

几类组合和式的相关同余式

王明会*, 靳海涛

天津职业技术师范大学理学院, 天津

收稿日期: 2023年3月17日; 录用日期: 2023年4月18日; 发布日期: 2023年4月26日

摘要

利用常数项方法, 得到了几个包含常见组合序列如中心二项式系数、Catalan数、Motzkin数的部分和式的新的同余式, 结合扩展的Zeilberger算法, 讨论了一类含有中心二项式系数和式的同余性质之间的关系并提出了一个有待研究的问题。

关键词

常数项, 中心二项式系数, 扩展的Zeilberger算法, 同余式

Congruences of Several Kinds of Combinatorics Sums

Minghui Wang*, Haitao Jin

School of Science, Tianjin University of Technology and Education, Tianjin

Received: Mar. 17th, 2023; accepted: Apr. 18th, 2023; published: Apr. 26th, 2023

Abstract

By using the method of constant term, we prove several congruences of combinatorial sums involving some usual combinatorial sequences such as central binomial coefficients, Catalan numbers and Motzkin numbers. Moreover, with the help of the extended Zeilberger algorithm, we explore the congruence relations of a certain kind of combinatorial sums involving central binomial coefficients and propose a valuable research problem.

Keywords

Constant Term, Central Binomial Coefficient, The extended Zeilberger Algorithm, Congruence

*通讯作者。

Copyright © 2023 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

近些年来, 组合序列及其和式的相关同余式受到人们的广泛关注。例如, 对中心二项式系数, 潘颢与孙智伟[1]利用组合恒等式证明了对任意奇素数 p , 有

$$\sum_{n=0}^{p-1} (3n+1) \binom{2n}{n} \equiv -\left(\frac{p}{3}\right) \pmod{p}. \quad (1)$$

曹植坚[2]证明了 Apagodu [3]提出的如下猜想: 对任何奇素数 p ,

$$\sum_{n=0}^{p-1} (5n+1) \binom{4n}{2n} \equiv -\left(\frac{p}{3}\right) \pmod{p}. \quad (2)$$

并得到了新的同余式:

$$\sum_{n=0}^{p-1} (3n+1) \binom{4n}{2n} \equiv -\frac{1}{5} \left(\frac{p}{5}\right) \pmod{p}. \quad (3)$$

对含有 Motzkin 数的同余式, 刘纪彩[4]证明了孙智伟[5]提出的如下猜想: 当 $p \geq 5$ 时, 有

$$\sum_{k=0}^{p-1} M_k^2 \equiv (2-6p) \left(\frac{p}{3}\right) \pmod{p^2}, \quad (4)$$

$$\sum_{k=0}^{p-1} kM_k^2 \equiv (9p-1) \left(\frac{p}{3}\right) \pmod{p^2}, \quad (5)$$

$$\sum_{k=0}^{p-1} T_k M_k \equiv \frac{4}{3} \left(\frac{p}{3}\right) + \frac{p}{6} \left(1-9 \left(\frac{p}{3}\right)\right) \pmod{p^2}. \quad (6)$$

目前, 涉及组合序列和式的同余式特别是超同余式, 还有多个问题有待解决, 可见孙智伟[6]。除常见的恒等式技巧外, 同余式证明的方法还包括超几何级数[7]、WZ 方法[8]、 p -进制[9]方法等。最近, 侯庆虎、Zeilberger 等人提出了常数项方法和多项式约化理论[10] [11], 由此证明了一个相关猜想, 其应用有待进一步挖掘。

本文结构如下: 第 2 节简单介绍了所需的基础知识, 包括同余理论和常数项算子。第 3 节利用常数项方法给出几个已知结果的新证明并证明了新的同余式。第 4 节结合约化理论和扩展的 Zeilberger 算法探讨了一类组合和式同余性质之间的关系并提出了一个公开问题。第 5 节进行总结并提出了进一步的研究方向, 如利用常数项方法模高次幂的情况, 含有多个组合数相乘的和式等。

2. 基础知识

2.1. 同余理论

对于任意一个正整数 $m \geq 2$, 用 $a \equiv b \pmod{m}$ 表示 a, b 对模 m 同余。对奇素数 p 和整数 a , Legendre 符号 $\left(\frac{a}{p}\right)$ 为

$$\left(\frac{a}{p}\right) = \begin{cases} 1, & a \text{ 是模 } p \text{ 的二次剩余,} \\ -1, & a \text{ 是模 } p \text{ 的非二次剩余,} \\ 0, & p \mid a. \end{cases}$$

如下几个定理是熟知的。

定理 1. (Lucas 定理) 设 p 是一个素数, 若 m 和 n 的 p -进制展开分别为:

$$n = a_0 + a_1p + a_2p^2 + \dots + a_kp^k, m = b_0 + b_1p + b_2p^2 + \dots + b_kp^k,$$

其中对任意 $0 \leq i \leq k$, 有 $0 \leq a_i, b_i < p$, 则有

$$\binom{n}{m} \equiv \prod_{i=0}^k \binom{a_i}{b_i} \pmod{p},$$

这里 $\binom{n}{m}$ 为二项式系数。

定理 2. (Fermat 小定理) 设 p 为素数, a 为整数, 且 p 不整除 a , 则

$$a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}.$$

定理 3. (The Freshman's dream identity) 设 p 为素数, a, b 为整数, 则

$$(a+b)^p \equiv a^p + b^p \pmod{p}.$$

2.2. 常数项算子

定义 1. 给定一个洛朗多项式 $P(x_1, x_2, \dots, x_n)$, 称 $x_1^0 x_2^0 \dots x_n^0$ 的系数为其常数项, 记作 $CT[P(x_1, x_2, \dots, x_n)]$ 。一般的, 记 $COEFF_{x_1^{m_1} x_2^{m_2} \dots x_n^{m_n}}[P(x_1, x_2, \dots, x_n)]$ 为 $x_1^{m_1} x_2^{m_2} \dots x_n^{m_n}$ 的系数。例如,

$$CT_{xy} \left[7xy - 4x^3y + 5 + xy^2 + \frac{1}{2xy} \right] = 5, \quad COEFF_{[xy]} \left[7xy - 4x^3y + 5 + xy^2 + \frac{1}{2xy} \right] = 7.$$

中心二项式系数可表示为:

$$\binom{2k}{k} = CT \frac{(1+x)^{2k}}{x^k} = CT \left(\frac{(1+x)^2}{x} \right)^k = CT \left(2 + x + \frac{1}{x} \right)^k.$$

3. 常数项方法在同余式中的应用

陈、侯和 Zeilberger [10] 采用常数项方法初步探讨了相关同余式并从理论上得到了一些相应结论。下面主要采用该方法研究新的同余式。我们以潘颖与孙智伟 [1] 中的如下结论为例说明常数项方法的基本步骤。

同余式 1. 对任意的奇素数 p , 有 $\sum_{k=0}^{p-1} (3k+1) \binom{2k}{k} \equiv -\left(\frac{p}{3}\right) \pmod{p}$ 。

证明: 记左端和式为 $S(p)$ 。(1) 将和式中的中心二项式系数替换为 $CT \left(2 + x + \frac{1}{x} \right)^k$, 交换常数项算子与求和号, 并计算出闭形式。

$$\begin{aligned} S(p) &= \sum_{k=0}^{p-1} (3k+1) CT \left(2 + x + \frac{1}{x} \right)^k = CT \sum_{k=0}^{p-1} (3k+1) \left(2 + x + \frac{1}{x} \right)^k \\ &= CT \frac{(3px^2 + 3px - 2x^2 + 3p - 5x - 2)x \left[\left(\frac{x^2 + 2x + 1}{x} \right)^p + 1 \right]}{(x^2 + x + 1)^2}. \end{aligned}$$

(2) 利用级数展开及基本同余性质进行化简, 同时移除 $\left(\frac{x^2 + 2x + 1}{x} \right)^p$ 项得到:

$$\begin{aligned}
 &= CT \frac{(3px^2 + 3px - 2x^2 + 3p - 5x - 2) \left(\frac{x^2 + 2x + 1}{x}\right)^p}{(x^2 + x + 1)^2} \\
 &\equiv -CT \frac{(2x^3 + 5x^2 + 2x) \left(2 + x^p + \frac{1}{x^p}\right)}{(x^2 + x + 1)^2} \pmod{p} \\
 &= -CT \frac{2x^3 + 5x^2 + 2x}{x^p (x^2 + x + 1)^2} \\
 &= -CT \frac{2x^5 + x^4 - 6x^3 + x^2 + 2x}{x^p (1 - x^3)^2}.
 \end{aligned}$$

(3) 展开级数并根据素数 p 模 3 的情形进行讨论:

若 $p = 3$, 则 $S(p) = -6 \equiv 0 \pmod{p}$ 。

若 $p = 3k + 1$, 则

$$S(p) = -CT \frac{x^4 + 2x}{x^p (1 - x^3)^2} = -CT \frac{1}{x^p} \left[(x^4 + 2x) \sum_{i=0}^{\infty} (i+1)x^{3i} \right] = -(3k+2) \equiv -1 \pmod{p}.$$

若 $p = 3k + 2$, 则

$$S(p) = -CT \frac{2x^5 + x^2}{x^p (1 - x^3)^2} = -CT \frac{1}{x^p} \left[(2x^5 + x^2) \sum_{i=0}^{\infty} (i+1)x^{3i} \right] = -(3k+1) \equiv 1 \pmod{p}.$$

上述过程表明, 若组合序列 $a_k = CT(f^k(x))$, 其中 $f(x)$ 为有理函数, 则可利用上述方法讨论和式 $\sum_{k=0}^{p-1} k^r a_k$ 的同余性质。例如, 我们得到了如下新的同余式。

同余式 2. 对任意的奇素数 p , 有

$$\sum_{k=0}^{p-1} k^2 \binom{2k}{k} \equiv \begin{cases} 2/3, & p \equiv 1 \pmod{3} \\ -2/3, & p \equiv 2 \pmod{3} \end{cases}.$$

证明: 记左端和式为 $S(p)$ 。

$$\begin{aligned}
 S(p) &= CT \frac{(x^4 + 5x^3 + 8x^2 + 5x + 1)x \left[\left(2 + x + \frac{1}{x}\right)^p - 1 \right]}{(x^2 + x + 1)^3} \\
 &\equiv CT \frac{(x^4 + 5x^3 + 8x^2 + 5x + 1)x \left(2 + x^p + \frac{1}{x^p}\right)}{(x^2 + x + 1)^3} \pmod{p} \\
 &= CT \frac{(x^4 + 5x^3 + 8x^2 + 5x + 1)x}{x^p (x^2 + x + 1)^3} \\
 &= CT \frac{(x^4 + 5x^3 + 8x^2 + 5x + 1)x(1-x)^3}{x^p (1-x^3)^3} \\
 &= CT \frac{(-x^8 - 2x^7 + 4x^6 + 5x^5 - 5x^4 - 4x^3 + 2x^2 + x)}{x^p (1-x^3)^3}
 \end{aligned}$$

若 $p=3$, 则 $\sum_{k=0}^{p-1} k^2 \binom{2k}{k} \equiv 0 \pmod{p}$ 。

若 $p=3k+1$, 则,

$$S(p) \equiv CT \frac{-2x^7 - 5x^4 + x}{x^p (1-x^3)^3} = CT \frac{(-2x^7 - 5x^4 + x)}{x^p} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(i+1)(i+2)}{2} x^{3i} = -3k^2 + 1 \equiv \frac{2}{3} \pmod{p}.$$

若 $p=3k+2$, 则,

$$S(p) \equiv CT \frac{-x^8 + 5x^5 + 2x^2}{x^p (1-x^3)^3} = CT \frac{(-x^8 + 5x^5 + 2x^2)}{x^p} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(i+1)(i+2)}{2} x^{3i} = 3k^2 + 6k + 2 \equiv -\frac{2}{3} \pmod{p}.$$

下面给出一些常见组合序列的相关同余式。令 C_n 表示第 n 个 Catalan 数, 已知其表达式为 $C_n = \binom{2n}{n} \frac{1}{n+1}$ 。潘颖与孙智伟[1]研究了和式 $\sum_{k=0}^{p-1} k^r C_{k+d}$ 模任意素数 $p > \max\{d, r\}$ 的同余性质。注意到 $C_n = \binom{2n}{n} - \binom{2n}{n-1}$, 故可用常数项表示为 $C_n = CT_x \left[(1-x) \left(2+x+\frac{1}{x} \right)^n \right]$ 。由此即可利用常数项方法得到其同余式, 例如, $d=0$, $r=1$ 和 $r=2$, 我们可以得到:

同余式 3. 对任意的奇素数 p ,

$$\sum_{k=0}^{p-1} k C_k \equiv \begin{cases} 0 \pmod{p}, & p \equiv 1 \pmod{3} \\ 1 \pmod{p}, & p \equiv 2 \pmod{3} \end{cases}$$

$$\sum_{k=0}^{p-1} k^2 C_k \equiv \begin{cases} -2/3 \pmod{p}, & p \equiv 1 \pmod{3} \\ -1/3 \pmod{p}, & p \equiv 2 \pmod{3} \end{cases}.$$

对第 n 个 Motzkin 数 $M_n = \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n}{2k} C_k$, 其中 C_k 为 Catalan 数, Apagodu [3]给出了其常数项表达式为

$$M_n = CT_x \left[(1-x^2) \left(1+x+\frac{1}{x} \right)^n \right].$$

由此, 我们可以证明如下两个同余式。

同余式 4. 对任意奇素数 p ,

$$\sum_{k=0}^{p-1} M_k \equiv \begin{cases} 2 \pmod{p}, & p \equiv 1 \pmod{4} \\ -2 \pmod{p}, & p \equiv 3 \pmod{4} \end{cases}$$

$$\sum_{k=0}^{p-1} k M_k \equiv \begin{cases} -2 \pmod{p}, & p \equiv 1 \pmod{4} \\ 2 \pmod{p}, & p \equiv 3 \pmod{4} \end{cases}.$$

对第 n 个中心三项式系数 $T_n = \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n}{2k} \binom{2k}{k}$, 孙智伟[12]也讨论了相关同余性质, 例如

$$\sum_{k=0}^{p-1} T_k \equiv \left(\frac{-1}{p} \right) \pmod{p}.$$

不难得知, 其常数项表示为 $CT \left[\left(1+x+\frac{1}{x} \right)^n \right]$ 。由此可以证明如下同余式。

同余式 5. 对任意奇素数 p ,

$$\sum_{k=0}^{p-1} T_k \equiv \begin{cases} 1 \pmod{p}, & p \equiv 1 \pmod{4} \\ -1 \pmod{p}, & p \equiv 3 \pmod{4} \end{cases}$$

$$\sum_{k=0}^{p-1} kT_k \equiv \begin{cases} -1 \pmod{p}, & p \equiv 1 \pmod{4} \\ 1 \pmod{p}, & p \equiv 3 \pmod{4} \end{cases}.$$

4. $\sum_{k=0}^{p-1} k^r a_k$ 相关同余式的关系

侯等人[11]提出的约化方法可用来研究 $\left\{ S(r) = \sum_{k=0}^{p-1} k^r a_k \mid r = 0, 1, \dots, p-2 \right\}$ 模 p 的关系。我们将结合扩展的 Zeilberger 算法考虑 $S(r) = \sum_{k=0}^{p-1} k^r \binom{4k}{2k}$ 的同余性质。

曹植坚[2]通过证明如下结论得到了同余式(2) (3), 下面我们利用常数项方法给出新的证明。

同余式 6. 对任意的奇素数 p , 有

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{p-1} \binom{4k}{2k} &\equiv \frac{1}{2} \left[3 \binom{p}{3} - \binom{p}{5} \right] \pmod{p}, \\ \sum_{k=0}^{p-1} k \binom{4k}{2k} &\equiv -\frac{1}{2} \binom{p}{3} + \frac{1}{10} \binom{p}{5} \pmod{p}. \end{aligned}$$

证明: 只证明第一个同余式。采用如下技巧[2]:

$$\sum_{k=0}^{p-1} \binom{4k}{2k} = \frac{1}{2} \left[\sum_{k=0}^{2p-1} \binom{2k}{k} + \sum_{k=0}^{2p-1} (-1)^k \binom{2k}{k} \right].$$

第一个和式的同余式是已知的[13]: 对任意奇素数 p ,

$$\sum_{k=0}^{2p-1} \binom{2k}{k} \equiv 3 \binom{p}{3}.$$

对 $\sum_{k=0}^{2p-1} (-1)^k \binom{2k}{k}$ 有,

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{2p-1} (-1)^k \binom{2k}{k} &= \sum_{k=0}^{2p-1} (-1)^k CT \left(x + 2 + \frac{1}{x} \right)^k \\ &= CT - \frac{x \left(-x - 2 - \frac{1}{x} \right)^{2p}}{x^2 + 3x + 1} + CT \frac{x}{x^2 + 3x + 1} \\ &= CT - \frac{\left(6 + 4x + x^2 + \frac{4}{x} + \frac{1}{x^2} \right)^p x}{x^2 + 3x + 1} \\ &\equiv CT \frac{-4x}{x^p (x^2 + 3x + 1)} + CT \frac{-x}{x^{2p} (x^2 + 3x + 1)} \pmod{p}. \end{aligned}$$

对有理分式 $\frac{ux+v}{a+bx+cx^2}$, 记 $\Delta = b^2 - 4ac$, S_k 为其展开式中 x^k 的系数。陈、侯等人[10]证明了若

$\left(\frac{\Delta}{p} \right) = 1$, 则对任意的整数 r , 有 $S_{rp} \equiv S_r \pmod{p}$ 。若 $\left(\frac{\Delta}{p} \right) = -1$, 则对任意的整数 r , 有 $S_{rp} \equiv \left(\frac{c}{a} \right)^r S_{-r} \pmod{p}$,

其中 S_{-r} 满足递推关系式: $aS_n + bS_{n-1} + cS_{n-2} = 0, n \in \mathbb{Z}$ 。这里 $\Delta = 5$, 故讨论可知, 若 $p = 5k + 1$ 和 $p = 5k + 4$, 则有

$$S_p = CT \frac{-4x}{x^p(x^2+3x+1)} \equiv S_1 = -4 \pmod{p}.$$

同理, $CT \frac{-x}{x^{2p}(x^2+3x+1)} = CT \frac{1}{x^{2p}} \sum_{p=0}^{\infty} S_{2p} x^{2p} \equiv S_2 = 3 \pmod{p}.$

若 $p = 5k + 2$ 和 $p = 5k + 3$, 则有

$$CT \frac{-4x}{x^p(x^2+3x+1)} = CT \frac{1}{x^p} \sum_{p=0}^{\infty} S_p x^p \equiv S_{-1} = 4 \pmod{p}.$$

$$CT \frac{-x}{x^{2p}(x^2+3x+1)} = CT \frac{1}{x^{2p}} \sum_{p=0}^{\infty} S_{2p} x^{2p} \equiv S_{-2} = -3 \pmod{p}.$$

综上, 即可得到

$$\sum_{k=0}^{2p-1} (-1)^k \binom{2k}{k} \equiv -\left(\frac{p}{5}\right) \pmod{p}.$$

我们可以证明如下新的同余式。

同余式 7. 对素数 $p > 5$, 有

$$\sum_{k=0}^{p-1} k^2 \binom{4k}{2k} \equiv \frac{1}{4} \left[\left(\frac{p}{3}\right) - \frac{1}{25} \left(\frac{p}{5}\right) \right] \pmod{p},$$

$$\sum_{k=0}^{p-1} k^3 \binom{4k}{2k} \equiv -\frac{1}{8} \left[\frac{5}{3} \left(\frac{p}{3}\right) + \frac{1}{25} \left(\frac{p}{5}\right) \right] \pmod{p}.$$

证明: 利用扩展的 Zeilberger 算法[11]可得到

$$\left(k^2 + \frac{11}{10}k + \frac{1}{5}\right) \binom{4k}{2k} = G(k+1) - G(k),$$

其中 $G(k) = \frac{k(2k-1)}{30} \binom{4k}{2k}$ 。两边求和即可得到如下关系式

$$S(2) = -\frac{11}{10}S(1) - \frac{1}{5}S(0) + \frac{p(2p-1)}{30} \binom{4p}{2p}.$$

模 p 即可得到第一个同余式。同理, 可得

$$\left(k^3 - \frac{67}{60}k - \frac{7}{30}\right) \binom{4k}{2k} = G(k+1) - G(k),$$

其中 $G(k) = \frac{k(2k-1)(6k-13)}{180} \binom{4k}{2k}$ 。两边求和即可得到如下关系式

$$S(3) = \frac{67}{60}S(1) + \frac{7}{30}S(0) + \frac{p(2p-1)(6p-13)}{180} \binom{4p}{2p}.$$

模 p 即可得到第二个同余式。

通过计算更多实例, 我们可猜测得到如下一般结论。

猜想 1. 对素数 $p > 5$ 和非负整数 r , 存在有理数 a, b , 其分母仅含有素因子 $2, 3, 5$, 使得

$$S(r) = \sum_{k=0}^{p-1} k^r \binom{4k}{2k} \equiv a \left(\frac{p}{3}\right) + b \left(\frac{p}{5}\right).$$

5. 结论与展望

组合序列相关和式的同余性质目前还有大量问题有待解决。当组合序列的常数项表示较为容易时, 可采用常数项方法讨论其和式模 p 的情况。文中证明了一些相关同余式; 此外, 采用扩展的 Zeilberger 算法可探讨其不同幂次间同余的关系。然而, 该方法还有待进一步研究, 一是如何处理模高次幂的情况; 二是对多个组合数相乘的和式, 会涉及多变量的有理函数展开的问题。

我们通过如下例子来说明。例如, 要证明 $\sum_{k=0}^{p-1} M_k^2 \equiv 2 \left(\frac{p}{3} \right) \pmod{p}$ [12]。采用常数项方法计算得到

$$\sum_{k=0}^{p-1} M_k^2 \equiv CT_x CT_y \frac{(x^2-1)(y^2-1)xy}{x^p y^p (x^2 y^2 + x^2 y + xy^2 + x^2 + y^2 + x + y + 1)} \pmod{p}$$

这里就需要计算该二元有理函数(记为 $f(x, y)$)展开式中 $x^p y^p = (xy)^p$ 的系数。记 $A_n = [x^n y^n] f(x, y)$, 我们可利用 Apagodu-Zeilberger 算法[14]得到其满足的一个 5 阶的递推关系式:

$$\begin{aligned} & \frac{n(n-1)(2n+3)^2 A(n)}{(n+3)(n+2)(1+2n)^2} - \frac{2n(8n^3+8n^2-22n-21)A(n+1)}{3(n+3)(n+2)(1+2n)^2} \\ & - \frac{2(28n^4+112n^3+139n^2+54n+9)A(n+2)}{3(n+3)(n+2)(1+2n)^2} - \frac{2(8n^3+40n^2+42n+9)A(n+3)}{3(n+3)(1+2n)^2} + A(n+4) = 0 \end{aligned}$$

其中 $A(0)=0, A(1)=1, A(2)=2, A(3)=6$ 。对这种递推关系给出整数序列, 目前没有好的方法讨论其模一般素数 p 的性质。

参考文献

- [1] Pan, H. and Sun, Z.W. (2006) A combinatorial identity with applications to Catalan numbers. *Discrete Mathematics*, **306**, 1921-1940. <https://doi.org/10.1016/j.disc.2006.03.050>
- [2] 曹植坚. 涉及 Apéry 多项式与中心二项式系数的同余式[D]: [硕士学位论文]. 南京: 南京大学, 2020.
- [3] Apagodu, M. (2018) Elementary proof of congruences involving sum of binomial coefficients. *International Journal of Number Theory*, **14**, 1547-1557. <https://doi.org/10.1142/S1793042118500938>
- [4] Liu, J.C. (2022) Supercongruences involving Motzkin numbers and central trinomial coefficients. arXiv: 2208.10275
- [5] Sun, Z.W. (2022) On Motzkin numbers and central trinomial coefficients. *Advances in Applied Mathematics*, **136**, 102319. <https://doi.org/10.1016/j.aam.2021.102319>
- [6] 孙智伟. 数论与组合中的新猜想[M]. 哈尔滨: 哈尔滨工业大学, 2021.
- [7] Ahlgren, S. and Ono, K. (2000) A Gaussian hypergeometric series evaluation and Apéry number congruences. *Journal für die Reine und Angewandte Mathematik*, **518**, 187-212. <https://doi.org/10.1515/crll.2000.004>
- [8] Zudilin, W. (2009) Ramanujan-type supercongruences. *Journal of Number Theory*, **129**, 1848-1857. <https://doi.org/10.1016/j.jnt.2009.01.013>
- [9] Beukers, F. (1987) Another congruence for the Apéry numbers. *Journal of Number Theory*, **25**, 201-210. [https://doi.org/10.1016/0022-314X\(87\)90025-4](https://doi.org/10.1016/0022-314X(87)90025-4)
- [10] Chen, W.Y.C., Hou, Q.H. and Zeilberger, D. (2015) Automated discovery and proof of congruence theorems for partial sums of combinatorial sequences. *Journal of Difference Equations and Applications*, **22**, 780-788. <https://doi.org/10.1080/10236198.2016.1142541>
- [11] Hou, Q.H., Mu, Y.P. and Zeilberger, D. (2021) Polynomial reduction and supercongruences. *Journal of Symbolic Computation*, **103**, 127-140. <https://doi.org/10.1016/j.jsc.2019.11.004>
- [12] Sun, Z.W. (2014) Congruences involving generalized central trinomial coefficients. *Science China Mathematics*, **57**, 1375-1400. <https://doi.org/10.1007/s11425-014-4809-z>
- [13] Apagodu, M. and Zeilberger, D. (2017) Using the "Freshman's Dream" to prove combinatorial congruences. *The*

American Mathematical Monthly, **124**, 597-608. <https://doi.org/10.4169/amer.math.monthly.124.7.597>

- [14] Apagodu, M. and Zeilberger, D. (2006) Multi-Variable Zeilberger and Almkvist-Zeilberger Algorithms and the Sharpening of Wilf-Zeilberger Theory. *Advances in Applied Mathematics*, **37**, 139-152.
<https://doi.org/10.1016/j.aam.2005.09.003>