Pure Mathematics 理论数学, 2023, 13(5), 1173-1189
Published Online May 2023 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2023.135122

带强阻尼的 Boussinesq 方程时间周期解

胥 浩

重庆师范大学，数学科学学院，重庆

收稿日期：2023年4月3日；录用日期：2023年5月5日；发布日期：2023年5月12日

摘 要

本文研究了带强阻尼的 Boussinesq 方程时间周期解问题，通过对解算子的谱分析和压缩映射原理证明了在周期外力具有某种小性时，带强阻尼的 Boussinesq 方程时间周期解的存在唯一性，并且解的周期与外力项的周期相同。

关键词

Boussinesq 方程，强阻尼，时间周期解，存在唯一性

The Time Periodic Solutions for the Boussinesq Equation with Strong Damping

Hao Xu

School of Mathematical Sciences, Chongqing Normal University, Chongqing

Received: Apr. 3^{rd}, 2023; accepted: May 5^{th}, 2023; published: May 12^{th}, 2023

Abstract

In this paper, the problem of time periodic solutions for the Boussinesq equation with

文章引用: 胥浩. 带强阻尼的 Boussinesq 方程时间周期解[J]. 理论数学, 2023, 13(5): 1173-1189.
DOI: 10.12677/pm.2023.135122

strong damping is studied. When the periodic external force has some small property, the existence and uniqueness of the time-periodic solutions for the Boussinesq equation with Strong damping are proved by spectral analysis of the solution operator and the principle of compression mapping. Moreover, the period of the solution is the same as that of the external force term.

Keywords

Boussinesq Equation, Strong Damping, Periodic Solutions, Existences and Uniqueness

1. 引言

本文研究了如下带强阻尼的 Boussinesq 方程在小外力作用下时间周期解的存在唯一性

$$u_{tt} - \Delta u + \Delta^2 u - \Delta u_t = \Delta f(u) + \Delta\varphi(x,t), x \in \mathbb{R}^n, t \geqslant 0, \tag{1.1}$$

其中 $u = u(x,t)$ 是未知函数，当 $u \to 0$ 时, $f(u) = O(|u|^\sigma)$, $\sigma \geqslant 2$ 是一个整数，$-\Delta u_t$ 是强阻尼项，外力项 $\varphi(x,t)$ 是周期为 T 的时间周期函数。

1834 年，英国造船工程师 Russel [1] 最早发现孤立波现象，它是一种在传播过程中能够保持波形和波速不变的浅水长波，当两个孤立波碰撞时，它们能够互相穿透并维持原来的波形和速度。Russel 猜测孤立波是流体运动的一个稳态解，但他没有从理论上给出证明。1872 年，法国数学家 Boussinesq [2] 在研究浅水域中长波的非线性传播时，保留了部分竖直方向的加速度，假设了海底是水平面，静水深度远大于水的自由面幅度，质点的水平方向速度是关于水深的常数，竖直方向速度与水深呈线性关系，推导出了如下方程：

$$u_{tt} - u_{xx} + \alpha u_{xxxx} = \beta(u^2)_{xx},\ \ x \in \mathbb{R}, \tag{1.2}$$

这里 α, β 是依赖于流体深度和长波的特征速度的常数。经过进一步分析，Boussinesq 发现了方程(1.2)具有特殊的行波解(即孤立波)，这对孤立波现象给出了科学的解释，后来人们称方程(1.2)为 Boussinesq 方程。

近年来，许多数学物理工作者对 Boussinesq 方程 Cauchy 问题展开了研究。对于解的局部存在

性的研究，我们可以参见文献 [3–5]。Bona 和 Sach [3] 在 $H^s(s>\frac{1}{2})$ 空间中证明解的局部存在性。Farah [4] 在 $H^s(s>-\frac{1}{4})$ 空间中证明了解的局部存在性。Kishimoto 和 Tsugawa [5] 在 $H^s(s>-\frac{1}{2})$ 空间中证明了解的局部适定性。对于小初值解的整体存在性的研究，我们可以参见文献 [3,6–9]。Bana 和 Sach [3] 在孤立子波的附近得到了该方程整体解。Linares [6] 改进了 Bana 和 Sach [3] 等人的结果，在小初值条件下证明了该方程解的整体存在性。Tsutsumi 和 Matahasi [7] 将问题转化为非线性 Schrödinger 方程系统在小初值条件下建立了该方程整体解。Liu [8] 利用方程的色散效应和能量守恒在小初值条件下证明了该方程解的整体存在性，Cho 和Ozawa [9] 利用方程的色散效应和 Besove 空间技术在小初值条件下证明了该方程的解的整体存在性。对于大初值解的爆破和整体存在性的研究，我们可以参见文献 [10–12]。对于弱解的整体存在性研究，我们可以参见文献 [12,13]。

Boussinesq 方程是描述了浅层无粘流的广义波动方程，而现实世界中流体的内部的摩擦力是不可避免的，Varlamov [14] 在1994 年提出了带强阻尼的 Boussinesq 方程

$$u_{tt}-u_{xx}+\alpha u_{xxxx}-\gamma u_{txx}=\beta(f(u))_{xx},\ \ x\in\mathbb{R}, \tag{1.3}$$

其中 $\gamma>0$ 是粘性系数，$-\gamma u_{txx}$ 是强阻尼项。

带强阻尼的 Boussinesq 方程 Cauchy 问题同样吸引了大量的数学物理工作者的兴趣。 Varlamov [14] 证明了该方程解的局部存在性。Wang [15] 利用半群理论以及 Fourier 空间中的能量估计方法证明了小初值解的整体适定性和长时间行为。Liu 和 Wang [16] 利用 Green 函数和能量估计方法证明了小初值解的整体适定性和逐点估计。最近，Liu和 Wang [17] 在忽略方程的耗散效应情形下仅利用方程的色散效应证明了小初值解的整体适定性和无粘极限。Liu 和 Wang [18] 利用方程的色散和耗散耦合效应证明了小初值解的整体适定性和长时间行为。Xu, Luo, Shen 和 Huang [19] 证明了大初值解的爆破和特殊条件下解的整体适定性。

时间周期解的存在性问题是非线性发展方程研究中的基本且重要的问题。最近，Wang 和 Li [20] 研究了如下带弱阻尼的 Beam 方程

$$u_{tt}-\Delta u+\Delta^2u-u_t=\Delta f(u)+\Delta\varphi(x,t),x\in\mathbb{R}^n,t\geqslant 0, \tag{1.4}$$

其中$-u_t$ 是弱阻尼项, 非线性项 $f(u)=O(u^2),u\to 0$. 他们在周期外力具有某种小性时证明了该方程时间周期解存在唯一性和稳定性，并且该时间周期解与周期外力项具有相同的周期。到目前为止，对于带强阻尼的 Boussinesq 时间周期解的存在性问题的研究还是空白的。

受 Wang 和 Li [20] 的启发，本文考虑了带强阻尼的 Boussinesq 方程时间周期解问题，我们将充分利用方程中强阻尼项所产生的耗散效应在 Fourier 空间中建立格林函数的逐点估计，从而得到解算子在 L^2 框架下关于时间的衰减性质，最后利用压缩映射原理建立该方程在小外力作用下时间周期解的存在唯一性。

本文的结构安排如下：第一节是引言部分，主要介绍问题的研究背景和研究现状。第二节是预备知识，主要介绍本文出现的符号和一些基础知识。第三节我们利用格林函数在 Fourier 空间的逐点估计建立解算子的衰减估计。第四节我们利用压缩映射原理证明了强阻尼 Boussinesq 方程时间周期解的存在唯一性。第五节是本文的结论。

2. 预备知识

在本文中, $\mathbb{R}$ 表示实数集, $\mathbb{Z}$ 表示整数集, $\mathbb{Z}_+$ 表示正整数集. $\mathbb{R}^n$ 表示 n 维欧几里得空间. C 表示常数, 它在不同的地方取值不同. $A \lesssim B$ 表示$A \leqslant CB$, $A \gtrsim B$ 表示$A \geqslant CB$. ∂ 表示求导算子, Δ 表示Laplace 算子.

定义 2.1. [21] 函数 g 的 Fourier 变换定义如下

$$\hat{g}(\xi) = \mathcal{F}g(\xi) = \int_{R^n} g(x)e^{-ix\xi}dx.$$

函数 g 的 Fourier 逆变换定义如下

$$f(x) = \mathcal{F}^{-1}\hat{g}(x) = (2\pi)^{-n}\int_{R^n} \hat{g}(\xi)e^{ix\xi}d\xi.$$

定义 2.2. [21] 设 $k \in \mathbb{Z}_+, 1 \leqslant p \leqslant \infty$, 定义整指数 Sobolev 空间为

$$W^{k,p}(\mathbb{R}^n) = \{u \in L^p(\mathbb{R}^n) : \partial^\alpha u \in L^p(\mathbb{R}^n), \forall |\alpha| \leqslant k\},$$

其范数为

$$\|u\|_{W^{k,p}(\mathbb{R}^n)} = \begin{cases} \left(\sum\limits_{|\alpha|\leqslant k} \|\partial^\alpha u\|_{L^p}^p\right)^{\frac{1}{p}}, 1 \leqslant p < \infty, \\ \max\limits_{|\alpha|\leqslant k} \|\partial^\alpha u\|_{L^\infty}, p = \infty. \end{cases}$$

特别地, 当 $p = 2$ 时, $W^{k,2}(\mathbb{R}^n)$ 是 Hilbert 空间, 我们记为 $H^k(\mathbb{R}^n)$.

引理 2.1. [21] **(Plancherel 定理)**

对任意 $g \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$, 则有 $\hat{g} \in L^2(\mathbb{R}^n)$, 并且满足

$$\|\hat{g}\|_{L^2} = \|g\|_{L^2}.$$

引理 2.2. (Hausdorff-Young 不等式)

设 $1 \leqslant p \leqslant 2, \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$, 若 $g \in L^p(\mathbb{R}^n)$, 则有$\hat{g} \in L^{p'}(\mathbb{R}^n)$ 且满足下列不等式

$$\|\hat{g}\|_{L^{p'}} \leqslant \|g\|_{L^p}.$$

引理 2.3. [21]**(卷积型 Young 不等式)**

设 $1 \leqslant p, q, m \leqslant \infty$ 满足 $\frac{1}{p}+\frac{1}{q} = 1+\frac{1}{m}$, 则对于任意的 $u \in L^p(\mathbb{R}^n), v \in L^q(\mathbb{R}^n)$, 有$u*v \in L^m(\mathbb{R}^n)$, 并且满足

$$\|u * v\|_{L^m} \leqslant \|u\|_{L^p}\|v\|_{L^q}.$$

引理 2.4. [21] **(Hölder 不等式)**

若 $1 \leqslant p, q \leqslant \infty$ 满足 $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, 对任意 $u \in L^p$, $v \in L^q$, 则有$uv \in L^1$, 且满足不等关系

$$\|uv\|_{L^1} \leqslant \|u\|_{L^p}\|v\|_{L^q}.$$

引理 2.5. [20]若 $f=f(u)$ 是一个光滑函数且满足 $f(u)=O(|u|^{1+\alpha}), u \to 0$, 其中 $\alpha \geqslant 1$ 是一个整数。$u \in L^\infty$ 且满足 $\|u\|_{L^\infty} \leqslant M_0$, 这里 M_0 是一个正的常数，设 $1 \leqslant p, q, r \leqslant \infty$ 且满足 $\frac{1}{r}=\frac{1}{p}+\frac{1}{q}$, $k \in \mathbb{Z}_+$, 则我们得到如下估计

$$\|\partial_x^k f(u)\|_{L^r} \leqslant C\|u\|_{L^p}\|\partial_x^k u\|_{L^q}\|u\|_{L^\infty}^{\alpha-1}.$$

进一步，我们还可得到

$$\begin{aligned}\|\partial_x^k(f(u_1)-f(u_2))\|_{L^r} \leqslant C\Big\{&(\|\partial_x^k u_1\|_{L^p}+\|\partial_x^k u_2\|_{L^p})\|u_1-u_2\|_{L^q} \\ &+(\|u_1\|_{L^q}+\|u_2\|_{L^q})\|\partial_x^k(u_1-u_2)\|_{L^p}\Big\}(\|u_1\|_{L^\infty}+\|u_2\|_{L^\infty})^{\alpha-1}.\end{aligned}$$

下面我们根据 Duhamel 原理求出方程(1.1)的积分表达式，对方程(1.1)做 Fourier 变换可得

$$\hat{u}_{tt}+|\xi|^2\hat{u}+|\xi|^4\hat{u}+|\xi|^2\hat{u}_t=-|\xi|^2(\hat{f}(u)+\hat{\varphi}), \tag{2.1}$$

其线性部分对应的特征方程为

$$\lambda^2+|\xi|^2\lambda+|\xi|^2+|\xi|^4=0, \tag{2.2}$$

求解得到

$$\lambda(|\xi|)=-\frac{1}{2}|\xi|^2 \pm iw(|\xi|), \quad w(|\xi|)=|\xi|\sqrt{1+\frac{3}{4}|\xi|^2}. \tag{2.3}$$

由 Duhamel 原理可知

$$u(t)=G(x,t-s)*u_t(s)+H(x,t-s)*u(s)+\int_s^t G(x,t-\tau)*\Delta(f(u)+\varphi)d\tau, t \geqslant s, \tag{2.4}$$

这里

$$\hat{G}(\xi,t)=\frac{e^{\lambda_+(\xi)t}-e^{\lambda_-(\xi)t}}{\lambda_+(\xi)-\lambda_-(\xi)}, \tag{2.5}$$

$$\hat{H}(\xi,t)=\frac{\lambda_+(\xi)e^{\lambda_-(\xi)t}-\lambda_-(\xi)e^{\lambda_+(\xi)t}}{\lambda_+(\xi)-\lambda_-(\xi)}. \tag{2.6}$$

将(2.5)和(2.6)式对时间变量 t 求导，我们得到

$$\partial_t \hat{G}(\xi,t) = \frac{\lambda_+(\xi)}{\lambda_+(\xi)-\lambda_-(\xi)} e^{\lambda_+(\xi)t} - \frac{\lambda_-(\xi)}{\lambda_+(\xi)-\lambda_-(\xi)} e^{\lambda_-(\xi)t}, \tag{2.7}$$

$$\partial_t \hat{H}(\xi,t) = \frac{\lambda_+\lambda_-(\xi)}{\lambda_+(\xi)-\lambda_-(\xi)} \left(e^{\lambda_-(\xi)t} - e^{\lambda_+(\xi)t}\right). \tag{2.8}$$

3. 解算子的衰减估计

这一小节建立解算子的衰减估计。我们引入一个光滑的截断函数，令

$$\chi(\xi) = \begin{cases} 1, |\xi| < r, \\ 0, |\xi| > 2r, \end{cases}$$

其中 $0 < r < 1$ 是一个常数。我们定义

$$\hat{f}_l = \chi(\xi)\hat{f}(\xi), \hat{f}_h = (1-\chi(\xi))\hat{f}(\xi).$$

那么

$$f_l = \chi(D)f(x), f_h = (1-\chi(D))f(x),$$

其中算子 $\chi(D) = \mathcal{F}^{-1}[\chi(\xi)]$.

引理 3.1. 对于函数 $\hat{G}(\xi,t)$, $\partial_t\hat{G}(\xi,t)$, $\hat{H}(\xi,t)$, $\partial_t\hat{H}(\xi,t)$, 我们有如下估计

$$|\hat{G}_l(\xi,t)| \leqslant C\frac{1}{|\xi|}e^{-c|\xi|^2 t}, |\hat{G}_h(\xi,t)| \leqslant C\frac{1}{|\xi|^2}e^{-c|\xi|^2 t}, \tag{3.1}$$

$$|\partial_t\hat{G}_l(\xi,t)| \leqslant Ce^{-c|\xi|^2 t}, |\partial_t\hat{G}_h(\xi,t)| \leqslant Ce^{-c|\xi|^2 t}, \tag{3.2}$$

$$|\hat{H}_l(\xi,t)| \leqslant Ce^{-c|\xi|^2 t}, |\hat{H}_h(\xi,t)| \leqslant Ce^{-c|\xi|^2 t}, \tag{3.3}$$

$$|\partial_t\hat{H}_l(\xi,t)| \leqslant C|\xi|e^{-c|\xi|^2 t}, |\partial_t\hat{H}_h(\xi,t)| \leqslant C|\xi|^2e^{-c|\xi|^2 t}. \tag{3.4}$$

证明 当 $|\xi| \leqslant r < 1$ 时，由(2.3)式以及 Taylor 展开公式，我们得到

$$w(|\xi|) = |\xi|\sqrt{1+\frac{3}{4}|\xi|^2} = |\xi| + O(|\xi|^3). \tag{3.5}$$

$$w(|\xi|)^{-1} = \left(|\xi|\sqrt{1+\frac{3}{4}|\xi|^2}\right)^{-1} = \frac{1}{|\xi|} - \frac{3}{8}|\xi| + O(|\xi|^3). \tag{3.6}$$

$$\frac{1}{\lambda_+(\xi)-\lambda_-(\xi)}=\frac{1}{2iw(|\xi|)}=\frac{1}{2i}(\frac{1}{|\xi|}-\frac{3}{8}|\xi|+O(|\xi|^3)). \tag{3.7}$$

$$\begin{aligned}\frac{\lambda_+(\xi)}{\lambda_+(\xi)-\lambda_-(\xi)}&=\frac{-\frac{1}{2}|\xi|^2+iw(|\xi|)}{2iw(|\xi|)}=\frac{1}{2}-\frac{1}{4i}|\xi|^2(w(|\xi|))^{-1}\\&=\frac{1}{2}-\frac{1}{4i}|\xi|^2(\frac{1}{|\xi|}-\frac{3}{8}|\xi|+O(|\xi|^3))\\&=\frac{1}{2}-\frac{1}{4i}(|\xi|+O(|\xi|^3)).\end{aligned} \tag{3.8}$$

$$\begin{aligned}\frac{\lambda_-(\xi)}{\lambda_+(\xi)-\lambda_-(\xi)}&=\frac{-\frac{1}{2}|\xi|^2-iw(|\xi|)}{2iw(|\xi|)}=-\frac{1}{2}-\frac{1}{4i}|\xi|^2(w(|\xi|))^{-1}\\&=-\frac{1}{2}-\frac{1}{4i}|\xi|^2(\frac{1}{|\xi|}-\frac{3}{8}|\xi|+O(|\xi|^3))\\&=-\frac{1}{2}-\frac{1}{4i}(|\xi|+O(|\xi|^3)).\end{aligned} \tag{3.9}$$

$$\begin{aligned}\frac{\lambda_+\lambda_-(\xi)}{\lambda_+(\xi)-\lambda_-(\xi)}&=\frac{\frac{1}{4}|\xi|^4+(w(|\xi|))^2}{2iw(|\xi|)}=\frac{1}{2i}\left(w(|\xi|))+\frac{1}{4}|\xi|^4(w(|\xi|))^{-1}\right)\\&=\frac{1}{2i}\left((|\xi|+O(|\xi|^3))+\frac{1}{4}|\xi|^4(\frac{1}{|\xi|}-\frac{3}{8}|\xi|+O(|\xi|^3))\right)\\&=\frac{1}{2i}\left(|\xi|+O(|\xi|^3)\right).\end{aligned} \tag{3.10}$$

当 $|\xi|\geqslant r$ 时，由(2.3)式以及 Taylor 展开公式，我们得到

$$w(|\xi|)=|\xi|\sqrt{1+\frac{3}{4}|\xi|^2}=\frac{\sqrt{3}}{2}|\xi|^2\left(1+\frac{4}{3}\frac{1}{|\xi|^2}\right)^{\frac{1}{2}}=\frac{\sqrt{3}}{2}|\xi|^2+\frac{\sqrt{3}}{3}+O(\frac{1}{|\xi|^2}). \tag{3.11}$$

$$w(|\xi|)^{-1}=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}|\xi|^2\sqrt{1+\frac{4}{3}\frac{1}{|\xi|^2}}\right)^{-1}=\frac{2\sqrt{3}}{3}\frac{1}{|\xi|^2}\left(1+\frac{4}{3}\frac{1}{|\xi|^2}\right)^{-\frac{1}{2}}=\frac{2\sqrt{3}}{3}\frac{1}{|\xi|^2}+O(\frac{1}{|\xi|^4}). \tag{3.12}$$

$$\frac{1}{\lambda_+(\xi)-\lambda_-(\xi)}=\frac{1}{2iw(|\xi|)}=\frac{1}{2i}\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\frac{1}{|\xi|^2}+O(\frac{1}{|\xi|^4})\right). \tag{3.13}$$

$$\begin{aligned}\frac{\lambda_+(\xi)}{\lambda_+(\xi)-\lambda_-(\xi)}&=\frac{-\frac{1}{2}|\xi|^2+iw(|\xi|)}{2iw(|\xi|)}=\frac{1}{2}-\frac{1}{4i}|\xi|^2(w(|\xi|))^{-1}\\&=\frac{1}{2}-\frac{1}{4i}|\xi|^2(\frac{2\sqrt{3}}{3}\frac{1}{|\xi|^2}+O(\frac{1}{|\xi|^4}))\\&=\frac{1}{2}-\frac{1}{4i}(\frac{2\sqrt{3}}{3}+O(\frac{1}{|\xi|^2})).\end{aligned} \tag{3.14}$$

$$\begin{aligned}\frac{\lambda_-(\xi)}{\lambda_+(\xi)-\lambda_-(\xi)} &= \frac{-\frac{1}{2}|\xi|^2 - iw(|\xi|)}{2iw(|\xi|)} = -\frac{1}{2} - \frac{1}{4i}|\xi|^2(w(|\xi|))^{-1} \\ &= -\frac{1}{2} - \frac{1}{4i}|\xi|^2(\frac{2\sqrt{3}}{3}\frac{1}{|\xi|^2} + O(\frac{1}{|\xi|^4})) \\ &= -\frac{1}{2} - \frac{1}{4i}(\frac{2\sqrt{3}}{3} + O(\frac{1}{|\xi|^2})).\end{aligned} \tag{3.15}$$

$$\begin{aligned}\frac{\lambda_+\lambda_-(\xi)}{\lambda_+(\xi)-\lambda_-(\xi)} &= \frac{\frac{1}{4}|\xi|^4 + (w(|\xi|))^2}{2iw(|\xi|)} = \frac{1}{2i}\left(w(|\xi|)) + \frac{1}{4}|\xi|^4(w(|\xi|))^{-1}\right) \\ &= \frac{1}{2i}\Big((\frac{\sqrt{3}}{2}|\xi|^2 + \frac{\sqrt{3}}{3} + O(\frac{1}{|\xi|^2}))) \\ &\qquad + \frac{1}{4}|\xi|^4(\frac{2\sqrt{3}}{3}\frac{1}{|\xi|^2} - \frac{4\sqrt{3}}{9}\frac{1}{|\xi|^4} + O(\frac{1}{|\xi|^6}))\Big) \\ &= \frac{1}{2i}\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}|\xi|^2 + \frac{2\sqrt{3}}{9} + O(\frac{1}{|\xi|^2})\right).\end{aligned} \tag{3.16}$$

根据上述计算结果，我们建立 Green 函数的逐点估计。当 $|\xi| \leqslant r < 1$ 时，我们可得

$$\begin{aligned}|\hat{G}_l(\xi,t)| &= \Big|\frac{1}{\lambda_+(\xi)-\lambda_-(\xi)}(e^{\lambda_+(\xi)t} - e^{\lambda_-(\xi)t})\Big| \\ &= \Big|\frac{1}{2i}\left(\frac{1}{|\xi|} - \frac{3}{8}|\xi| + O(|\xi|^3)\right)e^{-\frac{1}{2}|\xi|^2 t}(e^{itw(|\xi|)} - e^{-itw(|\xi|)})\Big| \\ &\leqslant C\frac{1}{|\xi|}e^{-c|\xi|^2 t}.\end{aligned} \tag{3.17}$$

$$\begin{aligned}|\partial_t\hat{G}_l(\xi,t)| &= \Big|\frac{\lambda_+(\xi)}{\lambda_+(\xi)-\lambda_-(\xi)}e^{\lambda_+(\xi)t} - \frac{\lambda_-(\xi)}{\lambda_+(\xi)-\lambda_-(\xi)}e^{\lambda_-(\xi)t}\Big| \\ &= \Big|\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4i}(|\xi| + O(|\xi|^3))\right)e^{-\frac{1}{2}|\xi|^2 t}e^{itw(|\xi|)} \\ &\qquad - \left(-\frac{1}{2} - \frac{1}{4i}(|\xi| + O(|\xi|^3))\right)e^{-\frac{1}{2}|\xi|^2 t}e^{-itw(|\xi|)}\Big| \\ &\leqslant Ce^{-c|\xi|^2 t}.\end{aligned} \tag{3.18}$$

$$\begin{aligned}|\hat{H}_l(\xi,t)| &= \Big|\frac{\lambda_+(\xi)}{\lambda_+(\xi)-\lambda_-(\xi)}e^{\lambda_-(\xi)t} - \frac{\lambda_-(\xi)}{\lambda_+(\xi)-\lambda_-(\xi)}e^{\lambda_+(\xi)t}\Big| \\ &= \Big|\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4i}(|\xi| + O(|\xi|^3))\right)e^{-\frac{1}{2}|\xi|^2 t}e^{-itw(|\xi|)} \\ &\qquad - \left(-\frac{1}{2} - \frac{1}{4i}(|\xi| + O(|\xi|^3))\right)e^{-\frac{1}{2}|\xi|^2 t}e^{itw(|\xi|)}\Big| \\ &\leqslant Ce^{-c|\xi|^2 t}.\end{aligned} \tag{3.19}$$

DOI: 10.12677/pm.2023.135122

$$
\begin{aligned}
|\partial_t \hat{H}_l(\xi,t)| &= \Big|\frac{\lambda_+(\xi)\lambda_-(\xi)}{\lambda_+(\xi)-\lambda_-(\xi)}\left(e^{\lambda_-(\xi)t}-e^{\lambda_+(\xi)t}\right)\Big| \\
&= \Big|\frac{1}{2i}\left(|\xi|+O(|\xi|^3)\right)e^{-\frac{1}{2}|\xi|^2 t}\left(e^{itw(|\xi|)}-e^{-itw(|\xi|)}\right)\Big| \\
&\leqslant C|\xi|e^{-c|\xi|^2 t}.
\end{aligned} \tag{3.20}
$$

当 $|\xi|\geqslant r$ 时，我们可得

$$
\begin{aligned}
|\hat{G}_h(\xi,t)| &= \Big|\frac{1}{\lambda_+(\xi)-\lambda_-(\xi)}(e^{\lambda_+(\xi)t}-e^{\lambda_-(\xi)t})\Big| \\
&= \Big|\frac{1}{2i}\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\frac{1}{|\xi|^2}+O(\frac{1}{|\xi|^4})\right)e^{-\frac{1}{2}|\xi|^2 t}(e^{itw(|\xi|)}-e^{-itw(|\xi|)})\Big| \\
&\leqslant C\frac{1}{|\xi|^2}e^{-c|\xi|^2 t}.
\end{aligned} \tag{3.21}
$$

$$
\begin{aligned}
|\partial_t \hat{G}_h(\xi,t)| &= \Big|\frac{\lambda_+(\xi)}{\lambda_+(\xi)-\lambda_-(\xi)}e^{\lambda_+(\xi)t}-\frac{\lambda_-(\xi)}{\lambda_+(\xi)-\lambda_-(\xi)}e^{\lambda_-(\xi)t}\Big| \\
&= \Big|\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4i}(\frac{2\sqrt{3}}{3}+O(\frac{1}{|\xi|^2}))\right)e^{-\frac{1}{2}|\xi|^2 t}e^{itw(|\xi|)} \\
&\qquad\qquad -\left(-\frac{1}{2}-\frac{1}{4i}(\frac{2\sqrt{3}}{3}+O(\frac{1}{|\xi|^2}))\right)e^{-\frac{1}{2}|\xi|^2 t}e^{-itw(|\xi|)}\Big| \\
&\leqslant Ce^{-c|\xi|^2 t}.
\end{aligned} \tag{3.22}
$$

$$
\begin{aligned}
|\hat{H}_h(\xi,t)| &= \Big|\frac{\lambda_+(\xi)}{\lambda_+(\xi)-\lambda_-(\xi)}e^{\lambda_-(\xi)t}-\frac{\lambda_-(\xi)}{\lambda_+(\xi)-\lambda_-(\xi)}e^{\lambda_+(\xi)t}\Big| \\
&= \Big|\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4i}(\frac{2\sqrt{3}}{3}+O(\frac{1}{|\xi|^2}))\right)e^{-\frac{1}{2}|\xi|^2 t}e^{-itw(|\xi|)} \\
&\qquad\qquad -\left(-\frac{1}{2}-\frac{1}{4i}(\frac{2\sqrt{3}}{3}+O(\frac{1}{|\xi|^2}))\right)e^{-\frac{1}{2}|\xi|^2 t}e^{itw(|\xi|)}\Big| \\
&\leqslant Ce^{-c|\xi|^2 t}.
\end{aligned} \tag{3.23}
$$

$$
\begin{aligned}
|\partial_t \hat{H}(\xi,t)| &= \Big|\frac{\lambda_+(\xi)\lambda_-(\xi)}{\lambda_+(\xi)-\lambda_-(\xi)}\left(e^{\lambda_-(\xi)t}-e^{\lambda_+(\xi)t}\right)\Big| \\
&= \Big|\frac{1}{2i}\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}|\xi|^2+\frac{2\sqrt{3}}{9}+O(\frac{1}{|\xi|^2})\right)e^{-\frac{1}{2}|\xi|^2 t}\left(e^{itw(|\xi|)}-e^{-itw(|\xi|)}\right)\Big| \\
&\leqslant C|\xi|^2 e^{-c|\xi|^2 t}.
\end{aligned} \tag{3.24}
$$

综上所述，引理 3.1 成立。 □

下面我们利用引理 3.1 建立解算子的衰减估计。

引理 3.2. 设 $1 \leqslant p \leqslant 2$, k, j, l 为非负整数，$0 \leqslant j \leqslant k$, $k+l-2 \geqslant 0$, 则有下列估计

$$\|\partial_x^k G(x,t) * f\|_{L^2} \leqslant C(1+t)^{-\frac{n(\frac{1}{p}-\frac{1}{2})-1}{2}-\frac{k-j}{2}}\|\partial_x^j f\|_{L^p} + Ce^{-ct}\|\partial_x^{k+l-2} f\|_{L^2}. \tag{3.25}$$

$$\|\partial_x^k \partial_t G(x,t) * f\|_{L^2} \leqslant C(1+t)^{-\frac{n(\frac{1}{p}-\frac{1}{2})}{2}-\frac{k-j}{2}}\|\partial_x^j f\|_{L^p} + Ce^{-ct}\|\partial_x^{k+l} f\|_{L^2}. \tag{3.26}$$

$$\|\partial_x^k H(x,t) * f\|_{L^2} \leqslant C(1+t)^{-\frac{n(\frac{1}{p}-\frac{1}{2})}{2}-\frac{k-j}{2}}\|\partial_x^j f\|_{L^p} + Ce^{-ct}\|\partial_x^{k+l} f\|_{L^2}. \tag{3.27}$$

$$\|\partial_x^k \partial_t H(x,t) * f\|_{L^2} \leqslant C(1+t)^{-\frac{n(\frac{1}{p}-\frac{1}{2})}{2}-\frac{k+1-j}{2}}\|\partial_x^j f\|_{L^p} + Ce^{-ct}\|\partial_x^{k+2+l} f\|_{L^2}. \tag{3.28}$$

$$\|\partial_x^k G(x,t) * \Delta f\|_{L^2} \leqslant C(1+t)^{-\frac{n(\frac{1}{p}-\frac{1}{2})}{2}-\frac{k+1-j}{2}}\|\partial_x^j f\|_{L^p} + Ce^{-ct}\|\partial_x^{k+l} f\|_{L^2}. \tag{3.29}$$

$$\|\partial_x^k \partial_t G(x,t) * \Delta f\|_{L^2} \leqslant C(1+t)^{-\frac{n(\frac{1}{p}-\frac{1}{2})}{2}-\frac{k+2-j}{2}}\|\partial_x^j f\|_{L^p} + Ce^{-ct}\|\partial_x^{k+l+2} f\|_{L^2}. \tag{3.30}$$

证明 对于 $\partial_x^k G(x,t) * f$, 由 Plancherel 定理可知

$$\begin{aligned}\|\partial_x^k G(x,t) * f\|_{L^2}^2 &= \int_{\mathbb{R}^n} |\xi|^{2k}|\hat{G}_l(\xi,t)|^2|\hat{f}|^2 d\xi + \int_{\mathbb{R}^n} |\xi|^{2k}|\hat{G}_h(\xi,t)|^2|\hat{f}|^2 d\xi \\ &= I_1 + I_2.\end{aligned} \tag{3.31}$$

对于I_1, 令 $1 \leqslant p \leqslant 2$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1$, $\frac{2}{p'}+\frac{1}{q}=1$, 由(3.1)，Hölder 不等式以及 Hausdorff-Young 不等式可知

$$\begin{aligned} I_1 &\leqslant \int_{|\xi|\leqslant 2r} |\xi|^{2k}|\hat{G}_l(\xi,t)|^2|\hat{f}|^2 d\xi \leqslant C\int_{|\xi|\leqslant 2r} |\xi|^{2k}\left|\frac{1}{|\xi|}e^{-c|\xi|^2 t}\right|^2|\hat{f}|^2 d\xi \\ &\leqslant C\left(\int_{|\xi|\leqslant 2r}\left||\xi|^{2(k-1-j)}e^{-c|\xi|^2 t}\right|^q d\xi\right)^{\frac{1}{q}}\left(\int_{|\xi|\leqslant 2r}\left||\xi|^{2j}|\hat{f}|^2\right|^{\frac{p'}{2}} d\xi\right)^{\frac{2}{p'}} \\ &\leqslant C(1+t)^{-(n(\frac{1}{p}-\frac{1}{2})-1)-(k-j)}\|\partial_x^j f\|_{L^p}^2, \end{aligned} \tag{3.32}$$

对于 I_2, 由(3.1)可得

$$\begin{aligned} I_2 &\leqslant C\int_{|\xi|\geqslant r} |\xi|^{2k}|\hat{G}_h(\xi,t)|^2|\hat{f}|^2 d\xi \leqslant C\int_{|\xi|\geqslant r} |\xi|^{2k}\left|\frac{1}{|\xi|^2}e^{-c|\xi|^2 t}\right|^2|\hat{f}|^2 d\xi \\ &\leqslant C\int_{|\xi|\geqslant r} |\xi|^{2(k-2)}e^{-c|\xi|^2 t}|\hat{f}|^2 d\xi \leqslant C\int_{|\xi|\geqslant r} |\xi|^{2(k-2)}|\xi|^{2l}e^{-c|\xi|^2 t}|\hat{f}|^2 d\xi \\ &\leqslant Ce^{-ct}\int_{|\xi|\geqslant r} |\xi|^{2(k+l-2)}|\hat{f}|^2 d\xi \leqslant Ce^{-ct}\|\partial_x^{k+l-2} f\|_{L^2}^2. \end{aligned} \tag{3.33}$$

由(3.32)和(3.33)可得

$$\|\partial_x^k G(x,t)*f\|_{L^2}\leqslant C(1+t)^{-\frac{n(\frac{1}{p}-\frac{1}{2})-1}{2}-\frac{k-j}{2}}\|\partial_x^j f\|_{L^p}+Ce^{-ct}\|\partial_x^{k+l-2}f\|_{L^2}. \tag{3.34}$$

其余各式证明过程类似，这里不再详述，因此引理3.2成立。 □

4. 时间周期解的存在唯一性

定理 4.1. 设 $n\geqslant 3$ 和 $m\geqslant \frac{n}{2}$ 都为整数，$\varphi\in C([0,T];L^1)\cap C([0,T];H^m)$ 是周期为 T 的时间周期函数，令

$$E_0=\sup_{0\leqslant t\leqslant T}\left(\|\varphi\|_{L^1}+\|\varphi\|_{H^m}\right),$$

则存在一个充分小的正常数 $\delta_0>0$, 当 $E_0<\delta_0$ 时，方程 (1.1) 存在唯一时间周期解 $u^{per}\in C([0,T];H^m)\cap C^1([0,T];H^{m-2})$, 并且满足

$$\sup_{0\leqslant t\leqslant T}\left(\|u^{per}(t)\|_{H^m}+\|u_t^{per}(t)\|_{H^{m-2}}\right)\leqslant CE_0.$$

证明　第一步，假设方程(1.1)存在唯一解 $u^{per}\in C([0,T];H^m)\cap C^1([0,T];H^{m-2})$, 我们将证明 u^{per} 就是时间周期解。我们定义如下形式的积分方程：

$$u^{per}(t)=G(t-s)*u_t^{per}(s)+H(t-s)*u^{per}(s)+\int_s^t G(t-\tau)*\Delta[f(u^{per})+\varphi](\tau)d\tau. \tag{4.1}$$

其中 φ 是周期为 T 的时间周期函数。由解的积分表达式(2.4)可知，(4.1)是方程(1.1)及初值条件

$$t=s:u_0=u^{per}(s),u_1=u_t^{per}(s) \tag{4.2}$$

的解。令(4.1)中$s=-kT,k\in\mathbb{N}$, 则有

$$\begin{aligned}u^{per}(t)=&G(t+kT)*u_t^{per}(-kT)+H(t+kT)*u^{per}(-kT)\\&+\int_{-kT}^t G(t-\tau)*\Delta[f(u^{per})+\varphi](\tau)d\tau.\end{aligned} \tag{4.3}$$

当 $n\geqslant 3$ 时，令引理3.2中(3.25)式：$p=1,j=0,l=0$, 我们可得

$$\|G(t+kT)*g\|_{H^m}\leqslant C(1+t+kT)^{-\frac{n-2}{4}}\left(\|g\|_{L^1}+\|g\|_{H^m}\right). \tag{4.4}$$

因为 $L^2\cap L^1$ 在 L^2 中稠密，当 $k\to\infty$ 时，对任意 $g\in H^m$, 由 (4.4) 可得

$$\|G(t+kT)*g\|_{H^m}\to 0. \tag{4.5}$$

类似的，当 $n\geqslant 1$ 时，令引理3.2中(3.27)式：$p=1,j=0,l=0$, 我们可得

$$\|H(t+kT)*g\|_{H^m} \leqslant C(1+t+kT)^{-\frac{n}{4}}\left(\|g\|_{L^1}+\|g\|_{H^m}\right). \tag{4.6}$$

因为 $L^2\cap L^1$ 在 L^2 中稠密，对任意 $g\in H^m$, 当 $k\to\infty$ 时，由 (4.6) 可得

$$\|H(t+kT)*g\|_{H^m} \to 0. \tag{4.7}$$

由(4.5)和(4.7)可知，当 $k\to\infty$ 时，对(4.3)取极限可得

$$u^{per}(t)=\int_{-\infty}^{t} G(t-\tau)*\Delta[f(u^{per})+\varphi](\tau)d\tau. \tag{4.8}$$

我们构造如下形式的映射：

$$N(u^{per}(t))=\int_{-\infty}^{t} G(t-\tau)*\Delta[f(u^{per})+\varphi](\tau)d\tau. \tag{4.9}$$

假设映射 N 存在唯一不动点 $u_1^{per}(t)$, 则有 $N(u_1^{per})(t)=u_1^{per}(t)$, 令 $u_2^{per}(t)=u_1^{per}(t+T)$, 由(4.9)以及 $\varphi(t+T)=\varphi(t)$ 可知

$$\begin{aligned}
u_2^{per}(t) &= u_1^{per}(t+T)=N(u_1^{per}(t+T)) \\
&= \int_{-\infty}^{t+T} G(t+T-(\tau+T))*\Delta[f(u_1^{per})+\varphi](\tau+T)d\tau. \\
&= \int_{-\infty}^{t} G(t-\tau)*\Delta[f(u_2^{per})+\varphi](\tau)d\tau. \\
&= N(u_2^{per})(t).
\end{aligned} \tag{4.10}$$

由(4.10)可知，$u_2(t)$ 也是映射 N 的不动点，由不动点的唯一性可知

$$u_1^{per}(t)=u_2^{per}(t)=u_1^{per}(t+T), \tag{4.11}$$

因此 $u_1^{per}(t)$ 是周期为 T 的时间周期函数。

第二步， 我们利用压缩映射原理证明含粘性 Boussinesq 方程(1.1)存在唯一解 $u^{per}\in C([0,T];H^m)\cap C^1([0,T];H^{m-2})$. 我们先定义

$$E_0=\sup_{0\leqslant t\leqslant T}\left(\|\varphi\|_{L^1}+\|\varphi\|_{H^m}\right).$$

再构造一个恰当的度量空间

$$X=\{u^{per}\in C([0,T];H^m)\cap C^1([0,T];H^{m-2}):\|u^{per}\|_X\leqslant\rho\},$$

其中 ρ 是一个正常数，引进范数

$$\|\cdot\|_X=\sup_{0\leqslant t\leqslant T}\left(\|u^{per}\|_{H^m}+\|u_t^{per}\|_{H^{m-2}}\right),$$

定义度量 $d=\|u_1^{per}-u_2^{per}\|_X$, 由标准化方法可知 (X,d) 是完备度量空间，参阅文献 [17]。

我们要证方程(1.1)解的存在唯一性，只需证明(4.9)中的映射 N 在度量空间 X 中存在唯一不动点。考察映射

$$N(u^{per}(t))=\int_{-\infty}^{t}G(t-\tau)*\triangle[f(u^{per})+\varphi](\tau)d\tau. \tag{4.12}$$

我们首先证明 $N:X\to X$. 对任意 $u^{per}\in X$, 设 k,m 是整数且满足 $0\leqslant k\leqslant m$, 令引理3.2中(3.29)式：$p=1,j=0,l=0$, 由引理2.5以及 sobolev 嵌入定理 $H^m\hookrightarrow L^\infty(m>\frac{n}{2})$, 我们可得

$$\begin{aligned}
&\|\partial_x^k N(u^{per}(t))\|_{L^2}\leqslant\int_{-\infty}^{t}\|\partial_x^k G(t-\tau)*\Delta[f(u^{per})+\varphi](\tau)\|_{L^2}d\tau\\
&\leqslant C\int_{-\infty}^{t}(1+t-\tau)^{-\frac{n}{4}-\frac{k+1}{2}}\|f(u^{per})\|_{L^1}d\tau+C\int_{-\infty}^{t}e^{-c(t-\tau)}\|\partial_x^k f(u^{per})\|_{L^2}d\tau\\
&\qquad+C\int_{-\infty}^{t}(1+t-\tau)^{-\frac{n}{4}-\frac{k+1}{2}}\|\varphi\|_{L^1}d\tau+C\int_{-\infty}^{t}e^{-c(t-\tau)}\|\partial_x^k\varphi\|_{L^2}d\tau\\
&\leqslant C\int_{-\infty}^{t}(1+t-\tau)^{-\frac{n}{4}-\frac{k+1}{2}}\left(\|f(u^{per})\|_{L^1}+\|\partial_x^k f(u^{per})\|_{L^2}\right)d\tau\\
&\qquad+C\int_{-\infty}^{t}(1+t-\tau)^{-\frac{n}{4}-\frac{k+1}{2}}\left(\|\varphi\|_{L^1}+\|\partial_x^k\varphi\|_{L^2}\right)d\tau\\
&\leqslant C\int_{-\infty}^{t}(1+t-\tau)^{-\frac{n}{4}-\frac{k+1}{2}}\Big(\|u^{per}\|_{L^\infty}^{\sigma-1}\|u^{per}\|_{L^2}+\|u^{per}\|_{L^\infty}^{\sigma-1}\|\partial_x^k u^{per}\|_{L^2}\Big)d\tau\\
&\qquad+C\int_{-\infty}^{t}(1+t-\tau)^{-\frac{n}{4}-\frac{k+1}{2}}\left(\|\varphi\|_{L^1}+\|\partial_x^k\varphi\|_{L^2}\right)d\tau\\
&\leqslant C\Big(\|u^{per}\|_X^\sigma+\sup_{0\leqslant t\leqslant T}(\|\varphi\|_{L^1}+\|\varphi\|_{H^m})\Big)\int_{-\infty}^{t}(1+t-\tau)^{-\frac{n}{4}-\frac{k+1}{2}}d\tau\\
&\leqslant C\|u^{per}\|_X^\sigma+CE_0.
\end{aligned}\tag{4.13}$$

类似的，对任意 $u^{per}\in X$, 设 $\widetilde{k},m$ 是整数且满足 $0\leqslant\widetilde{k}\leqslant m-2$, 令引理3.2中(3.30)式：$p=1,j=0,l=0$, 由引理2.5以及 sobolev 嵌入定理 $H^m\hookrightarrow L^\infty(m>\frac{n}{2})$, 我们可得

$$\begin{aligned}
&\|\partial_x^{\widetilde{k}}\partial_t N(u^{per}(t))\|_{L^2}\leqslant\int_{-\infty}^{t}\|\partial_x^{\widetilde{k}}\partial_t G(t-\tau)*\Delta[f(u^{per})+\varphi](\tau)\|_{L^2}d\tau\\
&\leqslant C\int_{-\infty}^{t}(1+t-\tau)^{-\frac{n}{4}-\frac{\widetilde{k}+2}{2}}\|f(u^{per})\|_{L^1}d\tau+C\int_{-\infty}^{t}e^{-c(t-\tau)}\|\partial_x^{\widetilde{k}+2}f(u^{per})\|_{L^2}d\tau\\
&\qquad+C\int_{-\infty}^{t}(1+t-\tau)^{-\frac{n}{4}-\frac{\widetilde{k}+2}{2}}\|\varphi\|_{L^1}d\tau+C\int_{-\infty}^{t}e^{-c(t-\tau)}\|\partial_x^{\widetilde{k}+2}\varphi\|_{L^2}d\tau\\
&\leqslant C\int_{-\infty}^{t}(1+t-\tau)^{-\frac{n}{4}-\frac{\widetilde{k}+2}{2}}\left(\|f(u^{per})\|_{L^1}+\|\partial_x^{\widetilde{k}+2}f(u^{per})\|_{L^2}\right)d\tau\\
&\qquad+C\int_{-\infty}^{t}(1+t-\tau)^{-\frac{n}{4}-\frac{\widetilde{k}+2}{2}}\left(\|\varphi\|_{L^1}+\|\partial_x^{\widetilde{k}+2}\varphi\|_{L^2}\right)d\tau
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\leqslant C\int_{-\infty}^{t}(1+t-\tau)^{-\frac{n}{4}-\frac{\widetilde{k}+2}{2}}\left(\|u^{per}\|_{L^\infty}^{\sigma-1}\|u^{per}\|_{L^2}+\|u^{per}\|_{L^\infty}^{\sigma-1}\|\partial_x^{\widetilde{k}+2}u^{per}\|_{L^2}\right)d\tau\\
&\qquad\qquad+C\int_{-\infty}^{t}(1+t-\tau)^{-\frac{n}{4}-\frac{\widetilde{k}+2}{2}}\left(\|\varphi\|_{L^1}+\|\partial_x^{\widetilde{k}+2}\varphi\|_{L^2}\right)d\tau\\
&\leqslant C\Big(\|u^{per}\|_X^{\sigma}+\sup_{0\leqslant t\leqslant T}(\|\varphi\|_{L^1}+\|\varphi\|_{H^m})\Big)\int_{-\infty}^{t}(1+t-\tau)^{-\frac{n}{4}-\frac{\widetilde{k}+2}{2}}d\tau\\
&\leqslant C\|u^{per}\|_X^{\sigma}+CE_0.
\end{aligned}\tag{4.14}
$$

由(4.13)和(4.14)可得

$$\|N(u^{per})\|_X\leqslant C\|u^{per}\|_X^{\sigma}+CE_0.\tag{4.15}$$

因为 $\sigma\geqslant 2$, 我们取 $\rho=4CE_0$, 当 E_0 充分小时，则有

$$\|N(u^{per})\|_X\leqslant C\|u^{per}\|_X^{\sigma}+CE_0\leqslant 2CE_0\leqslant\rho.\tag{4.16}$$

由(4.16)可知, $N:X\to X$.

最后我们证明 N 是压缩映射，对任意 $u_1^{per},u_2^{per}\in X$, 由(4.9)可知

$$[N(u_1^{per})-N(u_2^{per})](t)=\int_{-\infty}^{t}G(t-\tau)*\Delta[f(u_1^{per})-f(u_2^{per})](\tau)d\tau.\tag{4.17}$$

设 k,m 是整数且满足 $0\leqslant k\leqslant m$, 令引理3.2中(3.29) 式：$p=1,j=0,l=0$, 由引理2.5 以及 sobolev 嵌入定理 $H^m\hookrightarrow L^\infty(m>\frac{n}{2})$, 我们可得

$$
\begin{aligned}
&\|\partial_x^k[N(u_1^{per})-N(u_2^{per})](t)\|_{L^2}\\
\leqslant&\int_{-\infty}^{t}\|\partial_x^kG(t-\tau)*\Delta\big[f(u_1^{per})-f(u_2^{per})\big](\tau)\|_{L^2}d\tau\\
\leqslant&\,C\int_{-\infty}^{t}(1+t-\tau)^{-\frac{n}{4}-\frac{k+1}{2}}\|\big[f(u_1^{per})-f(u_2^{per})\big](\tau)\|_{L^1}d\tau\\
&+C\int_{-\infty}^{t}e^{-c(t-\tau)}\|\partial_x^k\big[f(u_1^{per})-f(u_2^{per})\big](\tau)\|_{L^2}d\tau\\
\leqslant&\,C\int_{-\infty}^{t}(1+t-\tau)^{-\frac{n}{4}-\frac{k+1}{2}}\Big\{\|f(u_1^{per})-f(u_2^{per})\|_{L^1}+\|\partial_x^k\big[f(u_1^{per})-f(u_2^{per})\big](\tau)\|_{L^2}\Big\}d\tau\\
\leqslant&\,C\int_{-\infty}^{t}(1+t-\tau)^{-\frac{n}{4}-\frac{k+1}{2}}\Big\{(\|u_1^{per}\|_{L^\infty}+\|u_2^{per}\|_{L^\infty})^{\sigma-2}(\|u_1^{per}\|_{L^2}+\|u_2^{per}\|_{L^2})\|u_1^{per}-u_2^{per}\|_{L^2}\\
&+(\|u_1^{per}\|_{L^\infty}+\|u_2^{per}\|_{L^\infty})^{\sigma-2}\Big[(\|\partial_x^ku_1^{per}\|_{L^2}+\|\partial_x^ku_2^{per}\|_{L^2})\|u_1^{per}-u_2^{per}\|_{L^\infty}\\
&\qquad\qquad+(\|u_1^{per}\|_{L^\infty}+\|u_2^{per}\|_{L^\infty})\|\partial_x^k[u_1^{per}-u_2^{per}]\|_{L^2}\Big]\Big\}d\tau\\
\leqslant&\,C\left(\|u_1^{per}\|_X+\|u_2^{per}\|_X\right)^{\sigma-1}\|u_1^{per}-u_2^{per}\|_X\int_{-\infty}^{t}(1+t-\tau)^{-\frac{n}{4}-\frac{k+1}{2}}d\tau\\
\leqslant&\,C\left(\|u_1^{per}\|_X+\|u_2^{per}\|_X\right)^{\sigma-1}\|u_1^{per}-u_2^{per}\|_X.
\end{aligned}\tag{4.18}
$$

类似的，设 $\widetilde{k}, m$ 是整数且满足 $0 \leqslant \widetilde{k} \leqslant m-2$，令引理3.2中(3.30) 式：$p=1, j=0, l=0$，由引理2.5以及 sobolev 嵌入定理 $H^m \hookrightarrow L^\infty(m>\frac{n}{2})$ 可知

$$\begin{aligned}
&\|\partial_x^{\widetilde{k}}\partial_t[N(u_1^{per})-N(u_2^{per})](t)\|_{L^2}\\
&\leqslant \int_{-\infty}^t \|\partial_x^{\widetilde{k}}\partial_t G(t-\tau)*\Delta\big[f(u_1^{per})-f(u_2^{per})\big](\tau)\|_{L^2}d\tau\\
&\leqslant C\int_{-\infty}^t (1+t-\tau)^{-\frac{n}{4}-\frac{\widetilde{k}+2}{2}}\|\big[f(u_1^{per})-f(u_2^{per})\big](\tau)\|_{L^1}d\tau\\
&\quad + C\int_{-\infty}^t e^{-c(t-\tau)}\|\partial_x^{\widetilde{k}+2}\big[f(u_1^{per})-f(u_2^{per})\big](\tau)\|_{L^2}d\tau\\
&\leqslant C\left(\|u_1^{per}\|_X+\|u_2^{per}\|_X\right)^{\sigma-1}\|u_1^{per}-u_2^{per}\|_X.
\end{aligned} \tag{4.19}$$

由(4.18)和(4.19)可得

$$\begin{aligned}
\|[N(u_1^{per})-N(u_2^{per})](t)\|_X &\leqslant C\left(\|u_1^{per}\|_X+\|u_2^{per}\|_X\right)^{\sigma-1}\|u_1^{per}-u_2^{per}\|_X\\
&\leqslant C\rho^{\sigma-1}\|u_1^{per}-u_2^{per}\|_X.
\end{aligned} \tag{4.20}$$

注意到 $\sigma \geqslant 2$, $\rho = 4CE_0$, 当 E_0 充分小时，由(4.20)可得

$$\|[N(u_1^{per})-N(u_2^{per})](t)\|_X \leqslant \frac{1}{2}\|u_1^{per}-u_2^{per}\|_X. \tag{4.21}$$

所以 N 是 X 中的压缩映射，由压缩映射原理可知，映射 N 存在唯一不动点 $u^{per} \in X$，所以方程(1.1)存在唯一时间周期解 $u^{per} \in C([0,T]; H^m) \cap C^1([0,T]; H^{m-2})$. 因此定理4.1成立。 □

5. 结论

本文研究了带强阻尼的 Boussinesq 方程在小周期外力作用下时间周期解的存在唯一性，我们的研究方法主要是利用了强阻尼项带来的耗散效应去获取 Green 函数的逐点估计, 从而建立解算子在 L^2 框架下的衰减估计，并利用衰减估计建立时间周期解的存在唯一性，并且该时间周期解与小周期外力具有相同的周期。我们注意到，强阻尼 Boussinesq 方程还具有色散效应，色散效应在 L^p 框架下会产生时间衰减。因此我们希望可以在 L^p 框架下同时考虑耗散效应与色散效应带来的时间衰减，从而得到新的时间周期解存在唯一性。

参考文献

[1] Russell, J.S. (1845) On Waves, Report of the 14th Meeting of the British Association for the Advancement of Science. John Murray, London, 311-390.

[2] Boussinesq, J. (1872) Théorie des ondes et des remous qui se propagent le long d'un canal rectangulaire horizontal en communiquant au liquide contenu dans ce canal des vitesses sen-

siblement pareilles de la surface au fond. *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*, **17**, 55-108.

[3] Bona, J.L. and Sachs, R.L. (1988) Global Existence of Smooth Solutions and Stability of Solitary Waves for a Generalized Boussinesq Equation. *Communications in Mathematical Physics*, **118**, 15-29. https://doi.org/10.1007/BF01218475

[4] Farah, L.G. (2009) Local Solutions in Sobolev Spaces with Negative Indices for the "Good" Boussinesq Equation. *Communications in Partial Differential Equations*, **34**, 52-57. https://doi.org/10.1080/03605300802682283

[5] Kishimoto, N. and Tsugawa, K. (2010) Local Well-Posedness for Quadratic Nonlinear Schrödinger Equations and the "Good" Boussinesq Equation. *Differential and Integral Equations*, **23**, 463-493. https://doi.org/10.57262/die/1356019307

[6] Linares, F. (1993) Global Existence of Small Solutions for a Generalized Boussinesq Equation. *Journal of Differential Equations*, **106**, 257-293. https://doi.org/10.1006/jdeq.1993.1108

[7] Tsutsumi, M. and Matahashi, T. (1991) On the Cauchy Problem for the Boussinesq Type Equation. *Mathematica Japonica*, **36**, 321-347.

[8] Liu, Y. (1997) Decay and Scattering of Small Solutions of a Generalized Boussinesq Equation. *Journal of Functional Analysis*, **147**, 51-68. https://doi.org/10.1006/jfan.1996.3052

[9] Cho, Y. and Ozawa, T. (2007) On Small Amplitude Solutions to the Generalized Boussinesq Equations. *Discrete and Continuous Dynamical Systems*, **17**, 691-711. https://doi.org/10.3934/dcds.2007.17.691

[10] Sachs, R.L. (1990) On the Blow-Up of Certain Solutions of the "Good" Boussinesq Equation. *Applicable Analysis*, **36**, 145-152. https://doi.org/10.1080/00036819008839928

[11] Straughan, B. (1992) Global Nonexistence of Solutions to Some Boussinesq Type Equations. *Journal of Mathematical and Physical Sciences*, **26**, 145-152.

[12] Liu, Y. and Xu, R. (2008) Global Existence and Blow Up of Solutions for Cauchy Problem of Generalized Boussinesq Equation. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, **237**, 721-731. https://doi.org/10.1016/j.physd.2007.09.028

[13] Yang, Z. and Guo, B. (2008) Cauchy Problem for the Multi-Dimensional Boussinesq Type Equation. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **340**, 64-80. https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2007.08.017

[14] Varlamov, V. (1996) Existence and Uniqueness of a Solution to the Cauchy Problem for the Damped Boussinesq Equation. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, **19**, 639-649. https://doi.org/10.1002/(SICI)1099-1476(19960525)19:8⟨639::AID-MMA786⟩3.0.CO;2-C

[15] Wang, Y.X. (2013) Asymptotic Decay Estimate of Solutions to the Generalized Damped Bq Equation. *Journal of Inequalities and Applications*, **2013**, Article No. 323. https://doi.org/10.1186/1029-242X-2013-323

[16] Liu, M. and Wang, W. (2014) Global Existence and Pointwise Estimate of Solutions for the Multidimensional Generalized Boussinesq Type Equation. *Communications on Pure and Applied Analysis*, **13**, 1203-1222. https://doi.org/10.3934/cpaa.2014.13.1203

[17] Liu, G. and Wang, W. (2019) Inviscid Limit for the Damped Boussinesq Equation. *Journal of Differential Equations*, **267**, 5521-5542. https://doi.org/10.1016/j.jde.2019.05.037

[18] Liu, G. and Wang, W. (2020) Decay Estimates for a Dissipative-Dispersive Linear Semigroup and Application to the Viscous Boussinesq Equation. *Journal of Functional Analysis*, **278**, Article 108413. https://doi.org/10.1016/j.jfa.2019.108413

[19] Xu, R.Z., Luo, Y.B., Shen, J.H. and Huang, S.B. (2017) Global Existence and Blow Up for Damped Generalized Boussinesq Equation. *Acta Mathematicae Applicatae Sinica, English Series*, **33**, 251-262. https://doi.org/10.1007/s10255-017-0655-4

[20] Wang, Y. and Li, Y. (2018) Time Periodic Solutions to the Beam Equation with Weak Damping. *Journal of Mathematical Physics*, **59**, Article 111503. https://doi.org/10.1063/1.5046821

[21] 王术. Sobolev空间与偏微分方程引论[M]. 北京: 科学出版社, 2009.