Pure Mathematics 理论数学, 2023, 13(10), 2908-2915
Published Online October 2023 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2023.1310297

平衡挠积埃尔米特流形

李淑雯[1]，卢晓英[2]，何 勇[1*]，加依达尔 · 里扎别克[1]

[1]新疆师范大学数学科学学院，新疆 乌鲁木齐
[2]陆军边海防学院乌鲁木齐校区，新疆 乌鲁木齐

收稿日期：2023年9月10日；录用日期：2023年10月12日；发布日期：2023年10月23日

摘 要

设 (M_1, g) 和 (M_2, h) 是两个埃尔米特流形，挠积埃尔米特流形 $(M_1 \times {}_f M_2, G)$ 是赋予了埃尔米特度量 $G = g + f^2 h$ 的乘积流形 $M_1 \times M_2$，这里 f 是 $M_1 \times M_2$ 上的光滑函数。本文推导出挠积埃尔米特流形的挠率和挠率(1,0)形式，给出埃尔米特流形$(M_1 \times {}_f M_2, G)$平衡的充分必要条件。

关键词

埃尔米特流形，挠积，平衡流形

Balanced Twisted Product Hermitian Manifold

Shuwen Li[1], Xiaoying Lu[2], Yong He[1*], Jiayidaer · Eryzabk[1]

[1]School of Mathematics Science, Xinjiang Normal University, Urumqi Xinjiang
[2]Urumqi Campus of the Army Academy of Border and Coastal Defence, Urumqi Xinjiang

Received: Sep. 10th, 2023; accepted: Oct. 12th, 2023; published: Oct. 23rd, 2023

* 通讯作者。

文章引用: 李淑雯, 卢晓英, 何勇, 加依达尔 · 里扎别克. 平衡挠积埃尔米特流形[J]. 理论数学, 2023, 13(10): 2908-2915.DOI: 10.12677/pm.2023.1310297

Abstract

Let (M_1, g) and (M_2, h) be two Hermitian manifolds. The twisted product Hermitian manifold $(M_1 \times {}_f M_2, G)$ is the product manifold $M_1 \times M_2$ endowed with the Hermitian metric $G = g + f^2 h$, where f is a positive smooth function on $M_1 \times M_2$. In this paper, the torsion tensor and torsion (1,0) forms of the twisted product Hermitian manifold are derived. Sufficient and necessary conditions are given that $(M_1 \times {}_f M_2, G)$ is balanced.

Keywords

Hermitian Manifold, Twisted Product, Balanced Manifold

1. 引言

埃尔米特流形是黎曼流形的自然推广, 是复几何的主要研究对象. 具有上闭凯勒形式的埃尔米特流形是平衡流形, 也被称为半凯勒流形[1]. 当复维数为1或2时, 每个平衡埃尔米特流形都是凯勒的, 在更高维的情形下, 存在非凯勒的平衡埃尔米特流形[2].

1982年, Michelsohn 系统地研究了平衡流形, 并且构造了3维非凯勒的平衡埃尔米特流形[3]. 2001年, Georgi 证明了紧致平衡埃尔米特流形上存在全纯且调和的1形式[4]. 2004年, Alessandrini 证明了一个在光滑曲线外的紧致凯勒复三维流形具有埃尔米特度量[5]. 2010年, 刘克峰对紧致平衡埃尔米特流形进行了深入研究, 探讨了紧致平衡埃尔米特流形上各种曲率的关系, 给出了平衡流形的消失定理[6]. 2012年, 傅吉祥在非凯勒的 Calabi-Yau 流形族上构造了平衡度量[7]. 上述研究成果表明, 众多学者对于这类特殊埃尔米特流形的研究饶有兴趣, 至今方兴未艾, 所以研究平衡埃尔米特流形具有十分重要的价值和意义.

扭曲积和挠积是几何学中构造具有特殊曲率性质流形的有效方法. 1969年, Bishop 和 O'Neil 为了研究具有负曲率的黎曼流形引入了扭曲积度量[8]. 2001年, Kozma, Peter 和 Varga 将扭曲积的概念推广到芬斯勒几何中[9]. 2016年, 何勇和钟春平将扭曲积的概念推广到了复芬斯勒几何, 系统地研究了复芬斯勒流形的双扭曲积[10]. 2018年, 何勇和张晓玲将扭曲积的概念推广到了复几何, 研究了双扭曲积埃尔米特流形[11]. 2022年, 倪琪慧和何勇等人推导出双扭曲积埃尔米特流形的

Levi-Civita 联络、 Levi-Civita 曲率张量和 Levi-Civita Ricci 曲率张量的局部坐标表达式, 进而给出双扭曲积埃尔米特流形是 Levi-Civita Ricci 平坦流形的充分必要条件[12].

挠积是扭曲积的推广. 1981年, Chen 给出了黎曼几何中挠积的概念[13]. 2006年, Kozma, Peter 和 Shimada 首次提出了挠积芬斯勒度量, 研究了挠积芬斯勒度量的嘉当联络, 测地线及完备性[14]. 2022年, 肖维和何勇将双挠积的概念推广到复芬斯勒流形, 并给出双挠积芬斯勒流形是爱因斯坦流形的充分必要条件[15].

最近, 何勇和李淑雯等将挠积推广到埃尔米特流形, 得到了陈联络、陈曲率、全纯截面曲率等几何量在局部坐标系下的表达式, 并且它们都可以由挠积埃尔米特流形的分量表示, 同时我们获得了构造具有常全纯截面曲率的埃尔米特流形的新方法, 并且给出挠积埃尔米特流形是陈平坦或陈Ricci平坦的充分必要条件.

一个自然的问题是如何刻画挠积埃尔米特流形的挠率和挠率(1,0)形式, 以及探究挠积埃尔米特流形的平衡性. 针对上述问题, 本文将探讨给出挠积埃尔米特流形平衡的充分必要条件.

2. 预备知识

本节主要介绍研究所需的基本概念, 并约定符号.

设 (M, J, G) 是一个n维光滑埃尔米特流形, 其中 G 是埃尔米特度量, J 是复结构. 设 $T^{\mathbb{C}}M$ 是 M 的复切丛, $T^{\mathbb{C}}M = TM \otimes C$ 可分解为[16]

$$T^{\mathbb{C}}M = T^{1,0}M \oplus T^{0,1}M,$$

其中 $T^{1,0}M$ 和 $T^{0,1}M$ 分别是特征值 $\sqrt{-1}$ 和 $-\sqrt{-1}$ 的特征空间.

设 $z = (z^1, \cdots, z^n)$ 是 M 上的局部全纯坐标, 向量场 $\{\partial_\alpha\}$ 和 $\{\partial_{\bar{\alpha}}\}$ 分别是 $T^{1,0}M$ 和 $T^{0,1}M$ 的基, 其中 $\partial_\alpha = \frac{\partial}{\partial z^\alpha}, \partial_{\bar{\alpha}} = \frac{\partial}{\partial \bar{z}^\alpha}$.

在埃尔米特流形 (M, G) 中, G 是 M 上的埃尔米特度量, 具体表示为[3]

$$G = G_{\alpha\beta} dz^\alpha \otimes d\bar{z}^\beta, \tag{2.1}$$

其中$G_{\alpha\beta} = G(\partial_\alpha, \partial_{\bar{\beta}})$.

埃尔米特联络为[3]

$$\nabla(\partial_\beta) = \omega_{\beta\gamma} \otimes \partial_\gamma,$$

其中 $\omega_{\beta\gamma}$ 是复值1形式.

挠率 T 的系数为[3]

$$T^\alpha_{\beta\gamma} = (\partial_\beta G_{\gamma\bar{\epsilon}} - \partial_\gamma G_{\beta\bar{\epsilon}}) G^{\bar{\epsilon}\alpha}, \tag{2.2}$$

$$T_{\beta\gamma\bar{\sigma}} = T^\alpha_{\beta\gamma} G_{\alpha\bar{\sigma}}. \tag{2.3}$$

定义1. [3] 设 (M, G) 是埃尔米特流形, 其挠率(1,0)形式 τ 定义为

$$\tau = \tau_\beta dz^\beta, \tag{2.4}$$

其中

$$\tau_\beta = G^{\overline{\sigma}\gamma} T_{\beta\gamma\overline{\sigma}}. \tag{2.5}$$

定义2. [3] 设 (M, G) 是埃尔米特流形, 若它的挠率(1,0)形式 $\tau = 0$, 则称 M 是平衡的.

设 (M_1, g) 和 (M_2, h) 是两个埃尔米特流形, 并且 $dim_{\mathbb{C}} M_1 = m$, $dim_{\mathbb{C}} M_2 = n$. 设 $M = M_1 \times M_2$, 则 $\dim_{\mathbb{C}} M = m + n$.

设 $z_1 = (z^1, \ldots, z^m) \in M_1$, $z_2 = (z^{m+1}, \ldots, z^{m+n}) \in M_2$, 则 $z = (z_1, z_2) \in M$. 设 $\pi_1 : M_1 \times M_2 \to M_1, \pi_2 : M_1 \times M_2 \to M_2$ 表示自然投影, 即 $\pi_1(z) = z_1$, $\pi_2(z) = z_2$.

设 $T^{1,0}M_1$ 和 $T^{1,0}M_2$ 分别是 M_1 和 M_2 的全纯切丛, 设 $v_1 = (v^1, \cdots, v^m) \in T^{1,0}M_1$, $v_2 = (v^{m+1}, \cdots, v^{m+n}) \in T^{1,0}M_2$, 则 $v = (v_1, v_2) \in T^{1,0}M$. 设 $d\pi_1 : T^{1,0}(M_1 \times M_2) \to T^{1,0}M_1, d\pi_2 : T^{1,0}(M_1 \times M_2) \to T^{1,0}M_2$ 分别表示由 π_1 和 π_2 诱导的全纯切映射, 则 $d\pi_1(z, v) = (z_1, v_1)$, $d\pi_2(z, v) = (z_2, v_2)$.

在本文中, 小写希腊字母指标 $\alpha, \beta, \gamma, \cdots$ 的变化范围是从1到m+n, 小写拉丁字母指标 $i, j, k, s, \cdots$ 的变化范围是从1到m, 带撇号的小写拉丁字母指标 $i', j', k', s', \cdots$ 的变化范围是从m+1到m+n. 另外, 为了便于区分 (M_1, g) 和 (M_2, h) 上的几何量, 本文在其正上方分别加指标1和2, 如 $\overset{1}{T}{}^{l}_{jk}$, $\overset{2}{T}{}^{l'}_{j'k'}$ 分别表示 (M_1, g) 和 (M_2, h) 的挠率系数.

定义3. 设 (M_1, g) 和 (M_2, h) 是两个埃尔米特流形. $f : M_1 \times M_2 \to (0, +\infty)$ 是正值光滑函数. 挠积埃尔米特流形 $(M_1 \times {}_f M_2, G)$ 是赋予了如下度量 $G : TM \to (0, +\infty)$ 的乘积流形 $M = M_1 \times M_2$:

$$G(z, v) = g(\pi_1(z), d\pi_1(v)) + f^2 h(\pi_2(z), d\pi_2(v)), \tag{2.6}$$

其中 $z = (z_1, z_2) \in M$, $v = (v_1, v_2) \in T^{1,0}M$. f 被称为挠函数, 常简称 G 为挠积埃尔米特度量.

若 f 仅为 M_1 上的函数, 则 $(M_1 \times_f M_2, G)$ 是扭曲积埃尔米特流形. 若 f 仅为 M_2 上的函数, 则 $(M_1 \times_f M_2, G)$ 是乘积埃尔米特流形.

G 的基本张量矩阵 $(G_{\alpha\overline{\beta}})$ 为

$$(G_{\alpha\overline{\beta}}) = \begin{pmatrix} g_{i\overline{j}} & 0 \\ 0 & f^2 h_{i'\overline{j'}} \end{pmatrix}, \tag{2.7}$$

其逆矩阵 $(G^{\bar{\beta}\alpha})$ 为

$$(G^{\overline{\beta}\alpha}) = \begin{pmatrix} g^{\overline{j}i} & 0 \\ 0 & f^{-2} h^{\overline{j'}i'} \end{pmatrix}. \tag{2.8}$$

3. 挠积埃尔米特流形的挠率

本节将推导挠积埃尔米特流形的挠率和挠率(1,0)形式在局部坐标系下的表达式.

命题1. 设 $(M_1 \times {}_f M_2, G)$ 是挠积埃尔米特流形, 则

$$T^{l}_{jk} = \overset{1}{T}{}^{l}_{jk}, \tag{3.1}$$

$$T^{l'}_{j'k} = -2f^{-1}\delta^{l'}_{j'}\partial_k f, \tag{3.2}$$

$$T^{l'}_{jk'} = 2f^{-1}\delta^{l'}_{k'}\partial_j f, \tag{3.3}$$

$$T^{l'}_{j'k'} = 2f^{-1}(\delta^{l'}_{k'}\partial_{j'} f - \delta^{l'}_{j'}\partial_{k'} f) + \overset{2}{T}{}^{l'}_{j'k'}, \tag{3.4}$$

$$T^{l'}_{jk} = T^{l}_{j'k} = T^{l}_{jk'} = T^{l}_{j'k'} = 0. \tag{3.5}$$

证明. 令(2.2)中 $\alpha = l', \beta = j', \gamma = k'$, 可得

$$T^{l'}_{j'k'} = (\partial_{j'}G_{k'\bar{i}} - \partial_{k'}G_{j'\bar{i}})G^{\bar{i}l'} + (\partial_{j'}G_{k'\overline{i'}} - \partial_{k'}G_{j'\overline{i'}})G^{\overline{i'}l'}, \tag{3.6}$$

将(2.7)和(2.8)代入(3.6), 有

$$\begin{aligned}
T^{l'}_{j'k'} &= [\partial_{j'}(f^2 h_{k'\overline{i'}}) - \partial_{k'}(f^2 h_{j'\overline{i'}})]f^{-2}h^{\overline{i'}l'} \\
&= (2fh_{k'\overline{i'}}\partial_{j'} f + f^2\partial_{j'}h_{k'\overline{i'}} - 2fh_{j'\overline{i'}}\partial_{k'} f - f^2\partial_{k'}h_{j'\overline{i'}})f^{-2}h^{\overline{i'}l'} \\
&= 2f^{-1}(\delta^{l'}_{k'}\partial_{j'} f - \delta^{l'}_{j'}\partial_{k'} f) + (\partial_{j'}h_{k'\overline{i'}} - \partial_{k'}h_{j'\overline{i'}})h^{\overline{i'}l'} \\
&= 2f^{-1}(\delta^{l'}_{k'}\partial_{j'} f - \delta^{l'}_{j'}\partial_{k'} f) + \overset{2}{T}{}^{l'}_{j'k'}.
\end{aligned}$$

同理可得(3.1)-(3.3), (3.5)成立, 证毕. □

命题2. 设 $(M_1 \times {}_f M_2, G)$ 是挠积埃尔米特流形, 则

$$T_{jk\bar{s}} = \overset{1}{T}_{jk\bar{s}}, \tag{3.7}$$

$$T_{j'k\overline{s'}} = -2fh_{j'\overline{s'}}\partial_k f, \tag{3.8}$$

$$T_{jk'\overline{s'}} = 2fh_{k'\overline{s'}}\partial_j f, \tag{3.9}$$

$$T_{j'k'\overline{s'}} = 2f(h_{k'\overline{s'}}\partial_{j'} f - h_{j'\overline{s'}}\partial_{k'} f) + f^2\overset{2}{T}_{j'k'\overline{s'}}, \tag{3.10}$$

$$T_{j'k\bar{s}} = T_{jk'\bar{s}} = T_{jk\overline{s'}} = T_{j'k'\bar{s}} = 0. \tag{3.11}$$

证明. 令(2.3)中 $\beta = j', \gamma = k', \sigma = s'$, 可得

$$T_{j'k'\overline{s'}} = T^{l}_{j'k'}G_{l\overline{s'}} + T^{l'}_{j'k'}G_{l'\overline{s'}}. \tag{3.12}$$

将(2.7)和(3.4)代入(3.12), 有

$$\begin{aligned}
T_{j'k'\overline{s'}} &= [2f^{-1}(\delta_{k'}^{l'}\partial_{j'}f - \delta_{j'}^{l'}\partial_{k'}f) + \overset{2}{T}{}_{j'k'}^{l'}]f^2 h_{l'\overline{s'}} \\
&= 2f(h_{k'\overline{s'}}\partial_{j'}f - h_{j'\overline{s'}}\partial_{k'}f) + f^2\overset{2}{T}{}_{j'k'}^{l'}h_{l'\overline{s'}} \\
&= 2f(h_{k'\overline{s'}}\partial_{j'}f - h_{j'\overline{s'}}\partial_{k'}f) + f^2\overset{2}{T}{}_{j'k'\overline{s'}}.
\end{aligned}$$

同理可得(3.7)-(3.9), (3.11)成立, 证毕. □

命题3. 设 $(M_1 \times {}_f M_2, G)$ 是挠积埃尔米特流形, 则

$$\tau_j = \overset{1}{\tau}_j + 2\partial_j(\ln f), \tag{3.13}$$

$$\tau_{j'} = \overset{2}{\tau}_{j'}. \tag{3.14}$$

证明. 令(2.5)中 $\beta = j'$, 可得

$$\tau_{j'} = G^{\bar{s}k}T_{j'k\bar{s}} + G^{\overline{s'}k}T_{j'k\overline{s'}} + G^{\bar{s}k'}T_{j'k'\bar{s}} + G^{\overline{s'}k'}T_{j'k'\overline{s'}}, \tag{3.15}$$

将(2.8)、(3.10)和(3.11)代入(3.15), 有

$$\begin{aligned}
\tau_{j'} &= f^{-2}h^{\overline{s'}k'}[2f(h_{k'\overline{s'}}\partial_{j'}f - h_{j'\overline{s'}}\partial_{k'}f) + f^2\overset{2}{T}{}_{j'k'\overline{s'}}] \\
&= 2f^{-1}(\partial_{j'}f - \partial_{j'}f) + h^{\overline{s'}k'}\overset{2}{T}{}_{j'k'\overline{s'}} \\
&= \overset{2}{\tau}_{j'}.
\end{aligned}$$

同理可得(3.13)成立, 证毕. □

4. 平衡埃尔米特流形

本节将研究挠积埃尔米特流形的平衡性.

定理1. 设 $(M_1 \times {}_f M_2, G)$ 是挠积埃尔米特流形, 则挠积埃尔米特流形 $(M_1 \times {}_f M_2, G)$ 是平衡的当且仅当 M_2 是平衡的, 且 $\overset{1}{\tau}_j = -2\partial_j(\ln f)$.

证明. 根据定义2和(2.4)可知, $(M_1 \times {}_f M_2, G)$ 是平衡的当且仅当

$$\tau_\beta = 0. \tag{4.1}$$

结合命题3, (4.1)等价于以下方程

$$\begin{cases} \overset{1}{\tau}_j + 2\partial_j(\ln f) = 0, \\ \overset{2}{\tau}_{j'} = 0. \end{cases} \tag{4.2}$$

(4.2)意味着 $\overset{1}{\tau}_j = -2\partial_j(\ln f)$ 且 M_2 是平衡的, 证毕. □

根据定理1可得下述推论

推论1. 如果 $\partial_j(\ln f)=0$, 则挠积埃尔米特流形 $(M_1 \times {}_f M_2, G)$ 是平衡的当且仅当 (M_1, g) 和 (M_2, h) 都是平衡的.

证明. 由定理1可知, 挠积埃尔米特流形 $(M_1 \times {}_f M_2, G)$ 是平衡的当且仅当

$$\begin{cases} \overset{1}{\tau}_j + 2\partial_j(\ln f) = 0, \\ \overset{2}{\tau}_{j'} = 0. \end{cases} \tag{4.3}$$

将 $\partial_j(\ln f)=0$ 代入(4.3)的第一式, 可得(4.3)等价于

$$\begin{cases} \overset{1}{\tau}_j = 0, \\ \overset{2}{\tau}_{j'} = 0. \end{cases} \tag{4.4}$$

由定义2和(2.4)可知, (4.4)意味着 (M_1, g) 和 (M_2, h) 都是平衡的, 证毕. □

5. 结论

本文给出挠积埃尔米特流形的挠率和挠率(1,0)形式在局部坐标系下的表达式, 得到挠积埃尔米特流形是平衡的充分必要条件, 即 M_2 是平衡的, 且 $\overset{1}{\tau}_j = -2\partial_j(\ln f)$, 从而得到一种构造平衡埃尔米特流形的有效方法. 后期我们将通过求解上述偏微分方程, 给出平衡埃尔米特流形的具体例子.

基金项目

国家自然科学基金项目 (12261088, 11761069), 新疆师范大学研究生科研创新基金项目 (XSY202301013).

参考文献

[1] Liu, K.F. and Yang, X.K. (2012) Geometry of Hermitian Manifolds. *International Journal of Mathematics*, **23**, Article 1250055. https://doi.org/10.1142/S0129167X12500553

[2] Calabi, E. and Eckmann, B. (1953) A Class of Compact, Complex Manifolds Which Are Not Algebraic. *Annals of Mathematics*, **58**, 494-500. https://doi.org/10.2307/1969750

[3] Michelsohn, M.L. (1982) On the Existence of Special Metrics in Complex Geometry. *Acta Mathematica*, **149**, 261-295. https://doi.org/10.1007/BF02392356

[4] Ganchev, G. and Ivanov, S. (2001) Harmonic and Holomorphic 1-Forms on Compact Balanced Hermitian Manifolds. *Differential Geometry and Its Applications*, **14**, 79-93. https://doi.org/10.1016/S0926-2245(00)00039-5

[5] Alessandrini, L. and Bassanelli, G. (2004) A Class of Balanced Manifolds. *Proceedings of the Japan Academy, Series A, Mathematical Sciences*, **80**, 6-7. https://doi.org/10.3792/pjaa.80.6

[6] Liu, K.F. and Yang, X.K. (2012) Geometry of Hermitian Manifolds. *International Journal of Mathematics*, **23**, Article 1250055. https://doi.org/10.1142/S0129167X12500553

[7] Fu, J., Li, J. and Yau, S.T. (2012) Balanced Metrics on Non-Kähler Calabi-Yau Threefolds. *Journal of Differential Geometry*, **90**, 81-129. https://doi.org/10.4310/jdg/1335209490

[8] Bishop, R.L. and O'Neill, B. (1969) Manifolds of Negative Curvature. *Transactions of the American Mathematical Society*, **145**, 1-49. https://doi.org/10.1090/S0002-9947-1969-0251664-4

[9] Kozma, L., Peter, I.R. and Varga, C. (2001) Warped Product of Finsler-Manifolds. *Annales University Scientiarum Budapestinensis de Rolando Eötvös Nominatae. Sectio Mathematica*, **44**, 157-170.

[10] He, Y. and Zhong, C. (2016) On Doubly Warped Product of Complex Finsler Manifolds. *Acta Mathematica Scientia*, **36**, 1747-1766. https://doi.org/10.1016/S0252-9602(16)30103-5

[11] He, Y. and Zhang, X.L. (2018) On Doubly Warped Product of Hermitian Manifolds. *Acta Mathematica Sinica, Chinese Series*, **61**, 835-842.

[12] Ni, Q.H., He, Y., Yang, J.H. and Zhang, H. (2022) Levi-Civita Ricci-Flat Doubly Warped Product Hermitian Manifolds. *Advances in Mathematical Physics*, **509**, Article 125981. https://doi.org/10.1155/2022/2077040

[13] Chen, B.Y. (1981) Geometry of Submanifolds and Its Applications. Science University of Tokyo, Tokyo.

[14] Kozma, L., Peter, I.R. and Shimada, H. (2006) On the Twisted Product of Finsler Manifolds. *Reports on Mathematical Physics*, **57**, 375-383. https://doi.org/10.1016/S0034-4877(06)80028-5

[15] Xiao, W., He, Y., Tian, C., *et al.* (2022) Complex Einstein-Finsler Doubly Twisted Product Metrics. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **509**, Article 125981. https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2021.125981

[16] Liu, K. and Yang, X. (2017) Ricci Curvatures on Hermitian Manifolds. *Transactions of the American Mathematical Society*, **369**, 5157-5196. https://doi.org/10.1090/tran/7000