Pure Mathematics 理论数学, 2022, 12(3), 400-410
Published Online March 2022 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2022.123044

一类带有对数非线性项的拟线性椭圆方程解的存在性及多重性

刘晓莉

上海理工大学，上海

收稿日期：2022年2月11日；录用日期：2022年3月14日；发布日期：2022年3月21日

摘　要

本文讨论一类带有对数非线性项的拟线性椭圆方程解的存在性和多重性。对主项系数 $A(x,t)$ 提出合适的条件，使用弱下半连续泛函的非光滑临界点定理证明该问题存在山路解和无穷多非平凡解。

关键词

拟线性，弱下半连续，非光滑

Existence and Multiplicity of Solutions for a Class of Quasilinear Elliptic Equations with Logarithmic Nonlinearity

Xiaoli Liu

University of Shanghai for Science and Technology, Shanghai

Received: Feb. 11th, 2022; accepted: Mar. 14th, 2022; published: Mar. 21st, 2022

Abstract

In this paper, we consider the existence and multiplicity of solutions of a class of quasilinear elliptic equations with logarithmic nonlinearity. Under some appropriate conditions for the principal coefficient $A(x,t)$, we use the nonsmooth critical point theorem of weak lower semicontinuous functional to prove the problem has mountain path solutions and infinite nontrivial solutions.

文章引用: 刘晓莉. 一类带有对数非线性项的拟线性椭圆方程解的存在性及多重性[J]. 理论数学, 2022, 12(3): 400-410.
DOI: 10.12677/pm.2022.123044

Keywords

Quasilinear, Weak Lower Semicontinuous, Nonsmooth

1. 引言

本文考虑如下拟线性椭圆方程弱解的存在性与多重性

$$\begin{cases} -\mathrm{div}\left(A(x,u)\nabla u\right)+\dfrac{1}{2}A_s(x,u)|\nabla u|^2=u\log u^2, \text{in } \Omega, \\ u=0, \text{on } \partial\Omega, \end{cases} \tag{1.1}$$

其中 $\Omega\subset\mathbb{R}^N$ 是一个具有光滑边界的有界区域，$N\geq 2$，且 $A(x,s)$ 满足以下条件：

(A_0) $A(x,s)$ 是 C^1 的 Carathéodory 函数，即

$A(\cdot,s):x\in\Omega\mapsto A(x,s)\in\mathbb{R}$ 对于所有 $s\in\mathbb{R}$ 是可测的，

$A(x,\cdot):s\in\mathbb{R}\mapsto A(x,s)\in\mathbb{R}$ 对几乎处处的 $x\in\Omega$ 是 C^1 的；

(A_1) 存在正常数 $\alpha_0\leq\alpha_1$，使得 $\alpha_0\leq A(x,s)\leq\alpha_1$，a.e. $x\in\Omega$，对所有 $s\in\mathbb{R}$；

(A_2) $\sup\limits_{s\in\mathbb{R}}A_s(\cdot,s)\in L^\infty(\Omega)$；

(A_3) $-A_s(x,s)s\geq 0$ a.e. $x\in\Omega$，对所有 $s\in\mathbb{R}$；

(A_4) 存在正常数 $\alpha_2<\alpha_1$，使得 $A(x,s)+\dfrac{1}{2}A_s(x,s)s\geq\alpha_2$，a.e. $x\in\Omega$，对所有 $s\in\mathbb{R}$；

(A_5) $A(x,s)=A(x,|s|)$，a.e. $x\in\Omega$，对所有 $s\in\mathbb{R}$。

问题(1.1)对应的能量泛函为

$$\mathcal{J}(u)=\frac{1}{2}\int_\Omega A(x,u)|\nabla u|^2\,\mathrm{d}x+\frac{1}{2}\int_\Omega u^2\,\mathrm{d}x-\frac{1}{2}\int_\Omega u^2\log u^2\,\mathrm{d}x.$$

记 $\mathcal{J}_1(u)=\dfrac{1}{2}\int_\Omega A(x,u)|\nabla u|^2\,\mathrm{d}x$，$g(u)=u\log u^2$，$G(u)=\int_\Omega g(u)\mathrm{d}x$，$\mathcal{J}_2(u)=\int_\Omega G(u)\mathrm{d}x$，则 $\mathcal{J}(u)=\mathcal{J}_1(u)-\mathcal{J}_2(u)$。

近年来，一些学者通过使用合适的变分方法研究如下类型的问题

$$-\mathrm{div}\left(A(x,u)|\nabla u|^{p-2}\nabla u\right)+\frac{1}{2}A_s(x,u)u|\nabla u|^p=g(x,u), p\geq 2. \tag{1.2}$$

在[1] [2]中 Candela，Palmieri 和 Salvatore 在 Ω 为有界区域时考虑问题(1.2)，非线性项 $g(x,t)$ 关于 t 满足合适的增长条件，在 $W_0^{1,p}(\Omega)\cap L^\infty(\Omega)$ 上利用弱形式的山路引理和对称山路定理，得到解的存在性和多重性。进一步，Candela 和 Salvatore 在[3]中证明了当 Ω 是无界区域时，问题(1.2)径向解的存在性。

而带有对数非线性项的 Schrödinger 方程

$$-\Delta u+V(x)u=Q(x)u\log u^2,\ x\in\Omega, \tag{1.3}$$

也引起了很多学者的兴趣。Squassina，Szulkin 在[4]中借助次微分的相关概念和非光滑临界点理论证明了

当 V 和 Q 是 1-周期函数，且 $Q\in C^1\left(\mathbb{R}^N\right)$，$\min\limits_{x\in\mathbb{R}^N} V>0$，$\min\limits_{x\in\mathbb{R}^N}(V+Q)>0$ 时，问题(1.3)解的多重性。Ji 和 Szulkin 在此基础上又证明了当 $Q=1$ 的情形下，V 是强制位势时，解的多重性，以及 V 是有界位势时，基态解的存在性，见[5]。此外，当 $Q=1$ 时，V 满足合适的条件下，问题(1.3)解的集中行为也有研究成果，见[6] [7]。

受到上述成果的启发，本文对 $A(x,s)$ 提出条件(A_0)~(A_5)，此时 $\mathcal{J}_1$ 在空间 $H_0^1(\Omega)$ 上不是 C^1 的。由[8]知，由于 $|g(u)|\le C_1\left(1+|u|^{\delta}\right)$，$\delta\in\left(1,2^*-1\right)$，$C_1>0$，故对 $u\in H^1(\Omega)$，$\int_\Omega G(u)\mathrm{d}x$ 关于 u 是 C^1 的。

注 1.1 由(A_1)、(A_3)和(A_4)可得

$$0\ge A_s(x,s)s\ge 2(\alpha_2-\alpha_1),\ \text{a.e } x\in\Omega,\ \ s\in\mathbb{R}.$$

即 $A_s(x,s)s$ 是一个负的有界函数。

注 1.2 [9]对数 sobolev 不等式

$$\int_{\mathbb{R}^N} u^2\log u^2\mathrm{d}x\le\frac{a^2}{\pi}|\nabla u|_2^2+\left(\log|u|_2^2-N(1+\log a)\right)|u|_2^2,\ u\in H^1\left(\mathbb{R}^N\right),a>0. \tag{1.4}$$

需要指出的是，在本文设定的条件下，$\mathcal{J}$ 非光滑，且本文的非线性项并不能满足之前很多文献对于非线性项的要求，比如 AR 条件。为了研究(1.1)解的存在性，本文将借助[10] [11] [12]中针对弱下半连续泛函的非光滑临界点理论，证明 $\mathcal{J}$ 在空间 $H_0^1(\Omega)$ 上是弱下半连续的，且满足弱梯度意义下的$(PS)_c$ 条件。

本文的结果如下。

定理 1.1 设 $N\ge 2$，$A(x,s)$ 满足(A_0)~(A_4)，则问题(1.1)存在一个山路解。

定理 1.2 设 $N\ge 2$，$A(x,s)$ 满足(A_0)~(A_5)，则问题(1.1)有一列解 $\{u_k\}\subset H_0^1(\Omega)$，且当 $k\to\infty$，$\mathcal{J}(u_k)\to+\infty$。

2. 预备知识

设 X 是 Banach 空间，f 是 X 上的泛函，定义

$$\operatorname{epi}(f)=\{(x,\lambda)\in X\times\mathbb{R}\mid f(x)\le\lambda\}, \tag{2.1}$$

并赋予范数 $\|\cdot\|_E=\left(\|\cdot\|_X^2+|\cdot|^2\right)^{\frac{1}{2}}$，用 $B_\delta(x)$ 表示以 x 为球心、δ 为半径的开球，用 $B_\delta(x,\lambda)$ 表示以 (x,λ) 为球心、δ 为半径的开球。

定义 2.1 [10] 设 f 是 X 上的泛函，$x\in X$，若存在 $\delta>0$ 和连续映射 $\mathcal{H}$：$\left(B_\delta(x,f(x))\cap\operatorname{epi}(f)\right)\times[0,\delta]\mapsto X$，使得当 $(\xi,\mu)\in B_\delta(x,f(x))\cap\operatorname{epi}(f)$ 和 $t\in[0,\delta]$ 时，有

$$d\left(\mathcal{H}((\xi,\mu),t),\xi\right)\le t,\ \ f\left(\mathcal{H}((\xi,\mu),t)\right)\le\mu-\sigma t\ \ (\sigma>0), \tag{2.2}$$

则将 σ 的上确界称为 f 在 x 处的弱梯度，并记作 $|df|(x)$。

定义 2.2 [10] 设 f 是 X 上的连续泛函，$x\in X$，若存在 $\delta>0$ 和连续映射 $\mathcal{H}$：$B_\delta(x)\times[0,\delta]\mapsto X$，使得当 $w\in B_\delta(x)$ 和 $t\in[0,\delta]$ 时，有

$$\|\mathcal{H}(w,t)-w\|_X\le t,\ \ f\left(\mathcal{H}(w,t)\right)\le f(w)-\sigma t\ \ (\sigma>0), \tag{2.3}$$

则将 σ 的上确界称为 f 在 x 处的弱梯度，并记作 $|df|(x)$。

注 2.1 [10] 定义连续函数 $\mathcal{G}_f:\operatorname{epi}(f)\mapsto\mathbb{R}$，$\mathcal{G}_f(x,\lambda)=\lambda$，显然，$\mathcal{G}_f$ 是 1-Lipschtiz 连续的。对于任意 $(x,\lambda)\in\operatorname{epi}(f)$，$|d\mathcal{G}_f|(x,\lambda)\le 1$，且 $|df|(x)$ 与 $|d\mathcal{G}_f|(x,f(x))$ 的关系如下

$$|df|(x)=\begin{cases}\dfrac{|d\mathcal{G}_f|(x,f(x))}{\sqrt{1-\left(|d\mathcal{G}_f|(x,f(x))\right)^2}}, & \text{if } |d\mathcal{G}_f|(x,f(x))<1,\\ +\infty, & \text{if } |d\mathcal{G}_f|(x,f(x))=1.\end{cases}$$

定义 2.3 [9] 对 $c\in\mathbb{R}$，若序列 $\{u_k\}\subset X$ 满足：当 $k\to\infty$ 时，$f(u_k)\to c$，且 $|df|(u_k)\to 0$。则称 $\{u_k\}$ 是 f 的(PS)$_c$ 序列；若 f 的每一个(PS)$_c$ 序列都有强收敛子列，则称泛函 f 满足(PS)$_c$ 条件；若 $x\in X$，$f(x)\in\mathbb{R}$，且 $|df|(x)=0$，则称 x 是 f 的临界点。

注 2.2 [9] 设 f 是 X 上的偶泛函，$f(0)\in\mathbb{R}$，对 $\lambda\ge f(0)$，若存在 $\delta>0$ 和连续映射 $\mathcal{H}=(\mathcal{H}_1,\mathcal{H}_2)$：$(B_\delta(0,\lambda)\cap\mathrm{epi}(f))\times[0,\delta]\mapsto\mathrm{epi}(f)$，使得当 $w(,\mu)\in B_\delta(0,\lambda)\cap\mathrm{epi}(f)$ 和 $t\in[0,\delta]$ 时，有

$$\left\|\mathcal{H}((w,\mu),t)-(w,\mu)\right\|_{X\times\mathbb{R}}\le t,$$

$$\mathcal{H}_2((w,\mu),t)\le\mu-\sigma t,\ (\sigma>0),$$

$$\mathcal{H}_1((-w,\mu),t)=-\mathcal{H}_1((w,\mu),t),$$

则将 σ 的上确界记为 $|d_{\mathbb{Z}_2}\mathcal{G}_f|(0,\lambda)$。

定理 2.1 [12] 设 $(x,\lambda)\in\mathrm{epi}(f)$，若对于给定 $\rho>0$，都存在 $\delta>0$ 和连续映射

$$\mathcal{H}:\{w\in B_\delta(x):f(w)<\lambda+\delta\}\times[0,\delta]\to X,$$

满足当 $w\in B_\delta(x)$，$f(w)<\lambda+\delta$ 和 $t\in[0,\delta]$ 时，成立

$$d(\mathcal{H}(w,t),w)\le\rho t,\ f(\mathcal{H}(w,t))\le(1-t)f(w)+t(f(w)+\rho).$$

则 $|d\mathcal{G}_f|(x,\lambda)=1$。进一步，如果 f 是 X 上的偶泛函，且 $\mathcal{H}(-w,t)=-\mathcal{H}(w,t)$，则 $|d_{\mathbb{Z}_2}\mathcal{G}_f|(0,\lambda)=1$。

定理 2.2 [12] 设 X 是 Banach 空间，f 是 X 上的弱下半连续泛函，满足如下条件：

1) 存在 $e\in X$，$\eta>0$，$r_0>0$，成立

对 $\forall x$，当 $\|x\|=r_0$ 时，$f(x)>\eta$；$\|e\|>r_0$ 且 $f(e)<\eta$，

2) f 满足(epi)$_c$ 条件。

记集合 $\Gamma=\{\gamma:[0,1]\to X\mid\gamma\text{是奇映射,且}\gamma(0)=0,\gamma(1)=e\}$，$c=\inf\limits_{\Gamma}\sup\limits_{[0,1]}f(\gamma(t))<+\infty$。则 f 满足(PS)$_c$ 条件，且存在临界点 x，$f(x)=c$。

定理 2.3 [12] 设 X 是 Banach 空间，f 是 X 上的弱下半连续偶泛函，$f(0)=0$。若下列条件成立：

1) 存在正常数 r、β，存在 X 的有限余维子空间 W，使得当 $x\in W$，$\|x\|_X=r$ 时，$f(x)\ge\beta$；

2) 对于 X 的每个有限维子空间 V，都存在 $R>0$，使得当 $x\in V$，且 $\|x\|_X\ge R$ 时，$f(x)\le 0$；

3) 当 $c\ge\beta$ 时，f 满足(PS)$_c$ 条件和(epi)$_c$ 条件；

4) 当 $\lambda>0$ 时，$|d_{\mathbb{Z}_2}\mathcal{G}_f|(0,\lambda)\ne 0$；

则泛函 f 存在一列临界点 $\{x_k\}$，当 $k\to\infty$ 时，有 $f(x_k)\to+\infty$。

本文的工作空间为 $H_0^1(\Omega)$，定义范数 $\|u\|=\left(\int_\Omega|\nabla u|^2\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}$。$L^p(\Omega)$ 是标准 L^p 空间，并定义其范数为 $|u|_p=\left(\int_\Omega|u|^p\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}$，由 sobelev 嵌入定理可得，$H^1(\Omega)\rightarrowtail L^p(\Omega)$（连续嵌入），$p\in[2,2^*]$，且有 $H_0^1(\Omega)\rightarrowtail\rightarrowtail L^p(\Omega)$（紧嵌入），$p\in(2,2^*)$。

3. 解的存在性

引理 3.1 假设(A_0)~(A_1)成立，则泛函 $\mathcal{J}$ 是弱下半连续的。

证 设 $u\in\Omega$，$\{u_k\}\subset H_0^1(\Omega)$，且 $u_k\rightharpoonup u$ 在 $H_0^1(\Omega)$ 上，故 $u_k\to u$ 在 $L^p(\Omega)$ 上，$p\in\left[2,2^*\right]$。首先对 $\mathcal{J}_1$ 进行分析

$$\begin{aligned}&\int_\Omega A(x,u_k)|\nabla u_k|^2\,\mathrm{d}x-\int_\Omega A(x,u)|\nabla u|^2\,\mathrm{d}x\\&=\int_\Omega\big(A(x,u_k)-A(x,u)\big)|\nabla u_k|^2\,\mathrm{d}x+\int_\Omega A(x,u)\left(|\nabla u_k|^2-|\nabla u|^2\right)\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

由(A_1)，利用 Lebesgue 控制收敛定理和强收敛，易证 $\mathcal{J}_1(u_k)\to\mathcal{J}_1(u)$。

记 $H_1(s)=\left(s^2\log s^2\right)^+$，$H_2(s)=\left(s^2\log s^2\right)^-$。显然当 $|s|\le 1$ 时，$H_1(s)=0$，当 $|s|\ge 1$ 时，$H_2(s)=0$，且当 $|s|\ge 1$ 时，有 $|H(s)|\le C_\delta|s|^{2+\delta}$，$\delta\in\left(0,2^*-2\right)$，故对所有 $s\in\mathbb{R}$，都有 $|H_1(s)|\le C_\delta|s|^{2+\delta}$，因此

$$\lim_{k\to\infty}\int_\Omega H_1(u_k)\,\mathrm{d}x=\int_\Omega H_1(u)\,\mathrm{d}x.$$

由 Fatou 引理可得

$$\varliminf_{k\to\infty}\int_\Omega H_2(u_k)\,\mathrm{d}x\ge\int_\Omega H_2(u)\,\mathrm{d}x,$$

故

$$\begin{aligned}\varliminf_{k\to\infty}\left(-\mathcal{J}_2(u_k)\right)&=\frac{1}{2}\varliminf_{k\to\infty}\int_\Omega H_2(u_k)\,\mathrm{d}x-\frac{1}{2}\int_\Omega H_1(u_k)\,\mathrm{d}x+\frac{1}{2}\int_\Omega u_k^2\,\mathrm{d}x\\&\ge\frac{1}{2}\int_\Omega H_2(u)\,\mathrm{d}x-\frac{1}{2}\int_\Omega H_1(u)\,\mathrm{d}x+\frac{1}{2}\int_\Omega u^2\,\mathrm{d}x\\&=-\mathcal{J}_2(u).\end{aligned}$$

综上可得 $\mathcal{J}$ 是弱下半连续的。

当 $v\in L^\infty(\Omega)\cap H_0^1(\Omega)$ 时，由于 $\mathcal{J}_2$ 是 C^1 的，故 $\int_\Omega|g(u)v|\,\mathrm{d}x<+\infty$，且根据$(A_1)$、$(A_2)$，成立

$$\int_\Omega A(x,u)\nabla u\nabla v\,\mathrm{d}x+\frac{1}{2}\int_\Omega A_s(x,u)|\nabla u|^2\,v\,\mathrm{d}x<+\infty.$$

考虑泛函 $\mathcal{J}$ 沿着 $v\in L^\infty(\Omega)\cap H_0^1(\Omega)$ 的方向导数：

$$\left\langle\mathcal{J}'(u),v\right\rangle=\int_\Omega A(x,u)\nabla u\nabla v\,\mathrm{d}x+\frac{1}{2}\int_\Omega A_s(x,u)|\nabla u|^2\,v\,\mathrm{d}x-\int_\Omega uv\log u^2\,\mathrm{d}x.$$

并记 $\mathcal{J}_1'(u)=A(x,u)\nabla u+\frac{1}{2}A_s(x,u)|\nabla u|^2$，$\mathcal{J}_2'(u)=u\log u^2$。

引理 3.2 假设(A_0)~(A_4)成立，设 $u\in H_0^1(\Omega)$，$\mathcal{J}_1(u)\in\mathbb{R}$，则有

$$\left|\left\langle\mathcal{J}_1'(u),u\right\rangle\right|\le|d\mathcal{J}_1|(u)\|u\|.$$

证 如果 $u\in H_0^1(\Omega)$，使得 $|d\mathcal{J}_1|(u)=+\infty$，或 $A(x,u)\nabla u\nabla u+\frac{1}{2}A_s(x,u)|\nabla u|^2\,u\le 0$，则结论自然成立，下面考虑当 $|d\mathcal{J}_1|(u)=+\infty$。对 $m\ge 1$，令

$$T_m(s)=\begin{cases}s, & \text{if } |s|\le m,\\ m\dfrac{s}{|s|}, & \text{if } |s|>m.\end{cases}\tag{3.1}$$

反证，若引理结论不成立，那么存在 σ，使得 $\sigma>|d\mathcal{J}_1|$ 成立

$$\int_\Omega A(x,u)\nabla u\nabla T_m(u)\mathrm{d}x+\frac{1}{2}\int_\Omega A_s(x,u)|\nabla u|^2 T_m(u)\mathrm{d}x>\sigma\|T_m(u)\|. \tag{3.2}$$

给定 $\epsilon>0$，首先证明存在 $\delta>0$，当 $w\in H^1(\Omega)$，且 $\|w-u\|<\delta$ 时，成立

$$\|T_m(w)\|\le(1+\epsilon)\|T_m(u)\|, \tag{3.3}$$

$$\int_\Omega A(x,w)\nabla u\nabla T_m(w)\mathrm{d}x+\frac{1}{2}\int_\Omega A_s(x,w)|\nabla u|^2 T_m(w)\mathrm{d}x>\sigma\|T_m(u)\|. \tag{3.4}$$

设 $w_k\in H_0^1(\Omega)$， $w_k\to u$ in $H_0^1(\Omega)$。由(A_1)和注记 1.1，成立

$$\begin{aligned}&\lim_{k\to\infty}\int_\Omega A(x,w_k)\nabla w_k\nabla T_m(w_k)\mathrm{d}x+\frac{1}{2}\int_\Omega A_s(x,w_k)|\nabla w_k|^2 T_m(w_k)\mathrm{d}x\\&=\int_\Omega A(x,u)\nabla u\nabla T_m(u)\mathrm{d}x+\frac{1}{2}\int_\Omega A_s(x,u)|\nabla u|^2 T_m(u)\mathrm{d}x\\&>\sigma\|T_m(u)\|.\end{aligned}$$

故(3.3)和(3.4)成立。

定义连续函数

$$\mathcal{H}:B_\delta(u)\times[0,\delta]\to H_0^1(\Omega),$$

$$\mathcal{H}(w,t)=w-\frac{t}{\|T_m(u)\|(1+\epsilon)}T_m(w).$$

记

$$\phi(t)=\int_\Omega A(x,\mathcal{H}(w,t))|\nabla\mathcal{H}(w,t)|^2\,\mathrm{d}x.$$

简单计算可得

$$\begin{aligned}\phi'(t)=-\frac{1}{(1+\epsilon)\|T_m(u)\|}\Bigg(&\int_\Omega A(x,\mathcal{H}(w,t))\left(\nabla w-\frac{t\nabla T_m(w)}{(1+\epsilon)\|T_m(u)\|}\right)\nabla T_m(w)\\&+\frac{1}{2}\int_\Omega A_s(x,\mathcal{H}(w,t))T_m(w)|\nabla\mathcal{H}(w,t)|^2\Bigg).\end{aligned}$$

由(3.3)和(3.4)可得存在 $\delta_1<\delta$，使得当 $t\in[0,\delta_1]$ 和 $v\in H^1(\Omega)$， $\|w-v\|\le\delta_1$，成立

$$d(\mathcal{H}(w,t),w)\le t,$$

且

$$\phi(t)-\phi(0)=\phi'(0)t+o(1)\le-\frac{\sigma}{1+\epsilon}.$$

由 ϵ 的任意性，可得 $|d\mathcal{J}_1|(u)\ge\sigma$.与(3.2)矛盾，故

$$\int_\Omega A(x,u)\nabla u\nabla T_m(v)\mathrm{d}x+\int_\Omega A_s(x,u)|\nabla u|^2 T_m(v)\mathrm{d}x\le|d\mathcal{J}_1|(u)\|T_m(v)\|.$$

令 $m\to+\infty$，可知该引理成立。

引理 3.3 假设(A_0)~(A_4)成立，则 $\mathcal{J}$ 在 $H_0^1(\Omega)$ 上满足$(PS)_c$条件。

证 设 $\{u_k\}\subset H_0^1(\Omega)$ 是 $\mathcal{J}$ 的$(PS)_c$序列，即 $\mathcal{J}(u_k)\to c$，且 $|d\mathcal{J}|(u_k)\to 0$.由引理 3.2 可得

$$\langle\mathcal{J}'(u_k),u_k\rangle\le|d\mathcal{J}|(u_k)\|u_k\|\to 0.$$

根据(A$_1$)和注记 1.1，当$u\in H_0^1(\Omega)$时，有$A(x,u)|\nabla u|^2+\frac{1}{2}A_s(x,u)u|\nabla u|^2\in L^1(\Omega)$，因此可选择$u_k$作为测试函数，可得

$$|u_k|_2^2-\frac{1}{2}\int_\Omega A_s(x,u_k)u_k|\nabla u_k|^2\,\mathrm{d}x=2\mathcal{J}(u_k)-\langle\mathcal{J}'(u_k),u_k\rangle\le 2C_2+o(1)\|u_k\|.$$

利用(A$_3$)可得

$$|u_k|_2^2\le 2C_2+o(1)\|u_k\|. \tag{3.5}$$

利用(A$_1$)和(1.4)可得

$$\frac{1}{2}\int_\Omega A(x,u_k)|\nabla u_k|^2\,\mathrm{d}x=\mathcal{J}(u_k)-\frac{1}{2}\int_\Omega u_k^2\,\mathrm{d}x+\frac{1}{2}\int_\Omega u_k^2\log u_k^2\,\mathrm{d}x,$$

$$\frac{\alpha_0}{2}\int_\Omega|\nabla u_k|^2\,\mathrm{d}x\le\mathcal{J}(u_k)-\frac{1}{2}\int_\Omega u_k^2\,\mathrm{d}x+\frac{a^2}{\pi}|\nabla u_k|_2^2+\left(\log|u_k|_2^2-N(1+\log a)\right)|u_k|_2^2,$$

$$\left(\frac{\alpha_0}{2}-\frac{a^2}{\pi}\right)|\nabla u_k|_2^2\le\mathcal{J}(u_k)-\left(\frac{1}{2}+N(1+\log a)\right)|u_k|_2^2+|u_k|_2^2\log|u_k|_2^2.$$

利用$\mathcal{J}(u_k)$有界，选取合适的$a>0$，结合(3.5)可得

$$\begin{aligned}\|u_k\|^2&\le C_3+C_4|u_k|^2\log|u_k|^2\\&\le C_3+\left(2C_2+o(1)\|u_k\|\right)\log\left(2C_2+o(1)\|u_k\|\right)\\&\le C_3+C_4\left(\left(2C_2+o(1)\|u_k\|\right)^{1+\delta}+1\right),\quad\delta\in(0,1)\\&\le C_5+C_6\|u_k\|^{1+\delta}.\end{aligned}$$

则$\{u_k\}$在$H_0^1(\Omega)$上有界，故若$\{u_k\}$是$\mathcal{J}$在$H_0^1(\Omega)$上的(PS)$_c$序列，则存在$u\in H_0^1(\Omega)$，使得

$$u_k\rightharpoonup u\text{在}H_0^1(\Omega)\text{上},\ u_k\to u\text{在}L^p(\Omega)\text{上}\left(2<p<2^*\right),\ u_k\to u\quad\text{a.e}\ \ x\in\Omega.$$

定义光滑截断函数$\theta_R(x)$：$\mathbb{R}\to[0,1]$满足：$\theta_R(x)=1,|x|\le R$；$\theta_R(x)=0,|x|\ge 2R$；$|\theta_R'(x)|\le\frac{C_7}{R}$。

考虑测试函数$\theta_R(u_k)u_k$，则有

$$\begin{aligned}&\Bigg|\int_\Omega A(x,u_k)\theta_R(u_k)\nabla u_k\nabla u_k\,\mathrm{d}x+\frac{1}{2}\int_\Omega A_s(x,u_k)|\nabla u_k|^2\theta_R(u_k)u_k\,\mathrm{d}x\\&-\int_\Omega\theta_R(u_k)u_k^2\log u_k^2\,\mathrm{d}x-\langle\mathcal{J}'(u_k),\theta_R(u_k)u_k\rangle\Bigg|<\frac{C_7}{R}.\end{aligned}$$

当$k\to\infty$时，根据(A$_1$)、注记 1.1，利用 Lebesgue 控制收敛定理和$\mathcal{J}'(u_k)\to 0$可得

$$\left|\int_\Omega A(x,u)\theta_R(u)|\nabla u|^2\,\mathrm{d}x+\frac{1}{2}\int_\Omega A_s(x,u)|\nabla u|^2\theta_R(u)u\,\mathrm{d}x-\int_\Omega\theta_R(u)u^2\log u^2\,\mathrm{d}x\right|<\frac{C_7}{R},$$

故当$R\to+\infty$时，有

$$\left|\int_\Omega A(x,u)|\nabla u|^2\,\mathrm{d}x+\frac{1}{2}\int_\Omega A_s(x,u)u|\nabla u|^2\,\mathrm{d}x-\int_\Omega u^2\log u^2\,\mathrm{d}x\right|=0,$$

即

$$\int_\Omega A(x,u)|\nabla u|^2\,\mathrm{d}x+\frac{1}{2}\int_\Omega A_s(x,u)u|\nabla u|^2\,\mathrm{d}x=\int_\Omega u^2\log u^2\,\mathrm{d}x.$$

由引理 3.1，有 $\overline{\lim_{k\to\infty}}\int_\Omega u_k^2\log u_k^2\,\mathrm{d}x\le\int_\Omega u^2\log u^2\,\mathrm{d}x$，故成立

$$\begin{aligned}&\overline{\lim_{k\to\infty}}\int_\Omega A(x,u_k)|\nabla u_k|^2\,\mathrm{d}x+\frac{1}{2}\int_\Omega A_s(x,u_k)u_k|\nabla u_k|^2\,\mathrm{d}x\\&\le\int_\Omega A(x,u)|\nabla u|^2\,\mathrm{d}x+\frac{1}{2}\int_\Omega A_s(x,u)u|\nabla u|^2\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

根据(A_4)，由 Fatou 引理又可得

$$\begin{aligned}&\underline{\lim_{k\to\infty}}\int_\Omega A(x,u_k)|\nabla u_k|^2\,\mathrm{d}x+\frac{1}{2}\int_\Omega A_s(x,u_k)u_k|\nabla u_k|^2\,\mathrm{d}x\\&\ge\int_\Omega A(x,u)|\nabla u|^2\,\mathrm{d}x+\frac{1}{2}\int_\Omega A_s(x,u)u|\nabla u|^2\,\mathrm{d}x,\end{aligned}$$

故

$$\begin{aligned}&\int_\Omega A(x,u_k)|\nabla u_k|^2\,\mathrm{d}x+\frac{1}{2}\int_\Omega A_s(x,u_k)u_k|\nabla u_k|^2\,\mathrm{d}x\\&-\int_\Omega A(x,u)|\nabla u|^2\,\mathrm{d}x-\frac{1}{2}\int_\Omega A_s(x,u)u|\nabla u|^2\,\mathrm{d}x\to0,\end{aligned}$$

即

$$\begin{aligned}&\int_\Omega\big(A(x,u_k)-A(x,u)\big)|\nabla u_k|^2\,\mathrm{d}x+\int_\Omega A(x,u)\left(|\nabla u_k|^2-|\nabla u|^2\right)\mathrm{d}x\\&+\frac{1}{2}\int_\Omega\big(A_s(x,u_k)u_k-A_s(x,u)u\big)|\nabla u_k|^2\,\mathrm{d}x\\&+\frac{1}{2}\int_\Omega A_s(x,u)u\left(|\nabla u_k|^2-|\nabla u|^2\right)\mathrm{d}x\to0.\end{aligned}$$

由(A_1)和注记 1.1，利用 Lebesgue 控制收敛定理可得

$$\int_\Omega\big(A(x,u_k)-A(x,u)\big)|\nabla u_k|^2\,\mathrm{d}x\to0,$$

$$\frac{1}{2}\int_\Omega\big(A_s(x,u_k)u_k-A_s(x,u)u\big)|\nabla u_k|^2\,\mathrm{d}x\to0.$$

结合(A_4)可得

$$0\le\int_\Omega\left(A(x,u)+\frac{1}{2}A_s(x,u)u\right)\left(|\nabla u_k|^2-|\nabla u|^2\right)\mathrm{d}x\to0.$$

故 $\lim_{k\to\infty}\|u_k\|=\|u\|$，即 $u_k\to u$ 在 $H_0^1(\Omega)$ 上。

引理 3.4 假设(A_0)~(A_5)成立，则泛函 $\mathcal{J}_1$ 满足$(\mathrm{epi})_c$条件，且对于 $\lambda>\mathcal{J}_1(0)$，$\left|d_{\mathbb{Z}_2}\mathcal{G}_{\mathcal{J}_1}\right|(0,\lambda)\ne0$。

证 对由(3.1)定义的函数 $T_m(s)$，取 $(u,\lambda)\in\mathrm{epi}(\mathcal{J}_1)$，$\rho>0$，则存在 $\delta(\rho)\in(0,1]$，使得

$$\|T_m(v)-u\|\le\frac{\rho}{2},\quad v\in B_\delta(u),\tag{3.6}$$

且成立

$$\int_\Omega A(x,v)|\nabla T_m(v)|^2\,\mathrm{d}x\le\int_\Omega A(x,u)|\nabla T_m(u)|^2\,\mathrm{d}x+\frac{\rho}{2}\le\int_\Omega A(x,u)|\nabla u|^2\,\mathrm{d}x+\frac{\rho}{2}.\tag{3.7}$$

定义

$$\mathcal{H}:\{v\in B_\delta(u):\mathcal{J}(v)<\lambda+\delta\}\times[0,\delta]\to H_0^1(\Omega),$$

$$\mathcal{H}(v,t)=(1-t)v+tT_m(v).$$

下面证明成立不等式

$$\mathcal{J}_1((1-t)v+tT_m(v))\le(1-t)\mathcal{J}_1(v)+t(\mathcal{J}_1(u)+\rho). \tag{3.8}$$

由(A_0)，存在$\theta\in[0,1]$，

$$\begin{aligned}
&A(x,(1-t)v+tT_m(v))|\nabla((1-t)v+tT_m(v))|^2-A(x,v)|\nabla v|^2\\
&=A(x,(1-t)v+tT_m(v))|\nabla((1-t)v+tT_m(v))|^2-A(x,v)|\nabla((1-t)v+tT_m(v))|^2\\
&\quad+A(x,v)|\nabla((1-t)v+tT_m(v))|^2-A(x,v)|\nabla v|^2\\
&\le A_s(x,v+\theta(T_m(v)-v)t)(T_m(v)-v)t|\nabla((1-t)v+tT_m(v))|^2+tA(x,v)(|\nabla T_m(v)|^2-|\nabla v|^2)\\
&=A_s(x,v+\theta(T_m(v)-v)t)\left((T_m(v)-v)t+\frac{v}{\theta}\right)|\nabla((1-t)v+tT_m(v))|^2\\
&\quad-A_s(x,v+\theta(T_m(v)-v)t)\frac{v}{\theta}|\nabla((1-t)v+tT_m(v))|^2+tA(x,v)(|\nabla T_m(v)|^2-|\nabla v|^2).
\end{aligned}$$

利用(A_3)，有

$$A_s(x,v+\theta(T_m(v)-v)t)\left((T_m(v)-v)t+\frac{v}{\theta}\right)|\nabla((1-t)v+tT_m(v))|^2\le0,$$

结合(3.7)可得

$$\begin{aligned}
&A(x,(1-t)v+tT_m(v))|\nabla((1-t)v+tT_m(v))|^2\\
&\le tA(x,v)|\nabla T_m(v)|^2+(1-t)A(x,v)|\nabla v|^2\\
&\quad-A_s(x,v+\theta(T_m(v)-v)t)\frac{v}{\theta}|\nabla((1-t)v+tT_m(v))|^2\\
&\le t\int_\Omega A(x,u)|\nabla u|^2\,\mathrm{d}x+(1-t)A(x,v)|\nabla v|^2\\
&\quad+\frac{\rho t}{2}-A_s(x,v+\theta(T_m(v)-v)t)\frac{v}{\theta}|\nabla((1-t)v+tT_m(v))|^2.
\end{aligned}$$

进一步减小δ，使得成立

$$\frac{\rho t}{2}-A_s(x,v+\theta(T_m(v)-v)t)\frac{v}{\theta}|\nabla((1-t)v+tT_m(v))|^2\le\rho,$$

即(3.8)成立。根据定理2.1，$\mathcal{J}_1$满足$(\mathrm{epi})_c$条件，且$|d_{\mathbb{Z}_2}\mathcal{G}_{\mathcal{J}_1}|(0,\lambda)=1$。

引理3.5 假设(A_0)~(A_4)成立，则存在$\eta>0$，$r>0$，对$\forall u\in H_0^1(\Omega)$，当$\|u\|=r$时，$\mathcal{J}(u)>\eta$。

证 由式(1.4)和(A_1)，当$\|u\|$充分小时，选择合适的$a>0$，可得

$$\begin{aligned}
\mathcal{J}(u)&=\frac12\int_\Omega A(x,u)|\nabla u|^2\,\mathrm{d}x+\frac12\int_\Omega u^2\,\mathrm{d}x-\frac12\int_\Omega u^2\log u^2\,\mathrm{d}x\\
&\ge\left(\frac{\alpha_0}{2}-\frac{a^2}{2\pi}\right)|\nabla u|_2^2+\frac12\left(1+N(1+\log a)-\log|u|_2^2\right)|u|_2^2\\
&\ge C_8\|u\|^2.
\end{aligned}$$

由上式可知，存在正常数η、r_0，当$u\in H_0^1(\Omega)$，$\|u\|=r_0$时，$\mathcal{J}(u)\ge\eta$。

引理 3.6 假设(A_0)~(A_4)成立，则存在 $e\in H_0^1(\Omega)$，且 $\|e\|>r_0$，使得 $\mathcal{J}(e)<\eta$。

证 记 $D(\mathcal{J})=\{u\in H_0^1(\Omega)\mid\mathcal{J}(u)<+\infty\}$，对 $u\in D(\mathcal{J})$。则有

$$\mathcal{J}(su)=\frac{s^2}{2}\left(\int_\Omega A(x,su)|\nabla u|^2\,\mathrm{d}x+\int_\Omega u^2\,\mathrm{d}x-\log s^2\int_\Omega u^2\,\mathrm{d}x-\int_\Omega u^2\log u^2\,\mathrm{d}x\right).$$

根据(A_1)，当 $s\to+\infty$ 时，有 $\mathcal{J}(su)\to-\infty$。故存在 $e\in H_0^1(\Omega)$，当 $\|e\|>r_0$ 时，$\mathcal{J}(w)<\eta$。

综合引理 3.1、引理 3.3、引理 3.4、引理 3.5、引理 3.6，可知 $\mathcal{J}$ 在 $H_0^1(\Omega)$ 上满足定理 2.2 的全部条件。故定理 1.1 得证。

4. 解的多重性

设($-\Delta$，$H_0^1(\Omega)$)的无穷多个特征值为 $0<\lambda_1<\lambda_2\le\lambda_3\le\cdots\le\lambda_m\le\cdots$，$\lambda_m$ 对应的特征函数记为 ϕ_m，可证 $\phi_m\in L^\infty(\Omega)$，$m=1,2,3,\cdots$。记 $V_m=\operatorname{span}\{\phi_1,\phi_2,\phi_3,\cdots,\phi_m\}$，$H_m=\left\{w\in H_0^1(\Omega)\mid\int_\Omega w\phi_i\,\mathrm{d}x=0,i=1,2,3,\cdots,m\right\}$，则 $H_0^1(\Omega)=V_m\oplus H_m$，见[1]。

引理 4.1 假设(A_0)~(A_5)成立，则对于任意给定 $\beta>0$，则存在 $m\in\mathbb{N}$ 和 $r_m>0$，当 $u\in H_m$，且 $\|u\|=r_m$ 时，有 $\mathcal{J}(u)\ge\beta$。

证

$$\begin{aligned}\mathcal{J}(u)&=\frac{1}{2}\int_\Omega A(x,u)|\nabla u|^2\,\mathrm{d}x+\frac{1}{2}\int_\Omega|u|^2\,\mathrm{d}x-\frac{1}{2}\int_\Omega|u|^2\log u^2\,\mathrm{d}x\\&\ge\frac{\alpha_0}{2}\int_\Omega|\nabla u|^2\,\mathrm{d}x-C_9\int_\Omega|u|^{\delta+1}\,\mathrm{d}x-C_{10},\delta\in\left(1,2^*-1\right).\end{aligned}$$

记 $\delta+1=p$，选择 $r\in(0,p)$ 满足 $\frac{r}{2}+\frac{p-r}{2^*}=1$，由插值不等式和 $H_0^1(\Omega)\rightarrowtail L^q(\Omega),q\in\left[2,2^*\right]$，则有

$$|u|_p^p\le|u|_{2^*}^{p-r}|u|_2^r\le C_{11}\|u\|^{p-r}|u|_2^r.$$

又因 $u\in H_m$，故

$$|u|\le C_{12}\lambda_{m+1}^{-\frac{r}{2}}\|u\|^p,$$

从而

$$\mathcal{J}(u)\ge\frac{\alpha_0}{2}\|u\|^2-C_{12}\lambda_{m+1}^{-\frac{r}{2}}\|u\|^p-C_{10}.$$

取 $r_m=\left(\frac{\alpha_0}{C_{12}p}\lambda_{m+1}^{\frac{r}{2}}\right)^{\frac{1}{p-2}}$，则当 $m\to\infty$ 时，有 $r_m\to+\infty$。进一步，如果 $\|u\|=r_m$，那么

$$\mathcal{J}(u)\ge\frac{\alpha_0}{2}r_m^2-C_{12}\lambda_{m+1}^{-\frac{r}{2}}r_m^p-C_{10}=\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{p}\right)\alpha_0r_m^2-C_{10}.$$

因此对给定 $\beta>0$，当 m 足够大时，有 $\mathcal{J}(u)\ge\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{p}\right)\alpha_0r_m^2-C_{10}\ge\beta$。

引理 4.2 假设(A_0)~(A_5)成立，对于 $H_0^1(\Omega)$ 的每个有限维子空间 V，都存在 $R>0$，使得当 $u\in V$，且 $\|u\|\ge R$ 时，$\mathcal{J}(u)\le0$。

证 对于任意 $u\in V$，都存在 $s\in\mathbb{R}$ 和 $v\in V$，$|v|_2=1$，使得 $u=sv$。则

$$\mathcal{J}(u)=\frac{s^2}{2}\left(\int_\Omega A(x,sv)|\nabla v|^2\,\mathrm{d}x+\int_\Omega v^2\,\mathrm{d}x-\log s^2\int_\Omega v^2\,\mathrm{d}x-\int_\Omega v^2\log v^2\right).$$

V 是有限维空间，故以上积分关于 v 均有界。则当 $s \to +\infty$ 时(即 $\|u\| \to +\infty$)，有 $\mathcal{J}(u) \to -\infty$。即存在 $R > 0$，当 $u \in V$ 且 $\|u\| > R$ 时，$\mathcal{J}(u) \le 0$。

至此，结合引理 3.1、引理 3.3、引理 3.4、引理 4.1 和引理 4.2，泛函 $\mathcal{J}$ 在 $H_0^1(\Omega)$ 满足定理 2.3 的全部条件。故其存在临界点列 $\{u_k\}$，使得当 $k \to \infty$ 时，$\mathcal{J}\{u_k\} \to +\infty$。从而问题(1.1)存在无穷多个解。定理 1.2 得证。

参考文献

[1] Candela, A.M. and Palmieri, P.G. (2009) Infinitely Many Solutions of Some Nonlinear Variational Equations. *Calculus of Variations and Partial Differential Equations*, **34**, 495-530. https://doi.org/10.1007/s00526-008-0193-2

[2] Candela, A.M., Palmieri, G. and Salvatore, A. (2020) Multiple Solutions for Some Symmetric Supercritical Problems. *Communications in Contemporary Mathematics*, **22**, Article ID: 1950075. https://doi.org/10.1142/S0219199719500755

[3] Candela, A.M. and Salvatore, A. (2020) Existence of Radial Bounded Solutions for Some Quasilinear Elliptic Equations in R^N. *Nonlinear Analysis*, **191**, Article ID: 111625. https://doi.org/10.1016/j.na.2019.111625

[4] Squassina, M. and Szulkin, A. (2015) Multiple Solutions to Logarithmic Schrödinger Equations with Periodic Potential. *Calculus of Variations and Partial Differential Equations*, **54**, 585-597. https://doi.org/10.1007/s00526-014-0796-8

[5] Ji, C. and Szulkin, A. (2016) A Logarithmic Schrödinger Equation with Asymptotic Conditions on the Potential. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **437**, 241-254. https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2015.11.071

[6] Alves, C.O. and de Morais Filho, D.C. (2018) Existence and Concentration of Positive Solutions for a Schrödinger Logarithmic Equation. *Zeitschrift Angewandte Mathematik und Physik*, **69**, 144. https://doi.org/10.1007/s00033-018-1038-2

[7] Alves, C.O., de Morais Filho, D.C. and Figueiredo, G.M. (2019) On Concentration of Solution to a Schrödinger Logarithmic Equation with Deepening Potential Well. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, **42**, 4862-4875. https://doi.org/10.1002/mma.5699

[8] Willem, M. (1996) Minimax Theorems. Birkhäuser, Boston. https://doi.org/10.1007/978-1-4612-4146-1

[9] Avenia, P.D., Montefusco, D. and Squassina, M. (2014) On the Logarithmic Schrödinger Equation. *Communications in Contemporary Mathematics*, **16**, Article ID: 1350032. https://doi.org/10.1142/S0219199713500326

[10] Campa, I. and Degiovanni, M. (2000) Subdifferential Calculus and Nonsmooth Critical Point Theory. *SIAM Journal on Optimization*, **10**, 1020-1048. https://doi.org/10.1137/S1052623499353169

[11] Degiovanni, M. and Zani, S. (2000) Multiple Solutions of Semilinear Elliptic Equations with One-Sided Growth Conditions. *Mathematical and Computer Modelling*, **32**, 1377-1393. https://doi.org/10.1016/S0895-7177(00)00211-9

[12] Pellacci, B. and Squassina, M. (2004) Unbounded Critical Points for a Class of Lower Semicontinuous Functionals. *Journal of Differential Equations*, **201**, 25-62. https://doi.org/10.1016/j.jde.2004.03.002