Pure Mathematics 理论数学, 2022, 12(8), 1360-1369
Published Online August 2022 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2022.128149

矩阵方程$AXB = C$的轮换极小范数最小二乘解

曹煜喆，袁仕芳*

五邑大学数学与计算科学学院，广东 江门

收稿日期：2022年7月19日；录用日期：2022年8月19日；发布日期：2022年8月30日

摘 要

循环矩阵有悠久的历史并且在众多科学领域得到了广泛的应用。矩阵方程$AXB = C$在特定集合类的求解和最小化问题在工程等领域有重要的应用。本文通过矩阵的**Kronecker** 积和**Moore-Penrose**广义逆得到了矩阵方程$AXB = C$有轮换解的充要条件和解的表达式。在没有轮换解时，给出了方程的轮换极小范数最小二乘解。在论文末节，给出方程求解的数值算法与数值例子。

关键词

轮换矩阵，极小范数解，最小二乘解，**Moore-Penrose**广义逆，**Kronecker**积

Least Squares Circulant Solution of the Matrix Eqaution $AXB = C$ with the Least Norm

Yuzhe Cao, Shifang Yuan*

School of Mathematics and Computation Science, Wuyi University, Jiangmen Guangdong

Received: Jul. 19^{th}, 2022; accepted: Aug. 19^{th}, 2022; published: Aug. 30^{th}, 2022

* 通讯作者。

文章引用: 曹煜喆, 袁仕芳. 矩阵方程$AXB = C$的轮换极小范数小二乘解[J]. 应用数学进展, 2022, 12(8): 1360-1369.
DOI: 10.12677/pm.2022.128149

Abstract

Circulant matrices have been around for a long time and have been extensively used in many scientific areas. The problem of solving and minimizing the matrix $AXB = C$ in a specific set class has important applications in engineering and other related fields. In this paper, by using Kronecker product and Moore-Penrose generalized inverse of the matrices, the necessary and sufficient conditions for $AXB = C$ having circulant solution are obtained. We derive the expression of the least squares circulant solution of the matrix equation $AXB = C$ with the least norm when there is no circulant solution. In the last section, the numerical algorithm and numerical examples are also given.

Keywords

Circulant Matrix, Least Norm Solution, Least Squares Solution, Moore-Penrose Inverse, The Kronecker Product

1. 引言

线性矩阵方程的求解问题及相应的最小二乘问题是近年来数值代数领域中研究和讨论的重要课题之一, 它在结构设计, 系统识别, 自动控制理等领域中有着广泛的应用.

近年来, 矩阵方程

$$AXB = C \tag{1}$$

及相关方程在对称，反对称，双对称等多种矩阵类中的解和其的最小二乘解的研究取得了不少进展 [1–8]. 线性矩阵方程的最小二乘解一般来说不是唯一的, 但它的极小范数最小二乘解一般来说是唯一的.

为方便描述问题，本文用$\mathbb{C}^{m\times n}$表示$m \times n$阶的复数矩阵集合. A^T表示矩阵A的转置, A^*表示矩阵A的共轭转置, A^+表示矩阵A的Moore-Penrose广义逆, I_n 表示n阶单位矩阵.

定义 1.1. 设$c = (c_0, c_1, \cdots, c_{n-1})^T$是$n$维复数列向量, 称如下矩阵

$$C = \begin{pmatrix} c_0 & c_1 & c_2 & \cdots & c_{n-1} \\ c_{n-1} & c_0 & c_1 & \cdots & c_{n-2} \\ c_{n-2} & c_{n-1} & c_0 & \cdots & c_{n-3} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_1 & c_2 & c_3 & \cdots & c_0 \end{pmatrix} \tag{2}$$

是c的轮换矩阵，并记为

$$C = circ(c) = circ(c_0, c_1, \cdots, c_{n-1}). \tag{3}$$

我们用$cir(n)$表示全体n阶轮换矩阵的集合. 轮换矩阵首次出现1846年Catalan的一篇数学论文中, 与轮换矩阵密切相关的是Toeplitz矩阵. 目前轮换矩阵在密码学, 物理及双曲几何中有着重要的应用. 关于轮换矩阵进一步的性质, 参见文献 [9–11].

定义 1.2. 设$A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{m\times n}$. 记 $a_i = (a_{1i}, a_{2i}, \cdots, a_{mi}), i = 1, 2, \cdots, n$. 把$A$视作列向量的拉直算子记为

$$\mathrm{vec}(A) = (a_1, a_2, \cdots, a_n)^T. \tag{4}$$

对向量$x = (x_1, \cdots, x_n)^T \in \mathbb{C}^{n\times 1}$, $\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2}$表示向量的2-范数. 由向量2-范数诱导如下的矩阵Frobenius 范数

$$\|A\| = \|\mathrm{vec}(A)\|_2. \tag{5}$$

给定矩阵

$$A \in \mathbb{C}^{m\times n}, B \in \mathbb{C}^{n\times s}, C \in \mathbb{C}^{m\times s}. \tag{6}$$

本文将在轮换矩阵类中考虑矩阵方程$AXB = C$的如下问题：

问题 I: 求如下集合

$$T_s = \Big\{X \in \mathbb{C}^{n\times n} : AXB = C\Big\}. \tag{7}$$

问题 II: 若问题I 中$T_s = \emptyset$ (空集), 求如下集合

$$T_l = \Big\{X \in \mathbb{C}^{n\times n} : ||AXB - C|| = \min\Big\}. \tag{8}$$

问题 III: 若问题I 中$T_s = \emptyset$, 求$\widehat{X} \in T_l$使得

$$\|\widehat{X}\|^2 = \min_{X\in T_l} \|X\|^2. \tag{9}$$

本文将在第2节给出轮换矩阵的若干性质和关于矩阵Kronecker积和Moore-Penrose广义逆的几则引理. 在第3节中，我们将利用第2节的相关结论给出矩阵方程$AXB = C$关于以上三个问题中解

的表达式. 在第4节中, 将给出求解的数值算法与数值例子来说明我们算法的可行性.

2. 轮换矩阵的性质和几则引理

由定义1.1 知置换矩阵

$$P=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}=circ(p), \tag{10}$$

其中$p=(0,1,0,\cdots,0)^T$. P是特殊的轮换矩阵，我们称之为移位矩阵. 此矩阵在本文中有着重要的作用.

我们将利用P及向量c来表示轮换矩阵C.

命题 2.1. 为方便计, 规定$P^0=I_n$. 设$C=circ(c)=circ(c_0,c_1,\cdots,c_{n-1})$. 则

$$C=circ(c)=\sum_{k=0}^{n-1}c_kP^k. \tag{11}$$

证明 显然我们有

$$P^2=circ(0,0,1,0,\cdots,0),P^3=circ(0,0,0,1,0,\cdots,0),\cdots,P^n=circ(1,0,\cdots,0)=I_n. \tag{12}$$

由定义1.1 知 $C=circ(c)=\sum_{k=0}^{n-1}c_kP^k$. □

命题 2.2. 设$A=circ(a)=circ(a_0,a_1,\cdots,a_{n-1})$和$B=circ(b)=circ(b_0,b_1,\cdots,b_{n-1})$. 则$AB$是轮换矩阵且

$$AB=BA=C=circ(c_0,c_1,\cdots,c_{n-1}), \tag{13}$$

其中

$$c_k=\sum_{(i,j)\in S_k}a_ib_j,k=0,1,\cdots,n-1,S_k=\{(i,j):i+j=k \mod n\}. \tag{14}$$

证明 由命题2.1知$A=\sum_{i=0}^{n-1}a_iP^i=a_0P^0+a_1P^1+\cdots+a_{n-1}P^{n-1}$和$B=\sum_{j=0}^{n-1}b_jP^j=b_0P^0+b_1P^1+\cdots+b_{n-1}P^{n-1}$ 知$AB=BA$并且

$$C=AB=(a_0P^0+a_1P^1+\cdots+a_{n-1}P^{n-1})(b_0P^0+b_1P^1+\cdots+b_{n-1}P^{n-1})=\sum_{k=0}^{n-1}c_kP^k,$$

其中

$$c_k=a_0b_k+a_1b_{k-1}+\cdots+a_{n-1}b_{k+1},k=0,1,\cdots,n-1.$$

由式(12) 知

$$c_k=\sum_{(i,j)\in S_k}a_ib_j,k=0,1,\cdots,n-1,$$

其中$S_k = \{(i,j) : i+j = k \mod n\}$. □

两轮换矩阵的和是轮换矩阵, 一个复数乘一个轮换矩阵仍是一个轮换矩阵. 由此知,从向量角度来看轮换矩阵的集合是一个线性空间.

定义 2.1. 对$n \geq 2$, 记

$$M_n = \left(\mathrm{vec}(P^0), \mathrm{vec}(P^1), \mathrm{vec}(P^2), \cdots, \mathrm{vec}(P^{n-1})\right) \in \mathbb{R}^{n^2 \times n}. \tag{15}$$

引理 2.1. 设$C = circ(c) = circ(c_0, c_1, \cdots, c_{n-1})$. 则

$$\mathrm{vec}(C) = M_n c. \tag{16}$$

证明 由$C = circ(c) = \sum_{k=0}^{n-1} c_k P^k = c_0 P^0 + c_1 P^1 + \cdots + c_{n-1} P^{n-1}$可得

$$\mathrm{vec}(C) = \mathrm{vec}(P^0)c_0 + \mathrm{vec}(P^1)c_1 + \cdots + \mathrm{vec}(P^{n-1})c_{n-1} = M_n c.$$

□

引理2.1刻画了轮换矩阵的集合是一个线性空间的特征, 为我们研究轮换矩阵提供了工具. 矩阵方程$AXB = C$在轮换矩阵类的解, 其实质是求生成X的向量x. 为此, 我们将把矩阵方程$AXB = C$转化为我们非常熟悉的线性方程. 为转化和求解相应方程, 我们需要下面的定义及引理.

引理 2.2. [12] 设$A \in \mathbb{C}^{m\times n}, b \in \mathbb{C}^m$, 线性方程$Ax = b$有解的充分必要条件是$AA^+b = b$. 有解时方程的通解为

$$x = A^+b + (I_n - A^+A)z, \forall z \in \mathbb{C}^n.$$

引理 2.3. [12] 设$A \in \mathbb{C}^{m\times n}, b \in \mathbb{C}^m$, 则不相容线性方程$Ax = b$的最小二乘解$\{x \in \mathbb{C}^n : \|Ax - b\|_2 = \min\}$为

$$x = A^+b + (I_n - A^+A)z, \forall z \in \mathbb{C}^n.$$

定义 2.2. 设$A = (a_{ij}) \in C^{m\times n}$,$B = (b_{ij}) \in C^{p\times q}$. 称

$$A \otimes B = \begin{pmatrix} a_{11}B & a_{12}B & \cdots & a_{1n}B \\ a_{21}B & a_{22}B & \cdots & a_{2n}B \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1}B & a_{m2}B & \cdots & a_{mn}B \end{pmatrix} \in C^{mp\times nq} \tag{17}$$

为A和B的$Kronecker$积.

引理 2.4. [12] 对矩阵$A \in \mathbb{C}^{m\times n}$, $X \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $B \in \mathbb{C}^{n\times s}$ 有

$$\mathrm{vec}(AXB) = (B^T \otimes A)\mathrm{vec}(X). \tag{18}$$

3. 主要结论

下面我们给出矩阵方程$AXB = C$在轮换矩阵类的有解的充要条件, 并给出解的表达式.

定理 3.1. 给定矩阵$A \in \mathbb{C}^{m\times n}, B \in \mathbb{C}^{n\times s}, C \in \mathbb{C}^{m\times s}$. 令

$$R = (B^T \otimes A)M_n. \tag{19}$$

记

$$X = circ(x) = circ(x_0, x_1, \cdots, x_{n-1}).$$

则矩阵方程$AXB = C$有解的充分必要条件是

$$RR^+\mathrm{vec}(C) = \mathrm{vec}(C). \tag{20}$$

当方程有解时, 方程的通解为

$$T_s = \Big\{X = circ(x) : x = R^+\mathrm{vec}(C) + \big(I_n - R^+R\big)z, \forall z \in \mathbb{C}^n\Big\}. \tag{21}$$

证明 若$AXB = C$, 则有$\mathrm{vec}(AXB) = \mathrm{vec}(C)$. 由引理2.4 和2.1知

$$(B^T \otimes A)M_n x = \mathrm{vec}(C).$$

即

$$Rx = \mathrm{vec}(C). \tag{22}$$

矩阵方程$AXB = C$等价于方程(22). 由引理2.2得矩阵方程$AXB = C$有解的充分必要条件是

$$RR^+\mathrm{vec}(C) = \mathrm{vec}(C).$$

当方程有解时, 其通解为

$$x = R^+\mathrm{vec}(C) + \big(I_n - R^+R\big)z, \forall z \in \mathbb{C}^n.$$

□

当矩阵方程$AXB = C$在轮换矩阵类中无解时, 我们可由如下定理求其最小二乘解.

定理 3.2. 条件和符号同定理3.1. 当$RR^+\mathrm{vec}(C) \neq \mathrm{vec}(C)$时, 矩阵方程$AXB = C$在轮换矩阵类的最小二乘解集$T_l$可表示为

$$T_l = \Big\{X = circ(x) : x = R^+\mathrm{vec}(C) + \big(I_n - R^+R\big)z, \forall z \in \mathbb{C}^n\Big\}. \tag{23}$$

证明 由引理2.1 和2.4知

$$\begin{aligned}
||AXB - C|| &= ||\mathrm{vec}(AXB) - \mathrm{vec}(C)||_2 \\
&= ||(B^T \otimes A)\mathrm{vec}(X) - \mathrm{vec}(C)||_2 \\
&= ||(B^T \otimes A)M_n x - \mathrm{vec}(C)||_2 \\
&= ||Rx - \mathrm{vec}(C)||_2.
\end{aligned}$$

由引理2.3知：$\|AXB-C\|=\min$当且仅当

$$x = R^{+}\mathrm{vec}(C) + \big(I_n - R^{+}R\big)z, \forall z \in \mathbb{C}^n. \tag{24}$$

□

当矩阵方程$AXB=C$在轮换矩阵类中无解时, 我们可由如下定理在上面给出的最小二乘解集找到具有极小范数解.

定理 3.3. 条件和符号同定理3.2, 并令

$$K = I_n - R^{+}R. \tag{25}$$

则矩阵方程$AXB=C$存在唯一的极小范数最小二乘解$\widehat{X}\in T_l$. 记

$$\widehat{X} = circ(\hat{x}).$$

则$\widehat{X}$可表示为

$$\mathrm{vec}(\widehat{X}) = M_n R^{+}\mathrm{vec}(C) - M_n K (M_n K)^{+} M_n R^{+}\mathrm{vec}(C). \tag{26}$$

证明 由引理2.1知

$$\mathrm{vec}(X) = M_n x.$$

由定理3.2知

$$\begin{aligned}\|\widehat{X}\|^2 &= \min_{X\in T_l}\|X\|^2 = \min_{X\in T_l}\left\|\mathrm{vec}(X)\right\|_2^2\\ &= \min_{z}\left\|M_n(I_n - R^{+}R)z - (-M_n R^{+}\mathrm{vec}(C))\right\|_2^2\\ &= \min_{z}\left\|M_n K z - (-M_n R^{+}\mathrm{vec}(C))\right\|_2^2.\end{aligned}$$

由引理2.3知

$$\min_{z}\left\|M_n K z - (-M_n R^{+}\mathrm{vec}(C))\right\|_2^2$$

的解为

$$z = -(M_n K)^{+} M_n R^{+}\mathrm{vec}(C) + [I_n - (M_n K)^{+} M_n K]u, \forall u \in \mathbb{C}^n. \tag{27}$$

将上式代入式(24)得

$$\hat{x} = R^{+}\mathrm{vec}(C) - K(M_n K)^{+} M_n R^{+}\mathrm{vec}(C) + K(I_n - (M_n K)^{+} M_n K)u, \forall u \in \mathbb{C}^n. \tag{28}$$

故有

$$\mathrm{vec}(\widehat{X}) = M_n\hat{x} = M_n R^{+}\mathrm{vec}(C) - M_n K(M_n K)^{+} M_n R^{+}\mathrm{vec}(C).$$

□

4. 数值算法和数值例子

根据定理3.1和定理3.2, 3.3, 现给出问题I到问题III的如下算法.

算法:

(1) 输入$A \in \mathbb{C}^{m\times n}, B \in \mathbb{C}^{n\times s}, C \in \mathbb{C}^{m\times s}$及$M_n$;

(2) 计算出$R = (B^T \otimes A)M_n$;

(3) 若$RR^+Vec(C) = Vec(C)$成立，则问题I 有解; 计算出

$$K = I_n - R^+R$$

和

$$x = R^+Vec(C) + Kz, \forall z \in \mathbb{C}^n,$$

可得问题I 的通解为

$$X = circ(x);$$

(4) 若$RR^+Vec(C) \neq Vec(C)$，则求问题II的解. 计算出

$$x = R^+Vec(C) + Kz, \forall z \in \mathbb{C}^n,$$

可得问题II 的通解为

$$X = circ(x);$$

(5) 计算出

$$\hat{x} = R^+\mathrm{vec}(C) - K(M_nK)^+M_nR^+\mathrm{vec}(C),$$

得到问题III的唯一解

$$\widehat{X} = circ(\hat{x}).$$

例 4.1. 设

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -6 \\ 8 & 5 & 4 \\ 7 & 1 & 3 \\ 12 & 11 & -15 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ -7 & 8 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

及

$$C_1 = \begin{pmatrix} 219 & -49 \\ 71 & 119 \\ 66 & 32 \\ 705 & -91 \end{pmatrix}, \ C_2 = \begin{pmatrix} 140 - 89\mathbf{i} & -65 + 60\mathbf{i} \\ 2 - 50\mathbf{i} & 3 + 250\mathbf{i} \\ -10 - 50\mathbf{i} & 160 + 180\mathbf{i} \\ 400 - 300\mathbf{i} & -5 + 200\mathbf{i} \end{pmatrix}.$$

(1) 当取$C=C_1$时，由计算知

$$R=\begin{pmatrix} -19 & -35 & 56 \\ 1 & -35 & 0 \\ 24 & -36 & -10 \\ -44 & -133 & 161 \\ 22 & -8 & -29 \\ 88 & 94 & 73 \\ 49 & 73 & 43 \\ 118 & 43 & -41 \end{pmatrix},$$

$RR^{+}Vec(C)=Vec(C)$，$K=I_3-R^{+}R=0$ 且

$$R^{+}Vec(E)=(1,-2,3)^T.$$

故问题I 的解为

$$X=circ(1,-2,3).$$

(2) 当取$C=C_2$时，$RR^{+}Vec(C)\neq Vec(C)$ 且

$$R^{+}Vec(C)=x,$$

其中

$$x=(0.4595+1.0952\mathbf{i},-0.7605+1.7234\mathbf{i},1.8766-0.1500\mathbf{i}).$$

因为$K=0$, 故问题II和问题III的解相同, 其为

$$X=circ(0.4595+1.0952\mathbf{i},-0.7605+1.7234\mathbf{i},1.8766-0.1500\mathbf{i}).$$

基金项目

广东省高校自然科学基金重点项目(2019KZDXM025), 五邑大学港澳联合研发基金资助项目(2019WGALH20).

参考文献

[1] Hu, X.Y. and Deng, Y.B. (2003) On the Solutions Optimal Approximation of the Equation $A^TXB=C$ over $ASR^{m\times m}$. *Numerical Mathematics*, **5**, 59-62.

[2] Liao, A.P., Bai, Z.Z. and Lei, Y. (2006) Best Approximate Solution of Matrix Equation $AXB+CXD=E$. *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications*, **27**, 675-688. https://doi.org/10.1137/040615791

[3] 袁仕芳, 廖安平, 雷渊. 矩阵方程AXB + CYD = E的对称极小范数最小二乘解[J]. 计算数学, 2007, 29(2): 203-216.

[4] Yuan, S. and Liao, A. (2014) Least Squares Hermitian Solution of the Complex Matrix Equation AXB + CXD = E with the Least Norm. *Journal of the Franklin Institute*, **351**, 4978-4997. https://doi.org/10.1016/j.jfranklin.2014.08.003

[5] Liu, Z., Zhou, Y., Zhang, Y., *et al.* (2019) Some Remarks on Jacobi and Gauss-Seidel-Type Iteration Methods for the Matrix Equation AXB = C. *Applied Mathematics and Computation*, **354**, 305-307. https://doi.org/10.1016/j.amc.2019.02.014

[6] Dehghan, M. and Shirilord, A. (2019) A Generalized Modified Hermitian and Skew-Hermitian Splitting (GMHSS) Method for Solving Complex Sylvester Matrix Equation. *Applied Mathematics and Computation*, **348**, 632-651. https://doi.org/10.1016/j.amc.2018.11.064

[7] Wu, N.C., Liu, C.Z. and Zuo, Q. (2022) On the Kaczmarz Methods Based on Relaxed Greedy Selection for Solving Matrix Equation AXB = C. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, **413**, Article ID: 114374. https://doi.org/10.1016/j.cam.2022.114374

[8] Safarzadeh, M., Sadeghi Goughery, H. and Salemi, A. (2022) Global-DGMRES Method for Matrix Equation AXB = C. *International Journal of Computer Mathematics*, **99**, 1005-1021. https://doi.org/10.1080/00207160.2021.1942459

[9] 陈景良, 陈向辉. 特殊矩阵[M]. 北京: 清华大学出版社, 2001.

[10] Davis, P.J. (1994) Circulant Matrices. AMS Chelsea Publishing, New York.

[11] Arup, B. and Koushik, S. (2018) Random Circulant Matrices. CRC Press, Boca Raton, FL.

[12] 戴华. 矩阵论[M]. 北京: 科技出版社, 2001.