Pure Mathematics 理论数学, 2023, 13(3), 405-415
Published Online March 2023 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2023.133044

带混合非线性项的非线性薛定谔方程驻波解的强不稳定性

赵利芳

西北师范大学数学与统计学院，甘肃 兰州

收稿日期：2023年1月31日；录用日期：2023年3月1日；发布日期：2023年3月8日

摘 要

本文主要研究了如下带有混合的幂形式和卷积形式非线性项的非线性薛定谔方程驻波解的强不稳定性

$$i\partial_t\psi+\Delta\psi+a|\psi|^q\psi+\frac{1}{|x|^\alpha}\left(\int_{\mathbb{R}^N}\frac{|\psi|^p}{|x-y|^\mu|y|^\alpha}dy\right)|\psi|^{p-2}\psi=0,\ (t,x)\in[0,T^*)\times\mathbb{R}^N.$$

其中 $N\geq 3$，$0<\mu<N$，$a\geq 0$，$2\alpha+\mu\leq N$，$0<q<\frac{4}{N}$， $2-\frac{2\alpha+\mu}{N}<p<\frac{2N-2\alpha-\mu}{N-2}$，$0<T^*\leq\infty$，并且 $\psi(t,x):[0,T^*)\times\mathbb{R}^N\to\mathbb{C}$ 是复值函数．当 $a=0$，$\frac{2+2N-2\alpha-\mu}{N}<p<\frac{2N-2\alpha-\mu}{N-2}$ 时，通过建立爆破准则，证明了驻波解的强不稳定性。

关键词

非线性薛定谔方程，驻波解，爆破准则，强不稳定性

Strong Instability of Standing Wave Solutions for the Nonlinear Schrödinger Equation with Mixed Nonlinearities

Lifang Zhao

College of Mathematics and Statistics, Northwest Normal University, Lanzhou Gansu

文章引用: 赵利芳. 带混合非线性项的非线性薛定谔方程驻波解的强不稳定性[J]. 理论数学, 2023, 13(3): 405-415.
DOI: 10.12677/pm.2023.133044

Received: Jan. 31^{st}, 2023; accepted: Mar. 1^{st}, 2023; published: Mar. 8^{th}, 2023

Abstract

In this paper, we consider the strong instability of standing wave solutions for the nonlinear Schrödinger equation with mixed power-type and Choquard-type nonlinearities

$$i\partial_t\psi + \Delta\psi + a|\psi|^q\psi + \frac{1}{|x|^\alpha}\left(\int_{\mathbb{R}^N}\frac{|\psi|^p}{|x-y|^\mu|y|^\alpha}dy\right)|\psi|^{p-2}\psi = 0, \quad (t,x)\in[0,T^*)\times\mathbb{R}^N.$$

Where $N \geq 3$, $0<\mu<N$, $a\geq 0$, $2\alpha+\mu\leq N$, $0<q<\frac{4}{N}$, $2-\frac{2\alpha+\mu}{N}<p<\frac{2N-2\alpha-\mu}{N-2}$, and $\psi(t,x):[0,T^*)\times\mathbb{R}^N\to\mathbb{C}$ is the complex function with $0<T^*\leq\infty$. When $a=0$ and $\frac{2+2N-2\alpha-\mu}{N}<p<\frac{2N-2\alpha-\mu}{N-2}$, we prove the strong instability of standing wave solutions by using blow-up criterion.

Keywords

Nonlinear Schrödinger Equation, Standing Wave Solutions, Blow-Up Criterion, Strong Instability

1. 引言及主要结果

本文主要研究了如下带有混合的幂形式和卷积形式非线性项的非线性薛定谔方程

$$\begin{cases} i\partial_t\psi + \Delta\psi + a|\psi|^q\psi + \frac{1}{|x|^\alpha}(\int_{\mathbb{R}^N}\frac{|\psi|^p}{|x-y|^\mu|y|^\alpha}dy)|\psi|^{p-2}\psi = 0, & (t,x)\in[0,T^*)\times\mathbb{R}^N, \\ \psi(0)=\psi_0\in H^1(\mathbb{R}^N), \end{cases} \tag{1.1}$$

其中 $N\geq 3$, $0<\mu<N$, $a\geq 0$, $2\alpha+\mu\leq N$, $0<q<\frac{4}{N}$, $2-\frac{2\alpha+\mu}{N}<p<\frac{2N-2\alpha-\mu}{N-2}$, $0<T^*\leq\infty$, 并且 $\psi(t,x):[0,T^*)\times\mathbb{R}^N\to\mathbb{C}$ 是复值函数.

方程 (1.1) 具有很多的物理背景. 当 $a=0$, $\alpha=0$ 且 $p=2$ 时, 该方程被称为 Hartree 方程, 该方程相应的柯西问题已经在文献 [1–3] 中研究. 当 $N=3$, $a=0$, $\alpha=0$, $p=2$ 且 $\mu=2$ 时, Pekar 在文献 [4] 中引入该方程用来描述在数学物理中关于静止极化子的量子理论. 与此同时, P.

Lions 在文献 [5] 中应用该方程描述一个困在自己磁极中的电子, 在某种程度下, 这种现象近似于关于单组分等离子体的 Hartee-Fock 理论. 此外, R. Penrose 在文献 [6] 中提出这个方程用来描述自引力物质的模型, 在这种情形下量子态的减少被认为是一种引力现象. 因此, 该方程通常又被称为 Schrödinger-Newton 方程. 最近, 这类方程已经在文献 [7–15] 中被广泛研究.

本文主要研究方程 (1.1) 的驻波解, 即形如 $\psi(t,x) = e^{i\omega t}u(x)$ 的解，其中 $\omega \in \mathbb{R}$ 是频率, $u \in H^1(\mathbb{R}^n)$ 是如下椭圆方程的非平凡解

$$-\Delta u + \omega u = a|u|^q u + \left(|x|^{-\mu} * \left(\frac{1}{|x|^\alpha}|u|^p\right)\right)\frac{1}{|x|^\alpha}|u|^{p-2}u. \tag{1.2}$$

椭圆方程 (1.2) 相对应的作用泛函与能量泛函为:

$$S_\omega(u) := E(u) + \frac{\omega}{2}\int_{\mathbb{R}^N}|u|^2dx, \tag{1.3}$$

$$E(u) := \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla u|^2dx - \frac{a}{q+2}\int_{\mathbb{R}^N}|u|^{q+2}dx - \frac{1}{2p}\int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N}\frac{|u|^p|u|^p}{|x|^\alpha|x-y|^\mu|y|^\alpha}dxdy.$$

我们同时定义下列泛函

$$\begin{aligned} K_\omega(u) :&= \partial_\lambda S_\omega(\lambda u)|_{\lambda=1} \\ &= ||\nabla u||^2_{L^2} + \omega||u||^2_{L^2} - a||u||^{q+2}_{L^{q+2}} - \int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N}\frac{|u|^p|u|^p}{|x|^\alpha|x-y|^\mu|y|^\alpha}dxdy, \end{aligned} \tag{1.4}$$

和

$$\begin{aligned} Q(u) :&= \partial_\lambda S_\omega(u^\lambda)|_{\lambda=1} \\ &= ||\nabla u||^2_{L^2} - \frac{a\alpha_1}{q+2}||u||^{q+2}_{L^{q+2}} - \frac{\alpha_2}{2p}\int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N}\frac{|u|^p|u|^p}{|x|^\alpha|x-y|^\mu|y|^\alpha}dxdy, \end{aligned} \tag{1.5}$$

其中

$$u^\lambda(x) := \lambda^{\frac{N}{2}}u(\lambda x),\ \alpha_1 := \frac{Np_1}{2},\ \alpha_2 := Np - 2N + 2\alpha + \mu. \tag{1.6}$$

下面, 我们定义 (1.2) 的非平凡解的集合为

$$\mathcal{A}_\omega := \{u_\omega \in H^1\backslash\{0\},\ S'_\omega(u_\omega) = 0\}.$$

定义 1.1 （基态解 [1]）若 $u_\omega \in \mathcal{A}_\omega$ 是 S_ω 在集合 $\mathcal{A}_\omega$ 上的极小化能量解, 则

$$\mathcal{G}_\omega := \{u_\omega \in \mathcal{A}_\omega,\ S_\omega(u_\omega) \le S_\omega(v_\omega),\ \forall v_\omega \in \mathcal{A}_\omega\}.$$

定义 1.2 （强不稳定性 [1]）. 若对于任意的 $\varepsilon > 0$, 存在 $\psi_0 \in H^1$ 使得 $||\psi_0 - u||_{H^1} < \varepsilon$, 并且以 ψ_0 为初值的解 $\psi(t)$ 在有限时间内爆破, 则驻波解 $e^{i\omega t}u_\omega(x)$ 强不稳定.

根据强不稳定性的定义1.2, 我们首先回顾一些非线性薛定谔方程的经典结论. 对于经典的非线性薛定谔方程, 如果我们假设初值 $\psi_0 \in \Sigma := \{\psi_0 \in H^1,\ x\psi_0 \ \in\ L^2\}$, 则方差-维里定律成立, 即:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_{\mathbb{R}^N} |x|^2|\psi(t,x)|^2 dx = 2Im\int_{\mathbb{R}^N} \overline{\psi}(t,x)x\cdot\nabla\psi(t,x)dx. \tag{1.7}$$

通过使用维里恒等式和 (1.7)式, 可知能量泛函 $E(\psi_0) < 0$, 这意味着非线性薛定谔存在爆破解, 可见文献 [1].

此外, 我们再回顾一些强不稳定性的相关结论. 驻波解的强不稳定性是 Berestycki 和 Cazenave 在文献 [16] 中首次提出的. 随后, Le Coz 在文献 [17] 中给出了另一种简易证明. 事实上, 要证明驻波解的强不稳定性关键在于建立爆破准则, 主要方法是运用 Pohozaev 流形 $\mathcal{N} := \{v \in H^1,\ Q(v) = 0\}$ 上基态解的变分刻画, 我们可以获得关键估计, 即:

$$Q(\psi(t)) \leq 2(S_\omega(\psi_0) - S_\omega(u_\omega)).$$

随后, 基于维里恒等式和初值 ψ_0 可得

$$\frac{d^2}{dt^2}||x\psi(t)||_{L^2}^2 = 8Q(\psi(t)) \leq 16(S_\omega(\psi_0) - S_\omega(u_\omega)) < 0,$$

其中, $Q(\psi(t))$ 由(1.5)式定义. 由此可得方程(1.1)的解 $\psi(t)$ 在有限时间内爆破, 参考文献 [18–20].

最近, Chen 和 Guo 在文献 [21] 中研究了 $a = 0$, $\alpha = 0$, $N = 3$, $p = 2$ 的情形下解的存在性和驻波解的强不稳定性. Shi 在文献 [22] 中系统的运用集中紧性引理证明了方程(1.1)的驻波解在 L^2-次临界, L^2-临界和 L^2-超临界情形下驻波解的存在性和轨道稳定性. 因此, 在 L^2-超临界的情形下, 方程(1.1)的驻波解是否在有限时间内爆破, 是否存在强不稳定的驻波解就是一个值得研究的问题.

本文主要研究方程(1.1)的基态驻波解的强不稳定性, 我们考虑 $a = 0$ 的情形, 通过基态解的变分刻画, 建立爆破准则, 从而证明驻波解的强不稳定性, 主要结果如下:
设 $a = 0$, $u_\omega(x) = \omega^{\frac{1}{p-2}}\widetilde{u}(\omega^{\frac{1}{2}}x)$, 则 $\widetilde{u}$ 满足方程

$$\Delta\widetilde{u} - \widetilde{u} = \Big(|x|^{-\mu} * (\frac{1}{|x|^\alpha}|\widetilde{u}|^p)\Big)\frac{1}{|x|^\alpha}|\widetilde{u}|^{p-2}\widetilde{u}. \tag{1.8}$$

特殊的, 通过计算我们可知

$$E(u_\omega)^{s_c}||u_\omega||_{L^2}^{2(1-s_c)} = E(\widetilde{u})^{s_c}||\widetilde{u}||_{L^2}^{2(1-s_c)}, \tag{1.9}$$

$$||\nabla u_\omega||_{L^2}^{s_c}||u_\omega||_{L^2}^{1-s_c} = ||\nabla\widetilde{u}||_{L^2}^{s_c}||\widetilde{u}||_{L^2}^{1-s_c}, \tag{1.10}$$

其中,

$$s_c = \frac{N}{2} - \frac{2+N-2\alpha-\mu}{2(p-1)}.$$

定理 1.1 设 $N \geq 3$, $\frac{2+2N-2\alpha-\mu}{N} < p < \frac{2N-2\alpha-\mu}{N-2}$. 设 $\psi \in C([0,T^*), H^1)$ 是方程(1.1)在 $a = 0$

时的解, 若 $E(\psi_0) > 0$ 且

$$\begin{cases} E(\psi_0)^{s_c}||\psi_0||_{L^2}^{2(1-s_c)} < E(u)^{s_c}||u||_{L^2}^{2(1-s_c)}, \\ ||\nabla\psi_0||_{L^2}^{s_c}||\psi_0||_{L^2}^{1-s_c} > ||\nabla u||_{L^2}^{s_c}||u||_{L^2}^{1-s_c}, \end{cases} \tag{1.11}$$

其中, u 是(1.8)的基态解, 则方程(1.1)的驻波解 $\psi(t)$ 在有限时间内爆破.

定理 1.2 令 $a = 0$, $N \geq 3$, $0 < \mu < N$, $\alpha \geq 0$, $2\alpha + \mu \leq N$, $\frac{2+2N-2\alpha-\mu}{N} < p < \frac{2N-2\alpha-\mu}{N-2}$, 且 u_ω 是(1.2)的基态解, 则基态驻波解 $\psi(t,x) = e^{i\omega t}u_\omega(x)$ 是强不稳定的.

本文的组织结构如下: 在第二节中, 我们给出了一些预备知识. 在第三节中, 我们将证明定理1.1. 在第四节中, 我们将证明定理1.2.

2. 预备知识

本小节我们主要回顾了一些已知结果.

引理 2.1 (局部适定性 [2]) 设 $N \geq 3$, $0 < \mu < N$, $\alpha \geq 0$, $2\alpha + \mu \leq N$, $0 < q < \frac{4}{N-2}$, $2 - \frac{2\alpha+\mu}{N} < p < \frac{2N-2\alpha-\mu}{N-2}$. 若 $\psi_0 \in H^1(\mathbb{R}^N)$, 则存在 $T = T(\|\psi_0\|_{H^1})$ 使得方程(1.1)存在唯一解 $\psi \in C([0,T), H^1)$. 再令 $[0, T^*)$ 是解 $\psi(t)$ 的极大存在区间, 若 $T^* < \infty$, 则 $\lim\limits_{t\to T^*}\|\psi(t)\|_{H^1} = \infty$. 另外, $\psi(t)$ 满足质量与能量守恒, 即对于任意的 $0 \leq t < T^*$, 有

$$\|\psi(t)\|_{L^2}^2 = \|\psi_0\|_{L^2}^2, \quad E(\psi(t)) = E(\psi_0).$$

引理 2.2 (Brézis-Lieb 引理 [23]) 设 $0 < p < \infty$. 如果 $\{f_n\}$ 是一个 $L^p(\mathbb{R}^N)$ 空间上的有界序列, 且满足 $\{f_n\}$ 在 $L^p(\mathbb{R}^N)$ 空间上几乎处处收敛于 f, 则有

$$\lim_{n\to+\infty}(||f_n||_{L^p}^p - ||f_n - f||_{L^p}^p - ||f||_{L^p}^p) = 0.$$

相似的, 有

$$\begin{aligned} &\lim_{n\to+\infty}\int_{\mathbb{R}^N}\left(|x|^{-\mu} * \left(\frac{1}{|x|^\alpha}|f_n|^p\right)\right)\frac{1}{|x|^\alpha}|f_n|^{p-2}f_n \\ &= \int_{\mathbb{R}^N}\left(|x|^{-\mu} * \left(\frac{|f_n - f|^p}{|x|^\alpha}\right)\right)\frac{|f_n - f|^{p-2}}{|x|^\alpha}|f_n - f| + \int_{\mathbb{R}^N}\left(|x|^{-\mu} * \left(\frac{1}{|x|^\alpha}|f|^p\right)\right)\frac{1}{|x|^\alpha}|f|^{p-2}f. \end{aligned}$$

引理 2.3 (Hardy-Littlewood-Sobolev 不等式 [24]) 设 $N \geq 3$, $p > 1$, $r > 1$, $0 < \mu < N$, $\alpha \geq 0$, $2\alpha + \mu \leq N$, $u \in L^p(\mathbb{R}^N)$, $v \in L^r(\mathbb{R}^N)$, 则, 存在一个常数 $C(\alpha,\mu,N,p,r)$ 满足

$$\left|\int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N}\frac{u(x)v(y)}{|x|^\alpha|x-y|^\mu|y|^\alpha}dxdy\right| \leq C(\alpha,\mu,N,p,r)\|u\|_{L^p(\mathbb{R}^N)}\|v\|_{L^r(\mathbb{R}^N)},$$

其中 $\frac{1}{p} + \frac{1}{r} + \frac{2\alpha+\mu}{N} = 2$.

引理 2.4 (Gagliardo-Nirenberg 不等式 [22]) 设 $N \geq 3$, $0 < \mu < N$, $\alpha \geq 0$, $2\alpha + \mu \leq N$,

$2-\frac{2\alpha+\mu}{N}<p<\frac{2N-2\alpha-\mu}{N-2}$, 则

$$\int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N}\frac{|u|^p|u|^p}{|x|^\alpha|x-y|^\mu|y|^\alpha}dxdy\le C_{\alpha,\mu,p}||u||_{L^2}^{2p-Np+2N-2\alpha-\mu}||\nabla u||_{L^2}^{Np-2N+2\alpha+\mu},$$

其中, 最佳常数为

$$C_{\alpha,\mu,p}=\frac{2p}{2p-Np+2N-2\alpha-\mu}\left(\frac{2p-Np+2N-2\alpha-\mu}{Np-2N+2\alpha+\mu}\right)^{\frac{Np-2N+2\alpha+\mu}{2}}||Q_p||_{L^2}^{2-2p},$$

其中, Q_p 是如下椭圆方程的基态解

$$-\Delta Q_p+Q_p=\frac{1}{|x|^\alpha}\Big(|x|^{-\mu}*(\frac{1}{|x|^\alpha}|Q_p|^p)\Big)|Q_p|^{p-2}Q_p.$$

特殊的, 在 L^2-临界的情形下, 即: $p=\frac{2+2N-2\alpha-\mu}{N}$ 时, 最佳常数为 $C_{\alpha,\mu,p}=p\|Q\|_{L^2}^{2-2p}$.
此外, 以下 Pohožaev 恒等式成立:

$$\begin{aligned}||\nabla Q_p||_{L^2}^2&=\frac{2p-Np+2N-2\alpha-\mu}{Np-2N+2\alpha+\mu}||Q_p||_{L^2}^2\\&=\frac{Np-2N+2\alpha+\mu}{2p}\int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N}\frac{|Q_p|^p|Q_p|^p}{|x|^\alpha|x-y|^\mu|y|^\alpha}dxdy.\end{aligned}$$

3. 爆破准则

本小节我们证明定理1.1.

首先, 我们假设 $\psi_0\in H^1$, $\psi\in C([0,T^*]),H^1)$ 是方程(1.1)的解, 且存在 $\delta>0$ 使得

$$\sup_{t\in[0,T^*)}K(\psi(t))\le-\delta<0, \tag{3.1}$$

则, 驻波解 $\psi(t)$ 在有限时间内爆破, 即: $T^*<+\infty$.
在 L^2-超临界的情形下, 即: $s_c>0$, 我们考虑 $E(\psi_0)\ge 0$ 的情形, 由(1.11)式可知

$$\begin{cases}E(\psi_0)^{s_c}||\psi_0||_{L^2}^{2\sigma}<E(u)^{s_c}||u||_{L^2}^{2\sigma},\\ \\ ||\nabla\psi_0||_{L^2}||\psi_0||_{L^2}^{\sigma}>||\nabla u||_{L^2}||u||_{L^2}^{\sigma},\end{cases} \tag{3.2}$$

其中,

$$\sigma:=\frac{1-s_c}{s_c}=\frac{2p-\alpha_2}{\alpha_2-2}.$$

实际上, 由引理2.4可知

$$C_{\alpha,\mu,p}=\frac{\int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N}\frac{|u|^p|u|^p}{|x|^\alpha|x-y|^\mu|y|^\alpha}dxdy}{||\nabla u||_{L^2}^{\alpha_2}||u||_{L^2}^{2p-\alpha_2}}. \tag{3.3}$$

再结合上述 Pohožaev 恒等式, 可得

$$C_{\alpha,\mu,p}=\frac{2p}{\alpha_2}\frac{1}{(||\nabla u||_{L^2}||u||_{L^2}^{\sigma})^{\alpha_2-2}}. \tag{3.4}$$

通过计算有

$$E(u)||u||_{L^2}^{2\sigma}=\frac{\alpha_2-2}{2\alpha_2}(||\nabla u||_{L^2}||u||_{L^2}^{\sigma})^2. \tag{3.5}$$

下面将 $E(\psi(t))$ 的两边同时乘以 $||\psi(t)||_{L^2}^{2\sigma}$, 结合引理2.4, 我们有

$$\begin{aligned}E(\psi(t))||\psi(t)||_{L^2}^{2\sigma}&=\frac{1}{2}||\nabla\psi(t)||_{L^2}^2||\psi(t)||_{L^2}^{2\sigma}-\frac{1}{2p}\int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N}\frac{|\psi(t)|^p|\psi(t)|^p}{|x|^\alpha|x-y|^\mu|y|^\alpha}dxdy||\psi(t)||_{L^2}^{2\sigma}\\&\geq\frac{1}{2}(||\nabla\psi(t)||_{L^2}||\psi(t)||_{L^2}^{\sigma})^2-\frac{C_{\alpha,\mu,p}}{2p}(||\psi(t)||_{L^2}^{\sigma})^{Np-2N+2\alpha+\mu}\\&=f(||\nabla\psi(t)||_{L^2}||\psi(t)||_{L^2}^{\sigma}).\end{aligned}$$

其中,

$$f(x):=\frac{1}{2}x^2-\frac{C_{\alpha,\mu,p}}{2p}x^{\alpha_2}.$$

由(3.4)式可知, 函数 f 在区间 $(0,x_0)$ 上递减, 在区间 (x_0,∞) 上递增, 其中

$$x_0=\left(\frac{2p}{C_{\alpha,\mu,p}\alpha_2}\right)^{\frac{1}{\alpha_2-2}}=||\nabla u||_{L^2}||u||_{L^2}^{\sigma}.$$

类似的, 由(3.4)式和(3.5)式可知,

$$f(||\nabla u||_{L^2}||u||_{L^2}^{\sigma})=E(u)||u||_{L^2}^{2\sigma}.$$

因此, 结合引理2.1和(1.11)式, 对于任意的 $t\in[0,T^*]$, 我们有

$$\begin{aligned}f(||\nabla\psi(t)||_{L^2}||\psi(t)||_{L^2}^{\sigma})&\leq E(\psi(t))||\psi(t)||_{L^2}^{2\sigma}=E(\psi_0)||\psi_0||_{L^2}^{2\sigma}\\&<E(u)||u||_{L^2}^{2\sigma}=f(||\nabla u||_{L^2}||u||_{L^2}^{\sigma}),\end{aligned}$$

相似的, 根据连续性和(1.11)式, 对于任意的 $t\in[0,T^*)$, 我们有

$$||\nabla\psi(t)||_{L^2}||\psi(t)||_{L^2}^{\sigma}>||\nabla u||_{L^2}||u||_{L^2}^{\sigma}. \tag{3.6}$$

又由于 $E(\psi_0)||\psi_0||_{L^2}^{2\sigma}<E(u)||u||_{L^2}^{2\sigma}$, 且存在 $\eta>0$足够小, 使得

$$E(\psi_0)||\psi_0||_{L^2}^{2\sigma}\leq(1-\eta)E(u)||u||_{L^2}^{2\sigma},$$

因此, 我们可得

$$
\begin{aligned}
K(\psi(t))||\psi(t)||_{L^2}^{2\sigma} &= \alpha_2 E(\psi(t))||\psi(t)||_{L^2}^{2\sigma} - \frac{\alpha_2-2}{2}||\nabla\psi(t)||_{L^2}^2||\psi(t)||_{L^2}^{2\sigma} \\
&= \alpha_2 E(\psi_0)||\psi_0||_{L^2}^{2\sigma} - \frac{\alpha_2-2}{2}(||\nabla\psi(t)||_{L^2}||\psi(t)||_{L^2}^{\sigma})^2 \\
&\le \alpha_2(1-\eta)E(u)||u||_{L^2}^{2\sigma} - \frac{\alpha_2-2}{2}(||\nabla u||_{L^2}||u||_{L^2}^{\sigma})^2 \\
&= -\eta\alpha_2 E(u)||u||_{L^2}^{2\sigma},
\end{aligned}
\tag{3.7}
$$

这表明 $\delta = \eta\alpha_2 E(u)||u||_{L^2}^{2\sigma}$ 时(3.1)式成立, 方程(1.1)的解 $\psi(t)$ 在有限时间内爆破. 证毕.

4. 强不稳定性

本小节我们证明定理1.2.

设 $u_\omega \in \mathcal{G}_\omega$, 则

$$
S_\omega(u_\omega^\lambda) = \frac{\lambda^2}{2}||\nabla u_\omega||_{L^2}^2 + \frac{\omega}{2}||u_\omega||_{L^2}^2 - \frac{\lambda^{\alpha_2}}{2p}\int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N}\frac{|u_\omega|^p|u_\omega|^p}{|x|^\alpha|x-y|^\mu|y|^\alpha}dxdy,
$$

$$
\partial_\lambda S_\omega(u_\omega^\lambda) = \lambda||\nabla u_\omega||_{L^2}^2 - \frac{\alpha_2}{2p}\lambda^{\alpha_2-1}\int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N}\frac{|u_\omega|^p|u_\omega|^p}{|x|^\alpha|x-y|^\mu|y|^\alpha}dxdy = \frac{Q(u_\omega^\lambda)}{\lambda}.
$$

由上述结果可知, $\partial_\lambda S_\omega(u_\omega^\lambda) = 0$ 有非零解

$$
\left(\frac{2p||\nabla u_\omega||_{L^2}^2}{\alpha_2\int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N}\frac{|u_\omega|^p|u_\omega|^p}{|x|^\alpha|x-y|^\mu|y|^\alpha}dxdy}\right)^{\frac{1}{\alpha_2-2}} = 1.
$$

特别地, 由 Pohožaev 恒等式可知, 当 $Q(u_\omega) = 0$ 时上述等式成立, 因此, 我们有

$$
\begin{cases}
\partial_\lambda S_\omega(u_\omega^\lambda) > 0, & \lambda \in (0,1), \\
\partial_\lambda S_\omega(u_\omega^\lambda) < 0, & \lambda \in (1,\infty).
\end{cases}
$$

由上述结果可知, 对于任意的 $\lambda > 0$ 且 $\lambda \neq 1$, 我们有 $S_\omega(u_\omega^\lambda) < S_\omega(u_\omega)$. 又由于 $||u_\omega^\lambda||_{L^2} = ||u_\omega||_{L^2}$, 则对于任意的 $\lambda > 1$, 有

$$
E(u_\omega^\lambda) < E(u_\omega). \tag{4.1}
$$

下面, 对于任意的 $\lambda_n > 1$, 我们令初值 $\psi_{0,n}(x) = u_\omega^{\lambda_n}(x) = \lambda_n^{\frac{N}{2}}u_\omega(\lambda_n x)$, 且 $\lim\limits_{n\to\infty}\lambda_n = 1$. 根据引理2.2, 我们可知, 在 $H^1(\mathbb{R}^N)$ 空间中, $\psi_{0,n} \to u_\omega$. 因此, 由(4.1)式我们可以推出

$$
E(\psi_{0,n}) < E(u_\omega),
$$

$$
||\nabla\psi_{0,n}||_{L^2} = \lambda_n||\nabla u_\omega||_{L^2} > ||\nabla u_\omega||_{L^2}.
$$

结合(1.9)式和(1.10)式, 我们可以得到

$$E(\psi_{0,n})^{s_c}||\psi_{0,n}||_{L^2}^{2(1-s_c)} < ||\nabla u_\omega||_{L^2}^{s_c}||u_\omega||_{L^2}^{2(1-s_c)} = E(u)^{s_c}||u||_{L^2}^{2(1-s_c)},$$

$$||\nabla\psi_{0,n}||_{L^2}^{s_c}||\psi_{0,n}||_{L^2}^{1-s_c} > ||\nabla u_\omega||_{L^2}^{s_c}||u_\omega||_{L^2}^{1-s_c} = ||\nabla u||_{L^2}^{s_c}||u||_{L^2}^{1-s_c},$$

其中 u 是(1.8)的基态解, 且 $s_c = \frac{N}{2} - \frac{2+N-2\alpha-\mu}{2(p-1)}$.
根据定理1.1可知, 以 $\psi_{0,n}$ 为初值的解 ψ_n 在有限时间内爆破. 因此, 驻波解是强不稳定的.证毕.

参考文献

[1] Cazenave, T. (2003) Semilinear Schrödinger Equations (Courant Lecture Notes in Mathematics, Vol. 10). New York University, Courant Institute of Mathematical Sciences/American Mathematical Society, New York/Providence, RI.

[2] Feng, B. and Yuan, X. (2015) On the Cauchy Problem for the Schrödinger-Hartree Equation. *Evolution Equations and Control Theory*, **4**, 431-445. https://doi.org/10.3934/eect.2015.4.431

[3] Feng, B. and Zhang, H. (2018) Stability of Standing Waves for the Fractional Schrödinger-Hartree Equation. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **460**, 352-364. https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2017.11.060

[4] Pekar, S.I. (1954) Untersuchung über die Elektronentheorie der Kristalle. Akademie Verlag, Berlin.

[5] Lieb, E.H. (1977) Existence and Uniqueness of the Minimizing Solution of Choquard's Nonlinear Equation. *Studies in Applied Mathematics*, **57**, 93-105. https://doi.org/10.1002/sapm197757293

[6] Penrose, R. (1996) On Gravity's Role in Quantum State Reduction. *General Relativity and Gravitation*, **28**, 581-600. https://doi.org/10.1007/BF02105068

[7] Chen, Z., Shen, Z. and Yang, M. (2017) Instability of Standing Waves for a Generalized Choquard Equation with Potential. *Journal of Mathematical Physics*, **58**, Article ID: 011504. https://doi.org/10.1063/1.4974251

[8] Du, L., Gao, F. and Yang, M. (2022) Existence and Qualitative Analysis for Nonlinear Weighted Choquard Equations. https://arxiv.org/abs/1810.11759

[9] Feng, B. (2018) On the Blow-Up Solutions for the Fractional Nonlinear Schrödinger Equation with Combined Power-Type Nonlinearities. *Communications on Pure and Applied Analysis*, **17**, 1785-1804. https://doi.org/10.3934/cpaa.2018085

[10] Feng, B., Liu, J., Niu, H. and Zhang, B. (2020) Strong Instability of Standing Waves for a Fourth-Order Nonlinear Schrödinger Equation with the Mixed Dispersions. *Nonlinear Analysis*, **196**, Article ID: 111791. https://doi.org/10.1016/j.na.2020.111791

[11] Feng, B. and Wang, Q. (2021) Strong Instability of Standing Waves for the Nonlinear Schrödinger Equation in Trapped Dipolar Quantum Gases. *Journal of Dynamics Differential Equations*, **33**, 1989-2008. https://doi.org/10.1007/s10884-020-09881-0

[12] Feng, B., Chen, R. and Liu, J. (2021) Blow-Up Criteria and Instability of Normalized Standing Waves for the Fractional Schrödinger-Choquard Equation. *Advances in Nonlinear Analysis*, **10**, 311-330. https://doi.org/10.1515/anona-2020-0127

[13] Feng, B. and Zhu, S. (2021) Stability and Instability of Standing Waves for the Fractional Nonlinear Schrödinger Equations. *Journal of Differential Equations*, **292**, 287-324. https://doi.org/10.1016/j.jde.2021.05.007

[14] Wang, Y. and Feng, B. (2019) Sharp Thresholds of Blow-Up and Global Existence for the Schrödinger Equation with Combined Power-Type and Choquard-Type Nonlinearities. *Boundary Value Problems*, **2019**, Article No. 195. https://doi.org/10.1186/s13661-019-01310-6

[15] Zhang, J. and Zhu, S. (2017) Stability of Standing Waves for the Nonlinear Fractional Schrödinger Equation. *Journal of Dynamics and Differential Equations*, **29**, 1017-1030. https://doi.org/10.1007/s10884-015-9477-3

[16] Berestycki, H. and Cazenave, T. (1981) Instabilité des états stationaires dans les éuations de Schrödinger et de Klein-Gordon non linéires. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences—Series I*, **293**, 489-492. https://zbmath.org/0492.35010

[17] Le Coz, S. (2008) A note on Berestycki-Cazenave's Classical Instability Result for Nonlinear Schrödinger Equations. *Advanced Nonlinear Studies*, **8**, 455-463. https://doi.org/10.1515/ans-2008-0302

[18] Feng, B., Chen, R. and Wang, Q. (2020) Instability of Standing Waves for the Nonlinear Schrödinger-Poisson Equation in the L^2-Critical Case. *Journal of Dynamics and Differential Equations*, **32**, 1357-1370. https://doi.org/10.1007/s10884-019-09779-6

[19] Weinstein, M.I. (1983) Nonlinear Schrödinger Equations and Sharp Interpolation Estimates. *Communications in Mathematical Physics*, **87**, 567-576. https://doi.org/10.1007/BF01208265

[20] Ohta, M. (1995) Blow-Up Solutions and Strong Instability of Standing Waves for the Generalized Davey-Stewartson System in $\mathbb{R}^2$. *Annales de l'Institut Henri Poincaré-Physique Théorique*, **63**, 111-117. https://eudml.org/doc/76684

[21] Chen, J. and Guo, B. (2007) Strong Instability of Standing Waves for a Nonlocal Schrödinger Equation. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, **227**, 142-148. https://doi.org/10.1016/j.physd.2007.01.004

[22] Shi, C. (2022) Existence of Stable Standing Waves for the Nonlinear Schrödinger Equation with Mixed Power-Type and Choquard-Type Nonlinearities. *AIMS Mathematics*, **7**, 3802-3825. https://doi.org/10.3934/math.2022211

[23] Brézis, H. and Lieb, E.H. (1983) A Relation between Pointwise Convergence of Functions and Convergence of Functionals. *Proceedings of the American Mathematical Society*, **88**, 486-493. https://doi.org/10.2307/2044999

[24] Lieb, E.H. (1983) Sharp Constants in the Hardy-Littlewood-Sobolev and Related Inequalities. *Annals of Mathematics*, **118**, 349-374. https://doi.org/10.2307/2007032