \sum_{i=1}^n \eta_i |e_i(t - \tau_i(t))| - \sum_{i=1}^n \rho_i |e_i(t)|^\lambda - \sum_{i=1}^n l_i |e_i(t)|^\mu \\ = & \sum_{i=1}^n -(c_i^- + k_i - \sum_{j=1}^n |a_{ji}|^+ \omega_i) |e_i(t)| \\ & - \sum_{i=1}^n [\eta_i - \sum_{j=1}^n (|b_{ji}|^+ + |\alpha_{ji}|^+ + |\beta_{ji}|^+) \omega_i] |e_i(t - \tau_i(t))| \\ & - \sum_{i=1}^n \rho_i |e_i(t)|^\lambda - \sum_{i=1}^n l_i |e_i(t)|^\mu. \end{aligned}$$

由条件 (3.2) 及引理 2.2 计算得

$$\begin{aligned}\dot{V}(e(t)) &\leq -\sum_{i=1}^n \rho_i |e_i(t)|^\lambda - \sum_{i=1}^n l_i |e_i(t)|^\mu \\ &\leq -\rho \sum_{i=1}^n |e_i(t)|^\lambda - l \sum_{i=1}^n |e_i(t)|^\mu \\ &\leq -\rho n^{1-\lambda} \left(\sum_{i=1}^n |e_i(t)|\right)^\lambda - l \left(\sum_{i=1}^n |e_i(t)|\right)^\mu \\ &= -\rho n^{1-\lambda} V^\lambda(e(t)) - l V^\mu(e(t)),\end{aligned}$$

其中 $\rho = \min_{1 \leq i \leq n} \{\rho_i\} > 0$, $l = \min_{1 \leq i \leq n} \{l_i\} > 0$.

通过引理 2.3, 我们能够得到系统 (2.1) 和 (2.2) 可以在稳定时间 T_0 实现固定时间同步, 并且 $T_0 \leq T_{max} = \frac{1}{\rho n^{1-\lambda}(\lambda-1)} + \frac{1}{l(1-\mu)}$. 证毕.

推论 3.1. 若系统 (2.1) 和 (2.2) 中的所有时变系数都退化为常数, 那么定理 3.1 的结论仍然成立.

推论 3.2. 若系统 (2.1), (2.2) 及控制器 (3.1) 中的所有时变时滞 $t - \tau_j(t)$ 都替换为比例时滞 $q_{ij}t$, 其中 $q_{ij} \in (0, 1]$, 则定理 3.1 的结论仍然成立.

注 3.1. 文献 [1] 及文献 [2] 已经分别研究了具有常系数和时变时滞的 FCNNs 及具有时变系数和比例时滞的 FCNNs, 并且都是研究的有限时间同步问题, 所估计的稳定时间都和系统的初始条件是相关的. 但是在一般情况下, 初始条件不太容易获得, 而推论 3.1 和推论 3.2 得到的稳定时间都和初始条件没有关系, 故推论 3.1 和推论 3.2 的结果比文献 [1] 和 [2] 要更加实用.

注 3.2. 因为 sign 函数是不连续的, 它可能会导致抖动, 根据文献 [1] 的想法, 我们用连续且值域为 $(-1, 1)$ 的 tanh 函数来替换. 那么控制器 (3.1) 就变成

$$u_i(t) = -k_i e_i(t) - \eta_i \tanh(\xi_i e_i(t)) |e_i(t - \tau_i(t))| - \rho_i \tanh(\varrho_i e_i(t)) |e_i(t)|^\lambda - l_i \tanh(p_i e_i(t)) |e_i(t)|^\mu, \quad (3.5)$$

其中 $k_i \geq 0$, $\eta_i \geq 0$, $\xi_i > 0$, $\rho_i > 0$, $\varrho_i > 0$, $l_i > 0$, $p_i > 0$, $0 < \mu < 1 < \lambda$, $i \in J$.

4. 数值模拟

在这一节中我们给一个二维 (即 $n = 2$) 的例子去验证本文所得结果的有效性.

例 4.1. 对于系统 (2.1), (2.2) 及控制器 (3.5) 有如下取值:

$$\begin{aligned}\alpha_{i1}(t) &= \beta_{i1}(t) = \frac{1+\sin it}{3}, \quad \alpha_{i2}(t) = \beta_{i2}(t) = \frac{1+\cos it}{3}, \quad c_1(t) = \frac{2+3\sin t}{2}, \quad c_2(t) = \frac{2+3\cos t}{2}, \\ a_{i1}(t) &= b_{i1}(t) = \frac{1+\sin it}{2}, \quad a_{i2}(t) = b_{i2}(t) = \frac{1+\cos it}{2}, \quad \tau_j(t) = \frac{\exp(t)}{1+\exp(t)}, \quad f_j(x) = 0.5(|x+1| - |x-1|), \\ I_i(t) &= -4, \quad T_{ij}(t) = v_j(t) = S_{ij}(t) = d_{ij}(t) = 1, \quad i, j = 1, 2.\end{aligned}$$

初始条件为 $\phi(s) = (0.2, -0.4)^T$, $\varphi(s) = (-0.2, 0.4)^T$. 控制器 (3.5) 中有 $k_i = 3$, $\eta_i = 5$, $\rho_i =$

1, $l_i = 3, \lambda = 1.5, \mu = 0.9, \xi_i = \varrho_i = p_i = 2$.

取 $\omega_i = 1$, 则经计算可得 $(A_1), (A_2)$ 及条件 (3.2) 都满足. 并由 (3.3) 可得稳定时间 $T_0 \leq T_{max} \approx 6.161$. 因此, 根据定理 3.1 可知, 在控制器 (3.5) 下, 系统 (2.1) 和系统 (2.2) 在 T_0 时可实现固定时间同步.

由 Matlab 软件可得如下三个图像: 图 1 表明若无控制器 (3.5), 误差系统 (2.3) 不稳定, 则系统 (2.1) 和系统 (2.2) 不能实现同步 (见图 1). 图 2 则表明在控制器 (3.5) 下, 误差系统 (2.3) 在固定时间 T_0 时稳定, 那么系统 (2.1) 和系统 (2.2) 在 $T_0 \leq T_{max} \approx 6.161$ 时能够固定时间同步 (见图 2).

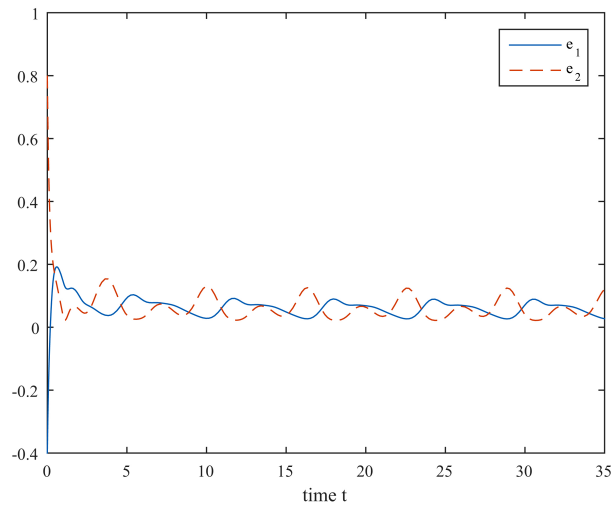


Figure 1. Time evolution of $e_1(t)$ and $e_2(t)$ without the controller (3.5)

图 1. 无控制器(3.5)时 $e_1(t)$ 和 $e_2(t)$ 的轨迹

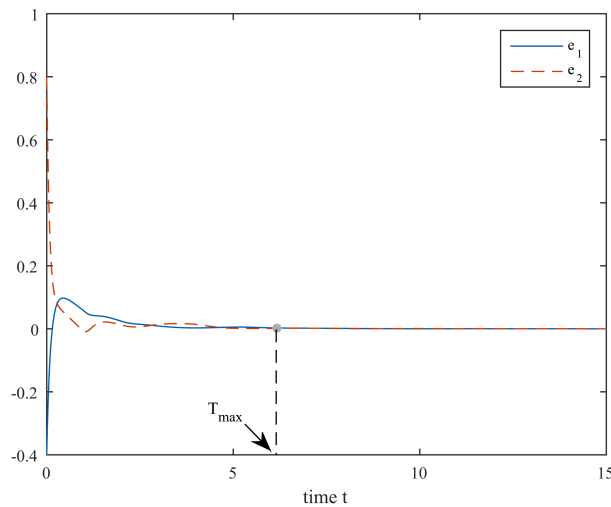


Figure 2. Time evolution of $e_1(t)$ and $e_2(t)$ with the controller (3.5)

图 2. 有控制器(3.5)时 $e_1(t)$ 和 $e_2(t)$ 的轨迹

注 4.1. 取 $k_i = 1$, $\eta_i = 1$, $i = 1, 2$. 则条件 (3.2) 不满足. 从图 3 可看出若条件 (3.2) 不满足, 即使在控制器 (3.5) 下, 系统 (2.1) 和系统 (2.2) 也不能实现固定时间同步, 见图 3.

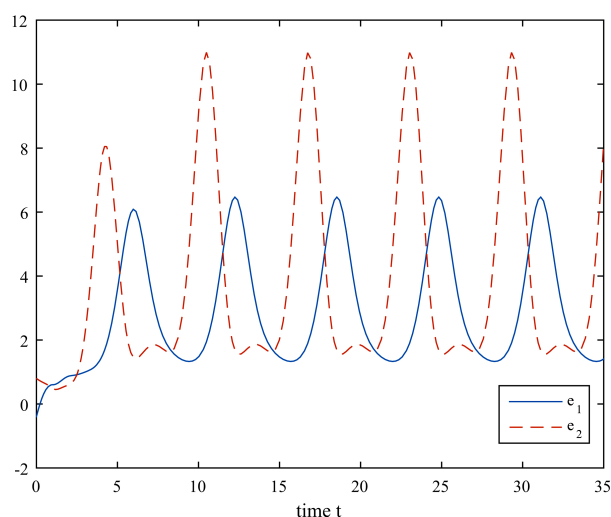


Figure 3. The evolution of synchronization error $e_1(t)$ and $e_2(t)$ that don't satisfy (3.2)

图 3. 不满足条件(3.2)时 $e_1(t)$ 和 $e_2(t)$ 的轨迹

基金项目

本文的工作由国家自然科学基金(No. 12071302)支持。

参考文献

- [1] Abdurahman, A., Jiang, H.J. and Teng, Z.D. (2016) Finite-Time Synchronization for Fuzzy Cellular Neural Networks with Time-Varying Delays. *Fuzzy Sets and Systems*, **297**, 96-111. <https://doi.org/10.1016/j.fss.2015.07.009>
- [2] Wang, W.T. (2018) Finite-Time Synchronization for a Class of Fuzzy Cellular Neural Networks with Time-Varying Coefficients and Proportional Delays. *Fuzzy Sets and Systems*, **338**, 40-49. <https://doi.org/10.1016/j.fss.2017.04.005>
- [3] Zheng, M.W., Li, L.X., Peng, H.P., Xiao, J.H., Yang, Y.X., Zhang, Y.P. and Zhao, H. (2018) Fixed-Time Synchronization of Memristor-Based Fuzzy Cellular Neural Network with Time-Varying Delay. *Journal of the Franklin Institute*, **355**, 6780-6809. <https://doi.org/10.1016/j.jfranklin.2018.06.041>

- [4] Ding, W. and Han, M.A. (2008) Synchronization of Delayed Fuzzy Cellular Neural Networks Based on Adaptive Control. *Physics Letters A*, **372**, 4674-4681.
<https://doi.org/10.1016/j.physleta.2008.04.053>
- [5] Chen, C., Li, L., Peng, H., Yang, Y. and Zhao, H. (2020) A New Fixed-Time Stability Theorem and Its Application to the Fixed-Time Synchronization of Neural Networks. *Neural Networks*, **123**, 412-419. <https://doi.org/10.1016/j.neunet.2019.12.028>
- [6] Polyakov, A. (2012) Nonlinear Feedback Design for Fixed-Time Stabilization of Linear Control Systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, **57**, 2106-2110.
<https://doi.org/10.1109/TAC.2011.2179869>