Pure Mathematics 理论数学, 2021, 11(9), 1665-1672
Published Online September 2021 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2021.119185

Hans汉斯

异质环境下扩散Holling-Tanner模型正稳态解的全局稳定性

张万红

长安大学，理学院，陕西 西安
Email: 724843457@qq.com

收稿日期：2021年8月17日；录用日期：2021年9月19日；发布日期：2021年9月26日

摘 要

考虑异质环境对带有扩散项的Holling-Tanner捕食－食饵模型正稳态解全局稳定性的影响。首先利用抛物方程的比较定理等方法证明了该模型正稳态解的存在性，进一步通过迭代过程，得出了该模型正稳态解的下界。最后通过构造一种新的李雅普诺夫函数，研究Holling-Tanner捕食－食饵模型正稳态解的稳定性：该模型在环境异质下的正稳态解是全局稳定的。

关键词

捕食－食饵模型，异质环境，正稳态解，全局稳定性，Lyapunov函数

Global Stability of the Positive Steady-State Solution of the Diffusion Holling-Tanner Model in a Heterogeneous Environment

Wanhong Zhang

School of Science, Chang'an University, Xi'an Shaanxi
Email: 724843457@qq.com

Received: Aug. 17th, 2021; accepted: Sep. 19th, 2021; published: Sep. 26th, 2021

Abstract

Consider the influence of heterogeneous environment on the global stability of the positive steady-state solution of the Holling-Tanner predator-prey model with diffusion term. First, the ex-

文章引用: 张万红. 异质环境下扩散 Holling-Tanner 模型正稳态解的全局稳定性[J]. 理论数学, 2021, 11(9): 1665-1672.
DOI: 10.12677/pm.2021.119185

istence of the positive steady-state solution of the model is proved by the comparison theorem of the parabolic equation, and the lower bound of the positive steady-state solution of the model is obtained through the iterative process. Finally, by constructing a new Lyapunov function, the stability of the positive steady-state solution of the Holling-Tanner predator-prey model is studied: the positive steady-state solution of this model is globally stable under heterogeneous environments.

Keywords

Predator-Prey Model, Heterogeneous Environment, Positive Steady-State Solution, Global Stability, Lyapunov Function

1. 引言

生物数学模型是人们研究种群规模发展变化的重要手段之一[1]。近年来，捕食－食饵种群模型研究取得了很好的结果。对于 Holling-Tanner 捕食－食饵模型，很多国内外学者取得了有意义的成果。例如，文献[2]用上下解方法讨论了在更简单的参数条件下，该模型的全局稳定性；文献[3]通过一种新的方法建立了该模型唯一正平衡解的全局渐进稳定性等等。但是环境异质对物种产生的影响这类研究甚少，在种群竞争中，环境异质可能会改变竞争的结果，理解空间非均质环境如何影响物种间的竞争是一个重要的生物学问题。本文将利用上下解方法，以及一种新构造的 Lyapunov 函数方法，讨论 Holling-Tanner 捕食－食饵模型在空间异质情况下正稳态解的全局稳定性。

考虑在异质环境下带有扩散项的 Holling-Tanner 捕食－食饵模型：

$$\begin{cases} u_t = d_1(x)\Delta u + a(x)u - u^2 - \dfrac{buv}{m+ru}, & x\in\Omega, t>0, \\ v_t = d_2(x)\Delta v + bv - \dfrac{bv^2}{\gamma u}, & x\in\Omega, t>0, \\ \dfrac{\partial u(x,t)}{\partial \nu} = \dfrac{\partial v(x,t)}{\partial \nu} = 0, & x\in\partial\Omega, t>0, \\ u(x,0)=u_0(x)>0, v(x,0)=v_0(x)\ge(\neq)0, & x\in\Omega \end{cases} \tag{1.1}$$

其中，$u(x,t)$ 和 $v(x,t)$ 分别代表捕食者和食饵的密度函数，Ω 是 R^n 中具有光滑边界 $\partial\Omega$ 的有界区域，施加在 $\partial\Omega$ 上的无通量边界条件表示它们生活在一个封闭的环境里。$d_1(x)$ 和 $d_2(x)$ 分别是 u 和 v 的空间依赖扩散系数函数，$a(x)$ 是空间异质资源函数，其中 b,r,m,γ 都是常数。

2. 预备知识

为了证明异质环境下扩散 Holling-Tanner 模型正稳态解的存在性和全局稳定性，引入如下引理。

引理 1 [4] (比较定理)假设 $f(s)\in C^1([0,\infty))$ 是正函数，常数 $d>0,\beta>0$，$T\in[0,\infty)$，$\omega\in C^{2,1}(\Omega\times(T,\infty))\cap C^{1,0}(\bar{\Omega}\times[T,\infty))$ 是正函数。如果 ω 满足：

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\omega}{\partial t} - d\Delta\omega \le \omega^{1+\beta} f(\omega)(\alpha-\omega), & x\in\Omega, t\in(T,\infty) \\ \dfrac{\partial\omega}{\partial n} = 0, & x\in\partial\Omega, t\in[T,\infty) \end{cases}$$

且常数$\alpha>0$，那么

$$\limsup_{t\to\infty}\max_{\bar{\Omega}}\omega(\cdot,t)\le\alpha \tag{2.1}$$

引理 2 [5] 假设$\delta>0$，函数$\psi,h\in C([\delta,\infty))$分别满足$\psi(t)\ge 0$，且$\int_{\delta}^{\infty}h(t)\mathrm{d}t<\infty$。若$\psi\in C^1([\delta,\infty))$是有界的，并且

$$\varphi'(t)\le-\psi(t)+h(t)，\quad \psi'(t)\le K$$

$$(\text{其中 } K>0)$$

那么$\lim_{t\to\infty}\psi(t)=0$。

3. 异质环境下扩散 Holling-Tanner 模型正稳态解的存在性

系统(1.1)对应的稳态问题为：

$$\begin{cases}-d_1(x)\Delta u=u\left(a(x)-u-\dfrac{bv}{m+ru}\right), & x\in\Omega\\ -d_2(x)\Delta v=bv\left(1-\dfrac{v}{\gamma u}\right), & x\in\Omega\\ \dfrac{\partial u(x,t)}{\partial\nu}=\dfrac{\partial v(x,t)}{\partial\nu}=0, & x\in\partial\Omega\end{cases}$$

本节给出扩散 Holling-Tanner 模型正稳态解的存在性结果。

定理 1 系统(1.1)存在唯一解$(u(x,t),v(x,t))$，并满足：对任意小的$\varepsilon_1,\varepsilon_2$(其中$\varepsilon_1>0,\varepsilon_2\in(0,\varepsilon_1]$)，存在一个常数$T>0$，当$t>T$时，有

1) $\varepsilon_2\le u(x,t),v(x,t)\le\bar{c}+\varepsilon_1$，$\forall x\in\bar{\Omega}.$ (3.1)

2) 存在一个常数$G>0$，使得

$$\max_{t>T_1}\|u(\cdot,t)\|_{C^{2+\alpha}(\bar{\Omega})},\max_{t>T_1}\|v(\cdot,t)\|_{C^{2+\alpha}(\bar{\Omega})}\le G. \tag{3.2}$$

其中

$$\bar{c}:=\max_{\bar{\Omega}}a(x)，\quad \underline{c}:=\min_{\bar{\Omega}}a(x). \tag{3.3}$$

证明 由系统(1.1)的第一个方程，$u(x,t)$满足

$$u_t-d_1(x)\Delta u\le u\left(\max_{x\in\bar{\Omega}}a(x)-u\right)$$

利用引理 1，得

$$\limsup_{t\to\infty}\max_{\bar{\Omega}}u(x,t)\le\max_{x\in\bar{\Omega}}a(x)=\bar{c}$$

那么对任意的$\varepsilon>0$，存在$T>0$，使得$u(x,t)<\bar{c}+\varepsilon$。故模型(1.1)的第二个方程$v_t=d_2(x)\Delta v+bv-\dfrac{bv^2}{\gamma u}$中，$v(x,t)$满足

$$v_t-d_2(x)\Delta v\le bv\left(1-\frac{v}{\gamma(\bar{c}+\varepsilon)}\right)$$

结合系统(1.1)的边界条件$\dfrac{\partial u}{\partial\nu}=0$，同理，利用引理 1 得出

$$\limsup_{t\to\infty}\max_{\bar\Omega} v(x,t) \le \bar c + \varepsilon$$

故存在 $T>0$，使得

$$u(x,t), v(x,t) \le \bar c + \varepsilon_1,\quad x\in\bar\Omega,\quad t>T.$$

又因 $u(x,T), v(x,T) > 0$，我们可以选择一个很小的常数 ε_2，其中 $\varepsilon_2 \in (0,\varepsilon_1]$，使得 $u(x,T), v(x,T) > \varepsilon_2$ 故

$$\varepsilon_2 \le u(x,t), v(x,t) \le \bar c + \varepsilon_1.$$

因此，问题(1.1)在 $[\varepsilon_2, \bar c+\varepsilon_1]\times[\varepsilon_2,\bar c+\varepsilon_1]$ 上存在一个正稳态解 $(u(x,t), v(x,t))$。

4. 异质环境下扩散 Holling-Tanner 模型正稳态解的下界

对任意的 $T>0$，定义 $\bar u_1 = \bar v_1 = \bar a + \varepsilon_1$，$\underline{u}_1 = \underline{v}_1 = \varepsilon_2$。显然有

$$\left| a(x)u_1 - u_1^2 - \frac{bu_1v_1}{m+ru_1} - a(x)u_2 + u_2^2 + \frac{bu_2v_2}{m+ru_2} \right| \le T\left(|u_1-u_2| + |v_1-v_2|\right), \tag{4.1}$$

$$\left| bv_1 - \frac{bv_1^2}{ru_1} - bv_2 + \frac{bv_2^2}{ru_2} \right| \le T\left(|u_1-u_2| + |v_1-v_2|\right).$$

定义如下的迭代序列

$$\begin{cases} \bar u_{i+1} = \bar u_i + \dfrac{1}{T}\left(\bar a \bar u_i - \bar u_i^2 - \dfrac{b\bar u_i \underline{v}_i}{m+r\bar u_i}\right), \\ \underline{u}_{i+1} = \underline{u}_i + \dfrac{1}{T}\left(\underline{a}\underline{u}_i - \underline{u}_i^2 - \dfrac{b\underline{u}_i \bar v_i}{m+r\underline{u}_i}\right), \\ \bar v_{i+1} = \bar v_i + \dfrac{1}{T}\left(b\bar v_i - \dfrac{b\bar v_i^2}{r\bar u_i}\right), \\ \underline{v}_{i+1} = \underline{v}_i + \dfrac{1}{T}\left(b\underline{v}_i - \dfrac{b\underline{v}_i^2}{r\underline{u}_i}\right). \end{cases} \tag{4.2}$$

定理 2 迭代序列(4.2)满足以下的单调性和收敛性：

1) 单调性：常数序列 $\{\bar u_i\}_{i=1}^{\infty}$，$\{\underline{u}_i\}_{i=1}^{\infty}$，$\{\bar v_i\}_{i=1}^{\infty}$，$\{\underline{v}_i\}_{i=1}^{\infty}$ 满足

$$\begin{cases} 0 < \underline{u}_1 \le \cdots \le \underline{u}_i \le \underline{u}_{i+1} \le \cdots \le \bar u_{i+1} \le \bar u_i \le \cdots \le \bar u_1, \\ 0 < \underline{v}_1 \le \cdots \le \underline{v}_i \le \underline{v}_{i+1} \le \cdots \le \bar v_{i+1} \le \bar v_i \le \cdots \le \bar v_1. \end{cases}$$

2) 收敛性：定义 $\bar u_\infty = \lim_{i\to\infty} \bar u_i$，$\underline{u}_\infty = \lim_{i\to\infty}\underline{u}_i$，$\bar v_\infty = \lim_{i\to\infty}\bar v_i$，$\underline{v}_\infty = \lim_{i\to\infty}\underline{v}_i$ 满足

$$\begin{cases} \bar a \bar u_\infty - \bar u_\infty^2 - \dfrac{b\bar u_\infty \underline{v}_\infty}{m+r\bar u_\infty} = 0, \\ \underline{a}\underline{u}_\infty - \underline{u}_\infty^2 - \dfrac{b\underline{u}_\infty \bar v_\infty}{m+r\underline{u}_\infty} = 0, \\ b\bar v_\infty - \dfrac{b\bar v_\infty^2}{r\bar u_\infty} = 0, \\ b\underline{v}_\infty - \dfrac{b\underline{v}_\infty^2}{r\underline{u}_\infty} = 0. \end{cases} \tag{4.3}$$

证明 (1)根据定理 1 (3.1)式以及迭代序列(4.2)可得

$$\begin{cases} \underline{u}_1 \le \underline{u}_2 \le \bar{u}_2 \le \bar{u}_1, \\ \underline{v}_1 \le \underline{v}_2 \le \bar{v}_2 \le \bar{v}_1. \end{cases} \tag{4.4}$$

$$\begin{cases} a\bar{u}_1 - \bar{u}_1^2 - \dfrac{b\bar{u}_1\underline{v}_1}{m + r\bar{u}_1} \le 0, \\ a\underline{u}_1 - \underline{u}_1^2 - \dfrac{b\underline{u}_\infty\bar{v}_1}{m + r\underline{u}_1} \ge 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} b\bar{v}_1 - \dfrac{b\bar{v}_1^2}{r\bar{u}_1} \le 0 \\ b\underline{v}_1 - \dfrac{b\underline{v}_1^2}{r\underline{u}_1} \ge 0 \end{cases}$$

根据(3.3)式有 $\underline{c} \le \bar{c}$，结合迭代序列(4.1)

利用数学归纳法

当 $i = 1$ 时

$$\bar{u}_2 - \underline{u}_2 \ge \bar{u}_1 - \underline{u}_1 + \frac{1}{T}\left(a\bar{u}_1 - \bar{u}_1^2 - \frac{b\bar{u}_1\underline{v}_1}{m + r\bar{u}_1}\right) - \frac{1}{T}\left(a\underline{u}_1 - \underline{u}_1^2 - \frac{b\underline{u}_1\bar{v}_1}{m + r\underline{u}_1}\right) \ge 0$$

同理有 $\bar{v}_2 - \underline{v}_2$，因此(4.4)式是成立的。

假设 $i = N$ 时也成立，当 $i = N + 1$ 时有

$$\bar{u}_{N+1} - \underline{u}_{N+1} \ge \bar{u}_N - \underline{u}_N + \frac{1}{T}\left(a\bar{u}_N - \bar{u}_N^2 - \frac{b\bar{u}_N\underline{v}_N}{m + r\bar{u}_N}\right) - \frac{1}{T}\left(a\underline{u}_N - \underline{u}_N^2 - \frac{b\underline{u}_N\bar{v}_N}{m + r\underline{u}_N}\right) \ge 0$$

$$\bar{u}_{N+1} - \bar{u}_N \le \bar{u}_N - \bar{u}_{N-1} + \frac{1}{T}\left(a\bar{u}_N - \bar{u}_N^2 - \frac{b\bar{u}_N\underline{v}_{N-1}}{m + r\bar{u}_N}\right) - \frac{1}{T}\left(a\bar{u}_{N-1} - \bar{u}_{N-1}^2 - \frac{b\bar{u}_{N-1}\underline{v}_{N-1}}{m + r\bar{u}_{N-1}}\right) \le 0$$

成立。同样可以得到：

$$\underline{u}_{i+1} \ge \underline{u}_i\text{，}\ \underline{v}_{i+1} \ge \underline{v}_i\text{，}\ \bar{v}_{i+1} \ge \bar{v}_{i+1}\text{，}\ \bar{v}_{i+1} \le \bar{v}_i.$$

单调性证明完毕。

(2)在证明(1)中的公式已经表明序列 $\{\bar{u}_i\}_{i=1}^{\infty}$，$\{\underline{u}_i\}_{i=1}^{\infty}$，$\{\bar{v}_i\}_{i=1}^{\infty}$，$\{\underline{v}_i\}_{i=1}^{\infty}$ 是分别收敛于某个常数的，因此收敛性也得到了证明。

本节得出了问题(1.1)正稳态解的下界，通过迭代过程，得到了问题(1.1)正稳态解的更精确估计。

5. 异质环境下扩散 Holling-Tanner 模型正稳态解的全局稳定性

对于资源分布均匀的捕食－食饵系统，可以采用上下解方法或者构造李雅普诺夫函数来说明正稳态解的全局稳定性[5] [6] [7] [8] [9]，然而，这并不适用于环境异质的情况。本文采用一种新的李亚普诺夫函数形式：$F(t) = \int_\Omega \omega_*(x) V(u_i(x,t)) \mathrm{d}x$，其中 $\omega_i(x)$ 是权函数。此函数对探索更一般的非同质环境下的扩散捕食－食饵模型[10] [11]也是一种有力的工具。这种李雅普诺夫函数也被用于研究扩散 SIR 传染病模型[12]。对于模型(1.1)，构造如下收敛的李雅普诺夫函数：

$$E(t) := \int_\Omega \int_{u_*(x)}^{u(x,t)} \frac{u_*(x)}{d_1(x)} \frac{s - u_*(x)}{s} \mathrm{d}s\mathrm{d}x + \xi \int_\Omega \int_{v_*(x)}^{v(x,t)} \frac{v_*(x)}{d_2(x)} \frac{s - v_*(x)}{s} \mathrm{d}s\mathrm{d}x$$

定理 3 假设在 $\bar{\Omega}$ 上，对任意 $0<\alpha<1$， $a(x)>0, d_i(x)>0$，我们定义

$$\overline{d_i}=\max_{x\in\bar{\Omega}} d_i(x)，\ \underline{d_i}=\min_{x\in\bar{\Omega}} d_i(x).$$

若

$$\xi=\sqrt{\frac{\underline{d_2}\,\overline{d_2}\left(\underline{u}_\infty-\varepsilon\right)\left(\overline{u}_\infty-\varepsilon\right)\underline{u}_\infty^3\overline{u}_\infty}{\underline{d_1}\,\overline{d_1}\,\underline{v}_\infty\overline{v}_\infty^3}\frac{1}{m+r\left(\underline{u}_\infty-\varepsilon\right)}}$$

那么方程(1.1)有一个唯一的正稳态解 (u_*,v_*)，且正稳态解 (u_*,v_*) 是全局稳定的。其中 $\lim\limits_{t\to\infty}u(x,t)=u_*(x)$，$\lim\limits_{t\to\infty}v(x,t)=v_*(x)$。

证明 设 $\left(u(x,t),v(x,t)\right)$ 是方程(1.1)的解，定义一个函数

$$E(t):=\int_\Omega\int_{u_*(x)}^{u(x,t)}\frac{u_*(x)}{d_1(x)}\frac{s-u_*(x)}{s}\mathrm{d}s\mathrm{d}x+\xi\int_\Omega\int_{v_*(x)}^{v(x,t)}\frac{v_*(x)}{d_2(x)}\frac{s-v_*(x)}{s}\mathrm{d}s\mathrm{d}x$$

其中 $\xi>0$，且当 $t\ge 0$ 时 $E(t)\ge 0$，根据格林公式

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}E(t)}{\mathrm{d}t}&=\int_\Omega\frac{u_*(u-u_*)}{d_1u}u_t\mathrm{d}x+\xi\int_\Omega\frac{v_*(v-v_*)}{d_1v}v_t\mathrm{d}x\\
&=\int_\Omega\frac{u_*(u-u_*)}{d_1u}\left(d_1\Delta u+f\left(a(x),u,v\right)-\frac{u}{u_*}d_1\Delta u_*-\frac{u}{u_*}f\left(a(x),u_*,v_*\right)\right)\mathrm{d}x\\
&\quad+\xi\int_\Omega\frac{v_*(v-v_*)}{d_2v}\left(d_2\Delta v+g(u,v)-\frac{v}{v_*}d_2\Delta v_*-\frac{v}{v_*}g(u_*,v_*)\right)\mathrm{d}x\\
&=\int_\Omega\left[\frac{u_*(u-u_*)}{u}\left(\Delta u-\frac{u}{u_*}\Delta u_*\right)+\frac{u_*(u-u_*)}{d_1}\left(\frac{f\left(a(x),u,v\right)}{u}-\frac{f\left(a(x),u_*,v_*\right)}{u_*}\right)\right]\mathrm{d}x\\
&\quad+\xi\int_\Omega\left[\frac{v_*(v-v_*)}{v}\left(\Delta v-\frac{v}{v_*}\Delta v_*\right)+\frac{v_*(v-v_*)}{d_2}\left(\frac{g(u,v)}{v}-\frac{g(u_*,v_*)}{v_*}\right)\right]\mathrm{d}x\\
&\le\int_\Omega\frac{u_*(u-u_*)}{d_1}\left(\frac{f\left(a(x),u,v\right)}{u}-\frac{f\left(a(x),u_*,v_*\right)}{u_*}\right)\mathrm{d}x\\
&\quad+\xi\int_\Omega\frac{v_*(v-v_*)}{d_2}\left(\frac{g(u,v)}{v}-\frac{g(u_*,v_*)}{v_*}\right)\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

其中 $f\left(a(x),u,v\right):=a(x)u-u^2-\dfrac{buv}{m+ru}$， $g(u,v):=bv-\dfrac{bv^2}{\gamma u}$。

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}E(t)}{\mathrm{d}t}&\le\int_\Omega\frac{u_*(u-u_*)}{d_1}\left(-u-\frac{bv}{m+ru}+u_*+\frac{bv_*}{m+ru_*}\right)\mathrm{d}x\\
&\quad+\xi\int_\Omega\frac{v_*(v-v_*)}{d_2}b\left(-\frac{v}{\gamma u}+\frac{v}{\gamma u_*}\right)\mathrm{d}x\\
&=\int_\Omega\frac{J_1(u-u_*)^2+J_2(u-u_*)(v-v_*)+J_3(v-v_*)^2}{d_1d_2\gamma uu_*(m+ru)(m+ru_*)}\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

其中

$$J_1:=-d_2\gamma uu_*^2\left[(m+ru)(m+ru_*)-brv_*\right],$$

$$J_2 := -bd_2\gamma uu_*^2\left(m+ru_*\right)+d_1\xi bv_*^2\left(m+ru\right)\left(m+ru_*\right),$$

$$J_3 := -d_1\xi bu_*v_*\left(m+ru\right)\left(m+ru_*\right),$$

当 $\xi=\sqrt{\frac{d_2\overline{d_2}\left(\underline{u}_\infty-\varepsilon\right)\left(\overline{u}_\infty-\varepsilon\right)\underline{u}_\infty^3\overline{u}_\infty}{\underline{d_1}\overline{d_1}\underline{v}_\infty\overline{v}_\infty^3}}\frac{1}{m+r\left(\underline{u}_\infty-\varepsilon\right)}$ 时，存在 $0<\delta\le 1$，使得 $B^2<4AC$，有

$$\frac{\mathrm{d}E(t)}{\mathrm{d}t}\le -\int_\Omega \frac{\delta\left(u-u_*\right)^2+\delta\left(v-v_*\right)^2}{d_1d_2\gamma uu_*\left(m+ru\right)\left(m+ru_*\right)}\mathrm{d}x=:\psi(t)\le 0$$

根据(3.2)式，存在 $G_1>0$，使得 $\left|\psi(t)\right|<G_1$。利用引理 2 有：

$$\lim_{t\to\infty}\psi(t)=-\int_\Omega \frac{\delta\left(u-u_*\right)^2+\delta\left(v-v_*\right)^2}{d_1d_2\gamma uu_*\left(m+ru\right)\left(m+ru_*\right)}\mathrm{d}x=0$$

由(3.1)式，存在 $t\ge T_1$，有 $0<\varepsilon_2\le u(x,t)$，得到

$$\lim_{t\to\infty}u(x,t)=u_*(x),\ \lim_{t\to\infty}v(x,t)=v_*(x). \tag{5.1}$$

同时，(3.2)式也表明集合 $\{u(\cdot,t):t\ge 1\}$ 在 $C^2(\bar{\Omega})$ 上是相对紧凑的，可以假设

$$\left\|u(x,t_p)-\tilde{u}(x)\right\|_{C^2(\bar{\Omega})},\quad \left\|v(x,t_p)-\tilde{v}(x)\right\|_{C^2(\bar{\Omega})}\to 0,\quad t_p\to\infty$$

可以得出，在 $\bar{\Omega}$ 上有

$$\tilde{u}(x)\equiv u_*(x),\ \tilde{v}(x)\equiv v_*(x).$$

因此，$\lim_{t\to\infty}u(x,t)=u_*(x)$，$\lim_{t\to\infty}v(x,t)=v_*(x)$ 在 $C^2(\bar{\Omega})$ 上一致成立，那么正稳态解 (u_*,v_*) 是全局稳定的，证毕。

6. 结束语

针对 Holling-Tanner 捕食－食饵模型，本文研究了资源空间分散和资源分布不均对种群的影响。本文首先利用抛物方程的比较定理和上下解方法证明了方程(1.1)正稳态解的存在性，进一步通过迭代过程，得出了问题(1.1)正稳态解的下界。最后利用新构造的李雅普诺夫函数，得到 Holling-Tanner 捕食－食饵模型在异质环境下的正稳态解是全局稳定的。

基金项目

国家自然科学基金青年项目(52004215)；陕西省自然科学基金青年项目(2019JQ-755)；陕西省教育厅基金(19JK0462)。

参考文献

[1] 黄灿云, 梁弘杨, 孟新友. 带有 Lévy 跳的随机捕食-食饵系统动力学行为[J]. 兰州理工大学学报, 2020, 46(1): 152-157.

[2] Chen, S. and Shi, J. (2012) Global Stability in a Diffusive Holling-Tanner Predator-Prey Model. *Applied Mathematics Letters*, **25**, 614-618. https://doi.org/10.1016/j.aml.2011.09.070

[3] Qi, Y. and Zhu, Y. (2016) The Study of Global Stability of a Diffusive Holling-Tanner Predator-Prey Model. *Applied Mathematics Letters*, **57**, 132-138. https://doi.org/10.1016/j.aml.2016.01.017

[4] 王明新. 非线性抛物型方程[M]. 北京: 科学出版社, 1993: 199-200.

[5] Wang, M. (2018) Note on the Lyapunov Functional Method. *Applied Mathematics Letters*, **75**, 102-107.

https://doi.org/10.1016/j.aml.2017.07.003

[6] Ni, W., Shi, J. and Wang, M. (2020) Global Stability of Nonhomogeneous Equilibrium Solution for the diffusive Lotka-Volterra Competition Model. *Calculus of Variations and Partial Differential Equations*, **59**, 132. https://doi.org/10.1007/s00526-020-01794-6

[7] Peng, R. and Wang, M. (2006) Global Stability of the Equilibrium of a Diffusive Holling-Tanner Prey-Predator Model. *Applied Mathematics Letters*, **20**, 664-670. https://doi.org/10.1016/j.aml.2006.08.020

[8] He, X. and Ni, W.M. (2017) Global Dynamics of the Lotka-Volterra Competition-Diffusion System with Equal Amount of Total Resources, III. *Calculus of Variations and Partial Differential Equations*, **56**, 132. https://doi.org/10.1007/s00526-017-1234-5

[9] Wang, M. (2016) A Diffusive Logistic Equation with a Free Boundary and Sign-Changing Coefficient in Time-Periodic Environment. *Journal of Functional Analysis*, **270**, 483-508. https://doi.org/10.1016/j.jfa.2015.10.014

[10] Du, Y. and Hsu, S.B. (2004) A Diffusive Predator-Prey Model in Heterogeneous Environment. *Journal of Differential Equations*, **203**, 331-364. https://doi.org/10.1016/j.jde.2004.05.010

[11] Du, Y. and Shi, J. (2007) Allee Effect and Bistability in a Spatially Heterogeneous Predator-Prey Model. *Transactions of the American Mathematical Society*, **359**, 4557-4593. https://doi.org/10.1090/S0002-9947-07-04262-6

[12] Kuniya, T. and Wang, J. (2017) Lyapunov Functions and Global Stability for a Spatially Diffusive SIR Epidemic Model. *Applicable Analysis*, **96**, 1935-1960. https://doi.org/10.1080/00036811.2016.1199796