Pure Mathematics 理论数学, 2022, 12(7), 1196-1204
Published Online July 2022 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2022.127131

一类四阶非线性边值问题多个正解的存在性

康聪聪

西北师范大学数学与统计学院，甘肃 兰州

收稿日期：2022年6月14日；录用日期：2022年7月15日；发布日期：2022年7月22日

摘　要

本文运用锥上的不动点定理研究了四阶非线性边值问题

$$\begin{cases} \rho_4(\rho_3(\rho_2(\rho_1(\rho_0 u)')')')' = \lambda a(t) f(u(t)), \quad t \in (0,1), \\ u(0) = u(1) = 0, \ \ u'(0) = u'(1) = 0 \end{cases}$$

多个正解的存在性，其中 $\lambda > 0$ 是参数，$\rho_i \in C^{4-i}([0,1],(0,\infty))$, $i = 0,1,2,3,4$, $f \in C([0,\infty),[0,\infty))$, $a \in C([0,1],[0,\infty))$ 且在 [**0,1**] 的任何子区间上不恒为零。

关键词

四阶，不动点定理，非共轭，拟导数

Existence of Multiple Positive Solutions for a Class of Nonlinear Fourth-Order Boundary Value Problems

Congcong Kang

College of Mathematics and Statistics, Northwest Normal University, Lanzhou Gansu

Received: Jun. 14^{th}, 2022; accepted: Jul. 15^{th}, 2022; published: Jul. 22^{nd}, 2022

文章引用: 康聪聪. 一类四阶非线性边值问题多个正解的存在性[J]. 理论数学, 2022, 12(7): 1196-1204.
DOI: 10.12677/pm.2022.127131

Abstract

This paper considers with the existence of multiple positive solutions for nonlinear fourth-order boundary value problems

$$\begin{cases} \rho_4(\rho_3(\rho_2(\rho_1(\rho_0 u)')')')' = \lambda a(t) f(u(t)), \quad t \in (0,1), \\ u(0) = u(1) = 0, \quad u'(0) = u'(1) = 0 \end{cases}$$

by using fixed point theorem in cones. Where $\lambda > 0$ **is a parameter,** $\rho_i \in C^{4-i}([0,1],(0,\infty))$, $i = 0,1,2,3,4,\ f \in C([0,\infty),[0,\infty)),\ a \in C([0,1],[0,\infty))$ **and does not vanish identically on any subinterval of [0,1].**

Keywords

Fourth-Order, Fixed Point Theorem, Disconjugacy, Quasi-Derivatives

1. 引言

四阶两点边值问题可以描述不同受力条件下弹性梁的形变, 由于其重要的应用背景, 学者们对其研究从未停止, 并且获得了一些重要而丰富的结果 [1–10]. 值得注意的是, 两端简单支撑和固定支撑的弹性梁方程

$$u''''(t) = \lambda a(t) f(u(t))$$

正解的存在性已被很多学者研究 [1,5–10], 而关于一般形式的方程很少有人研究 [2–4].

本文首先介绍拟导数算子的定义. 假设对每个 $i = 0,1,2,3,4$, 函数 $\rho_i \in C^{4-i}([0,1],(0,\infty))$, 对任意的 $u \in C^4[0,1]$, 令

$$\begin{aligned} L_0 u &= \rho_0 u, \\ L_i u &= \rho_i (L_{i-1} u)',\ i = 1,2,3,4, \end{aligned}$$

则函数 $L_iu,\ i=1,2,3,4$ 称为 u 的拟导数. 若考虑边界条件

$$(L_t)u(0)=0,\ \ t\in\{i_1,i_2\},$$
$$(L_t)u(1)=0,\ \ t\in\{j_1,j_2\},$$

其中 $\{i_1,i_2\},\{j_1,j_2\}$ 是$\{0,1,2,3\}$ 的子集. 特别地, 令 $i_r=j_r=r-1, r=1,2$, 则上述边界条件可以转化为固定梁支撑

$$u(0)=u(1)=u'(0)=u'(1)=0. \tag{1.1}$$

因此本文考虑四阶非线性边值问题

$$\begin{cases} \rho_4(\rho_3(\rho_2(\rho_1(\rho_0 u)')')')'=\lambda a(t)f(u(t)), \quad t\in(0,1), \\ u(0)=u(1)=0, \quad u'(0)=u'(1)=0 \end{cases} \tag{1.2}$$

多个正解的存在性, 其中 $\lambda>0, \rho_i\in C^{4-i}([0,1],(0,\infty)), a\in C([0,1],[0,\infty))$ 且在 [0,1] 的任何子区间上不恒为零, $f\in C([0,\infty),[0,\infty))$. 特别地, 当 $\rho_i=1,\ i=1,2,3,4$ 时, $\rho_4(\rho_3(\rho_2(\rho_1(\rho_0u)')')')'=u''''$, 类似的问题在 Bai [10]中被讨论, 作者运用锥上的不动点定理研究了四阶边值问题

$$\begin{cases} u^{(4)}(t)=\lambda f(u(t)), \quad t\in(0,1), \\ u(0)=u(1)=0,\ \ u''(0)=u''(1)=0 \end{cases}$$

多个正解的存在性, 其中, $\lambda>0$ 是常数, $f\in C([0,\infty),[0,\infty))$ 且 $f_0:=\lim\limits_{u\to0^+}\frac{f(u)}{u}, f_\infty:=\lim\limits_{u\to\infty}\frac{f(u)}{u}\notin\{0,\infty\}$.

自然而然地, 我们考虑能否在 $\rho_i\neq1,\ i=1,2,3,4,\ a\in C([0,1],[0,\infty))$ 且在 [0,1] 的任何子区间上不恒为零, $f_0,f_\infty\in\{0,\infty\}$ 的情形下得到问题 (1.2) 多个正解的存在性? 在这里, 我们总假设:

(A1) $\rho_i\in C^{4-i}([0,1],(0,\infty)),\ i=0,1,2,3,4,\ f\in C([0,\infty),[0,\infty))$;

(A2) $a\in C([0,1],[0,\infty))$ 且在 [0,1] 的任何子区间上不恒为零;

(A3) $f_0=\infty,\ f_\infty=+\infty\ (f_0=0,\ f_\infty=0)$;

(A4) 存在 $h>0$ 使得

$$f(u)\le\gamma h,\ 0\le u\le h\ \ (f(u)\ge\eta h,\ \frac{m}{M}h\le u\le h),$$

$$\gamma=(\lambda M\int_0^1 a(s)ds)^{-1}\ \ (\eta=(\lambda m\int_0^1 a(s)ds)^{-1}), \tag{1.3}$$

其中 $G(t,s)$ 是问题 (1.2) 对应齐次问题的格林函数, $m=\min G(t,s),\ M=\max G(t,s)$. 并得到如下结果:

定理 1.1 假设 (A1)-(A4) 成立. 则问题 (1.2) 至少有两个正解 $u_1,\ u_2$ 使得

$$0<\|u_1\|<h<\|u_2\|.$$

2. 预备知识

定义 2.1 [11] 设 Ω 是 $\mathbb{R}^n$ 中某有界开集, $f:\overline{\Omega}\to\mathbb{R}^n$, f 是 C^2 映像 (即 $f=(f_1,\cdots,f_n)$, $f_i(x_1,\cdots,x_n)$ 在 $\overline{\Omega}$ 上具有连续各二阶偏导数, $i=1,2,\cdots,n)$, $p\in\mathbb{R}^n\setminus f(\partial\Omega)$, 于是 $\tau=\inf\limits_{x\in\partial\Omega}\|f(x)-p\|>0$. 作连续函数 $\Phi:[0,+\infty)\to\mathbb{R}^1$, 使它满足下面两个条件:

(1) 存在 σ,τ^* 满足 $0<\sigma<\tau^*\leq\tau$, 且当 $r\notin(\sigma,\tau^*)$ 时恒有 $\Phi(r)=0$;

(2) $\int_{\mathbb{R}^n}\Phi(\|z\|)dz=1$.

定义拓扑度

$$\deg(f,\Omega,p)=\int_{\Omega}\Phi(\|f(x)-p\|)J_f(x)dx,$$

其中, $J_f(x)$ 表示 f 在点 x 的 Jacobi 行列式

$$J_f(x)=\frac{D(f_1,f_2,\cdots,f_n)}{D(x_1,x_2,\cdots,x_n)}=|\frac{\partial f_i}{\partial x_j}|.$$

定义 2.2 [11] 设 X 为 Banach 空间, $K\subset X$ 为闭凸集, 设 $D\subset K$ 有界且为相对开集, $F:\overline{D}\to K$ 为全连续映射. 取有界开集 $\Omega\subset X$ 满足 $D=\Omega\cap K$, $\partial D=\partial\Omega\cap K$, 取 F 的全连续延拓 $F^*:\overline{\Omega}\to K$, 令 $f^*=I-F^*$, 定义 $i(F,D,K)=\deg(f^*,\Omega,\theta)$ 为 F 在 D 上关于 K 的不动点指数.

引理 2.1 [10] 设 X 是一个 Banach 空间, $K\subseteq X$ 是一个锥, 对 $p>0$, 定义 $K_p=\{u\in K:\|u\|\leq p\}$. 假设 $T:K_p\to K$ 是一个全连续算子, 对任意 $u\in\partial K_p=\{u\in K:\|u\|=p\}$, 有 $Tu\neq u$, 则

(1) 若 $\|Tu\|\geq\|u\|$, $u\in\partial K_p$, 则

$$i(T,K_p,K)=0;$$

(2) 若 $\|Tu\|\leq\|u\|$, $u\in\partial K_p$, 则

$$i(T,K_p,K)=1.$$

定义 2.3 [2] 设 $p_k\in C[a,b]$, $k=1,\ \cdots,\ n$. 若线性 n 阶微分方程

$$Ly\equiv y^n+p_1(x)y^{n-1}+\cdots+p_n(x)y=0 \tag{2.1}$$

每个非平凡解的零点在区间 $[a,b]$ 上都少于 n 个, 则称方程 (2.1) 在区间 $[a,b]$ 上非共轭, 其中重根按重数计算.

定义 2.4 [2] 若函数 $y_1,\cdots,y_n\in C^n[a,b]$ 满足 n 阶朗斯基行列式

$$W_k:=W[y_1,\cdots,y_k]=\begin{vmatrix} y_1 & \cdots & y_k\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ y_1^{(k-1)} & \cdots & y_k^{(k-1)}\end{vmatrix},\quad(k=1,\cdots,n)$$

在区间 $[a,b]$ 上恒为正, 则称函数 $y_1,\cdots,y_n$ 构成一个马尔可夫系统.

DOI: 10.12677/pm.2022.127131

引理 2.2 [2] 方程 (2.1) 在区间 $[a,b]$ 上存在一个马尔可夫解系当且仅当其在 $[a,b]$ 上非共轭.

引理 2.3 [2] 方程 (2.1) 在区间 $[a,b]$ 上非共轭当且仅当 L 可以表示为

$$Ly \equiv v_1 v_2 \cdots v_n D \frac{1}{v_n} D \cdots D \frac{1}{v_1} y,$$

其中 $D = d/dt$, 且

$$1 = W_0,\ \ v_1 = W_1,\ \ v_k = W_k W_{k-2}/W_{k-1}^2,\ \ (k = 2, \cdots, n).$$

引理 2.4 [2] 假设方程 (2.1) 在 $[a,b]$ 上是非共轭的, 则

$$(-1)^{n-k} G(t,s) > 0, \quad a < s < b, \quad a < t < b.$$

注 本文考虑四阶两点边值问题, 因此 $n = 4,\ k = 2$, 显然问题 (1.2) 对应的齐次问题的格林函数 $G(t,s) > 0$.

令

$$X = \{u \in C^4[0,1],\ u \text{ 满足式 } (1.1)\}, \quad Y = C[0,1],$$

则 X 在范数 $\|\cdot\|_4$ 下构成 Banach 空间, Y 在范数 $|\cdot|_\infty$ 下构成 Banach 空间, 为方便起见, $\|\cdot\|_4$ 和 $|\cdot|_\infty$ 均简记为 $\|\cdot\|$.

定义 X 上的锥 K:

$$K = \{\ u \in X:\ u \geq 0,\ \min_{0\leq t\leq 1} u(t) \geq \frac{m}{M}\|u\|\ \}.$$

定义算子 $T : X \to Y$, 具体形式为:

$$Tu = \int_0^1 G(t,s)\lambda a(s) f(u(s))ds.$$

3. 定理 1.1 的证明

引理 3.1 对任意 $u \in K$, 则算子 $T : K \to K$, 且 T 全连续.

证明 由于 $\max G(t,s) = M,\ \min G(t,s) = m,\ 0 \leq t \leq 1,\ 0 \leq s \leq 1$, 对任意 $u \in K$, 则

$$\begin{aligned}
\min_{0\leq t\leq 1}(Tu)(t) &= \min_{0\leq t\leq 1}\int_0^1 G(t,s)\lambda a(s) f(u(s))ds \\
&\geq \lambda m \int_0^1 a(s) f(u(s))ds \\
&= \lambda \cdot \frac{m}{M}\int_0^1 M a(s) f(u(s))ds \\
&\geq \lambda \frac{m}{M}\max_{0\leq t\leq 1}\int_0^1 G(t,s) a(s) f(u(s))ds \\
&\geq \frac{m}{M}\|Tu\|.
\end{aligned}$$

故 $Tu \in K$. 此外, 由 Ascoli-Arzeia 定理易得算子 $T: K \to K$ 是全连续的.

定理 1.1 证明 先证明 $f_0 = \infty$, $f_\infty = \infty$ 的情形.

取 $Q > 0$ 使得

$$\lambda Q \int_0^1 G(\frac{1}{2}, s)a(s)ds > 1. \tag{3.1}$$

由 $f_0 = \infty$ 得, 存在 $0 < R_1 < h$ 使得 $f(u) \geq Qu$, $0 \leq u \leq R_1$.下证 $\|Tu\| > \|u\|$, $u \in \partial K_{R_1}$. 事实上, 当 $u \in \partial K_{R_1}$ 时,

$$\begin{aligned} Tu(\frac{1}{2}) &= \int_0^1 G(\frac{1}{2}, s)\lambda a(s)f(u(s))ds \\ &\geq \lambda Q \int_0^1 G(\frac{1}{2}, s)a(s)\|u\|ds \\ &> \|u\|. \end{aligned} \tag{3.2}$$

因此, 由引理 2.1 得

$$i(T, K_{R_1}, K) = 0. \tag{3.3}$$

再由 $f_\infty = \infty$ 得, 存在 $R > 0$ 使得 $f(u) \geq Qu$, $u \geq R$. 取 $R_2 > \max\{h, \frac{MR}{m}\}$, $t \in [0,1]$, 则 $\min\limits_{0\leq t\leq 1} u(t) \geq \frac{m}{M}\|u\| > R, u \in \partial K_{R_2}$, 同式 (3.2), 由引理 2.1 可得

$$i(T, K_{R_2}, K) = 0. \tag{3.4}$$

另一方面, 由 (A4)可知, 对 $u \in \partial K_h$,

$$\begin{aligned} \|Tu\| &= \max_{0\leq t\leq 1} \int_0^1 G(t, s)\lambda a(s)f(u(s))ds \\ &\leq \lambda M \int_0^1 a(s)f(u(s))ds \\ &\leq \lambda M \int_0^1 a(s)\gamma\|u\|ds \\ &= \|u\|(\text{由式}(1.3)). \end{aligned}$$

因此, $\|Tu\| \leq \|u\|$, $u \in \partial K_h$. 显然 $Tu \neq u, u \in \partial K_h$, 则由引理 2.1 得

$$i(T, K_h, K) = 1. \tag{3.5}$$

由不动点指数的可加性及式 (3.3), (3.4), (3.5) 可得

$$i(T, K_{R_2}\backslash \mathring{K}_h, K) = -1, \quad i(T, K_h\backslash \mathring{K}_{R_1}, K) = 1.$$

因此, T 在 $K_{R_2}\backslash \mathring{K}_h$ 上有一个不动点记为 $u_1(t)$, 在 $K_h\backslash \mathring{K}_{R_1}$ 上有一个不动点记为 $u_2(t)$, 则

$u_1(t), u_2(t)$ 都是问题 (1.2) 的解, 且满足 $0 < \|u_1\| < h < \|u_2\|$.

再证 $f_0 = 0,\ f_\infty = 0$ 的情形. 对任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $R_1 > 0$ 使得

$$f(u) < \varepsilon u, \quad 0 < u < R_1. \tag{3.6}$$

取 $\varepsilon = (\lambda M \int_0^1 a(s)ds)^{-1}$ 且 $R_1 < h$, 则对 $u \in \partial K_{R_1}$,

$$\begin{aligned} \|Tu\| &= \max_{0\le t\le 1} \int_0^1 G(t,s)\lambda a(s) f(u(s))ds \\ &\le \lambda M \int_0^1 a(s) f(u(s))ds \\ &< \varepsilon\lambda M \int_0^1 a(s)\|u\|ds \\ &= \|u\|. \end{aligned} \tag{3.7}$$

因此, 由引理 2.1 得,

$$i(T, K_{R_1}, K) = 1. \tag{3.8}$$

类似地, 取 $R_2 > h > 0$ 足够大, 使得 $f(u) < \varepsilon u,\ u > R_2$. 同式 (3.7), 由引理 2.1 可得,

$$i(T, K_{R_2}, K) = 1. \tag{3.9}$$

另一方面, 由 (A4) 可得, 对 $u \in \partial K_h$,

$$\begin{aligned} \|Tu\| &= \max_{0\le t\le 1} \int_0^1 G(t,s)\lambda a(s) f(u(s))ds \\ &\ge \lambda \int_0^1 G(t,s) a(s)\eta h ds \\ &\ge \lambda\eta m \int_0^1 a(s)\|u\|ds \\ &= \|u\|(\text{由式}(1.3)). \end{aligned}$$

因此, $\|Tu\| \ge \|u\|,\ u \in \partial K_h$. 显然, $Tu \ne u, u \in \partial K_h$. 则由引理 2.1 得

$$i(T, K_h, K) = 0. \tag{3.10}$$

由不动点指数的可加性及 (3.8), (3.9), (3.10) 式可得

$$i(T, K_{R_2}\backslash \mathring{K}_h, K) = 1, \quad i(T, K_h\backslash \mathring{K}_{R_1}, K) = -1.$$

因此, T 在 $K_{R_2}\backslash \mathring{K}_h$ 和 $K_h\backslash \mathring{K}_{R_1}$ 上各有一个不动点记为 $u_1(t)$ 和 $u_2(t)$, 且 $u_1(t),\ u_2(t)$ 都是问题 (1.2) 的解, 并满足 $0 < \|u_1\| < h < \|u_2\|$. 定理 1.1 证毕.

4. 例子

例 1 考虑边值问题

$$\begin{cases} u''''(t) - l^4 u(t) = u^2 + u^{\frac{1}{2}}, \quad t \in (0,1), \\ u(0) = u(1) = 0, \;\; u'(0) = u'(1) = 0, \end{cases} \tag{4.1}$$

其中 $l \in [0, l_1)$, $l_1 \approx 4.73$ 是方程

$$\cos(l)\cosh(l) = 1$$

的第一个正根, 此时问题 (4.1) 有非平凡解.

对每个固定的 $i \in \{1,2,3,4\}$, 令 u_i 是初值问题

$$\begin{aligned} &u''''(t) - l^4 u(t) = 0, \\ &u^{(j)}(0) = 0, \;\; j \neq 4-i, \\ &u^{(4-i)}(0) = l^{4-i} \end{aligned}$$

的唯一解, 则

$$\begin{aligned} u_1(t) &= \frac{1}{2}[\sinh(lt) - \sin(lt)], \;\; u_2(t) = \frac{1}{2}[\cosh(lt) - \cos(lt)], \\ u_3(t) &= \frac{1}{2}[\sinh(lt) + \sin(lt)], \;\; u_4(t) = \frac{1}{2}[\cosh(lt) + \cos(lt)]. \end{aligned}$$

令 $y_1(t) = u_1(t+\sigma)$, $y_2(t) = u_2(t+\sigma)$, $y_3(t) = -u_3(t+\sigma)$, $y_4(t) = u_4(t+\sigma)$, 其中 $\sigma \in (0,1)$ 足够小. 则,

$$\begin{aligned} &W_1[y_1](t) = \frac{1}{2}[\sinh(l(t+\sigma)) - \sin(l(t+\sigma))], \\ &W_2[y_1, y_2](t) = \frac{l}{2}[\cosh(l(t+\sigma))\cos(l(t+\sigma)) - 1], \\ &W_3[y_1, y_2, y_3](t) = \frac{1}{4} l^3 [\sinh(l(t+\sigma)) - \sin(l(t+\sigma))], \\ &W_4[y_1, y_2, y_3, y_4](t) = W_4[y_1, y_2, y_3, y_4](0) = l^6, \end{aligned}$$

显然, $W_i > 0, i = 1,2,3,4$, 则函数 $\{y_1, y_2, y_3, y_4\}$ 是方程 $u''''(t) - l^4 u(t) = 0$ 在区间 $[0,1]$ 上的一个马尔可夫解系, 通过简单地计算得,

$$\begin{aligned} &u''''(t) - l^4 u(t) = \frac{4l^3}{\sinh(l(t+\sigma)) - \sin(l(t+\sigma))} \\ &(\frac{(\sinh(l(t+\sigma)) - \sin(l(t+\sigma)))^2}{8l(\cosh(l(t+\sigma))\cos(l(t+\sigma)) - 1)}(\frac{2(\cosh(l(t+\sigma))\cos(l(t+\sigma)) - 1)^2}{l(\sinh(l(t+\sigma)) - \sin(l(t+\sigma)))^2} \\ &(\frac{(\sinh(l(t+\sigma)) - \sin(l(t+\sigma)))^2}{2l(\cosh(l(t+\sigma))\cos(l(t+\sigma)) - 1)}(\frac{2}{\sinh(l(t+\sigma)) - \sin(l(t+\sigma))} u)')')')'. \end{aligned}$$

根据引理 2.3 及引理 2.4 知, 算子 $u''''(t) - l^4 u(t)$ 非共轭, 且在边界条件 $u(0) = u(1) = u'(0) = u'(1) = 0$ 下对应的格林函数为正. 另一方面, 显然 $u^2 + u^{\frac{1}{2}}$ 满足条件 (A3)-(A4), 则问题 (4.1) 至少存在两个正解.

基金项目

国家自然科学基金资助项目(批准号: 12061064)。

参考文献

[1] Yan, D.L., Ma, R.Y. and Wei, L.P. (2021) Global Structure of Positive Solutions of Fourth-Order Problems with Clamped Beam Boundary Conditions. *Mathematical Notes*, **109**, 962-970. https://doi.org/10.1134/S0001434621050308

[2] Ma, R.Y., Wang, H.Y. and Elsanosi, M. (2013) Spectrum of a Linear Fourth-Order Differential Operator and Its Applications. *Mathematische Nachrichten*, **286**, 1805-1819. https://doi.org/10.1002/mana.201200288

[3] Cabada, A. and Enguica, R.R. (2011) Positive Solutions of Fourth Order Problems with Clamped Beam Boundary Conditions. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods and Applications*, **74**, 3112-3122. https://doi.org/10.1016/j.na.2011.01.027

[4] Shen, W.G. (2012) Global Structure of Nodal Solutions for a Fourth-Order Two-Point Boundary Value Problem. *Applied Mathematics and Computation*, **219**, 88-98. https://doi.org/10.1016/j.amc.2011.12.080

[5] Bouteraa, N., Benaicha, S., Djourdem, H. and Benattia, M.E. (2018) Positive Solutions of Nonlinear Fourth-Order Two-Point Boundary Value Problem with a Parameter. *Romanian Journal of Mathematics and Computer Science*, **8**, 17-30.

[6] Zou, Y.M. (2017) On the Existence of Positive Solutions for a Fourth-Order Boundary Value Problem. *Journal of Function Spaces*, **2017**, Article ID: 4946198. https://doi.org/10.1155/2017/4946198

[7] Cabada, A., Precup, R., Saavedra, L. and Tersian, S. (2016) Multiple Positive Solutions to a Fourth-Order Boundary-Value Problem. *Electronic Journal of Differential Equations*, **2016**, 1-18.

[8] Benaicha, S. and Haddouchi, F. (2016) Positive Solutions of a Nonlinear Fourth-Order Integral Boundary Value Problem. *Mathematics and Computer Science*, **54**, 73-86. https://doi.org/10.1515/awutm-2016-0005

[9] Feng, X.F. and Feng, H.Y. (2013) Existence of Positive Solutions for Fourth-Order Boundary Value Problems with Sign-Changing Nonlinear Terms. *ISRN Mathematical Analysis*, **2013**, Article ID: 349624. https://doi.org/10.1155/2013/349624

[10] Bai, Z.B. and Wang, H.Y. (2002) On Positive Solutions of Some Nonlinear Fourth-Order Beam Equations. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **270**, 357-368. https://doi.org/10.1016/S0022-247X(02)00071-9

[11] 郭大钧. 非线性泛函分析[M]. 北京: 高等教育出版社, 2015.