Pure Mathematics 理论数学, 2023, 13(6), 1888-1896
Published Online June 2023 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2023.136193

一类扰动的二次可逆系统的Abel 积分的上界估计

占园根[1*]，杨利华[1]，朱丽云[2]

[1]景德镇陶瓷大学信息工程学院，江西 景德镇
[2]浮梁县南安中学，江西 景德镇

收稿日期：2023年5月22日；录用日期：2023年6月23日；发布日期：2023年6月30日

摘 要

利用Riccati方程法，研究了一类亏格1形式的二次可逆系统$(r9)$在任意3, 2, 1次多项式扰动下的Abel积分孤立零点个数的上界。得到的结果为: 在$3, 2, 1$次多项式扰动下上界是13。这些结果是对之前结果的改进。

关键词

二次可逆系统，Abel积分，极限环，Riccati方程

Upper Bound Estimation of Abelian Integral for a Class of Perturbed Quadratic Reversible Systems

Yuangen Zhan[1*], Lihua Yang[1], Liyun Zhu[2]

[1]School of Information and Engineering, Jingdezhen Ceramic University, Jingdezhen Jiangxi
[2]Fuliang County Nan'an Middle School, Jingdezhen Jiangxi

Received: May 22^{nd}, 2023; accepted: Jun. 23^{rd}, 2023; published: Jun. 30^{th}, 2023

* 通讯作者。

文章引用: 占园根, 杨利华, 朱丽云. 一类扰动的二次可逆系统的Abel积分的上界估计[J]. 理论数学, 2023, 13(6): 1888-1896. DOI: 10.12677/pm.2023.136193

Abstract

By using Riccati equation method, the upper bound estimation of the number of zeros of Abelian integral for a class of quadratic reversible system $(r9)$ of genus one under any polynomial perturbation of degree $3, 2, 1$ is studied. The result is that the upper bound is 13 under polynomial perturbation of degree $3, 2, 1$. These results are an improvement of the previous results.

Keywords

Quadratic Reversible Systems, Abelian Integral, Limit Cycles, Riccati Equation

1. 引言和主要结论

考虑扰动亏格 1 形式的二次可逆系统

$$\dot{x} = \frac{H_y(x,y)}{M(x,y)} + \varepsilon p(x,y) \quad \dot{y} = -\frac{H_x(x,y)}{M(x,y)} + \varepsilon q(x,y), \tag{1}$$

其中 $\varepsilon(0 < \varepsilon \ll 1)$ 是一个实数, $\frac{H_y(x,y)}{M(x,y)}$, $\frac{H_x(x,y)}{M(x,y)}$, $p(x,y)$, $q(x,y)$ 都是关于 x, y 的多项式, 并且

$$\max\left\{\deg\left(\frac{H_y(x,y)}{M(x,y)}\right), \deg\left(\frac{H_x(x,y)}{M(x,y)}\right)\right\} = 2,\ \max\left\{\deg(p(x,y)), \deg(q(x,y))\right\} = n(n = 1, 2, 3).$$

当 $\varepsilon = 0$, 系统 (1) 是一个二次可逆系统, 而且是一个可积系统, 它有一个中心. 函数 $H(x,y)$ 是其带有积分因子 $M(x,y)$ 的一个首次积分, 也就是说, 可以定义一个连续的周期环域

$$\{\Gamma_h\} \subset \left\{(x,y) \in R^2 : H(x,y) = h, h \in \triangle\right\},$$

它们是定义在最大开区间 $\triangle = (h_1, h_2)$ 上的. 本文主要解决的问题是, 对于任意小数 ε, 系统 (1) 可以从周期环域$\{\Gamma_h\}$ 中分支出多少个极限环? 在周期轨道的任何紧致区域中, 系统 (1) 的极限环个数

不超过以下 Abel 积分 $I(h)$ 的孤立零点个数 (见文献 [1–4]).

$$I(h)=\oint_{\Gamma_h} M(x,y)\,[q(x,y)\,dx-p(x,y)\,dy],\quad h\in\triangle. \tag{2}$$

文 [5]最先使用 Riccati 方程法研究系统 (1) 的 Abel 积分零点个数的上界. 文 [6]将亏格 1 形式的二次可逆系统分成了 22 类, 具体为 $(r1)$ - $(r22)$. 使用 Riccati 方程方法: 文 [7]研究了当 n 较小时哈密顿系统 $(r1)$, $(r2)$ 的零点个数上界问题; 文 [8]研究了系统 $(r3)$ - $(r6)$; 文 [9–13]研究了系统 $(r9)$-$(r13)$ 及 $(r16)$-$(r22)$.

本文再次研究了系统 $r(9)$, 得到了一些新的结果 (见表 1).

Table 1. Comparison between the new results and the original results

表 1. 新结果与原结果对比

系统	n	新结果	原结果
r9	3	13	39
r9	2	13	39
r9	1	13	39

考虑系统 $(r9)$

$$\dot{x}=-xy,\quad \dot{y}=-\frac{2}{3}y^2+\frac{1}{3^2\cdot 2^4}x^2-\frac{1}{3^2\cdot 2^4}x. \tag{3}$$

它的首次积分为

$$H(x,y)=x^{-\frac{4}{3}}\left(\frac{1}{2}y^2+\frac{1}{3\cdot 2^5}x^2+\frac{1}{3\cdot 2^4}\right)=h,\quad h\in\left(\frac{1}{2^5},+\infty\right), \tag{4}$$

带有一个积分因子 $M(x,y)=x^{-\frac{7}{3}}$.

系统 $(r9)$ 是一个可积非哈密尔顿二次系统, 其几乎所有的轨道都是六次曲线, 它有一个中心 $(1,0)$, 一条积分曲线 $x=0$, 一族周期轨道 $\{\Gamma_h\}$ $(\frac{1}{2^5}<h<+\infty)$.

文献 [10]给出了系统 $(r9)$ 的 Abel 积分上界的如下定理.

定理 1.1 [10] 对于任意 n 次多项式 $p(x,y)$ 和 $q(x,y)$, 系统 $(r9)$ 的 Abel 积分 $I(h)$ 的孤立零点个数的上界线性依赖于 n. 具体情况为: 当 $n\geqslant 6$ 时, 上界为 $15\left[\frac{n}{2}\right]+6\left[\frac{n-1}{2}\right]-3$; 当 $n=1,2,3,4,5$ 时, 上界为 39.

本文主要结果为如下定理.

定理 1.2 对于任意 n 次多项式 $p(x,y)$ 和 $q(x,y)(n=1,2,3)$, 系统$(r9)$ 的 Abel 积分 $I(h)$ 的孤立零点个数的上界为: 当 $n=3,2,1$ 时, 上界是 13.

新结果对原结果是一些改进 (见表 1).

本文后面部分结构为: 第二部分, 获得 Abel 积分 $I(h)$ 的简单表示方法. 第三部分, 研究系统 $(r9)$ 的 Abel 积分 $I(h)$ 与 $J_{\frac{2}{3}}(h)$ 之间的关系, 获得相关 Riccati 方程. 第四部分, 使用 Riccati 方程方

法证明了定理 1.2. 第五部分, 给出了一个简短的结论.

2. Abel 积分 $I(h)$ 的简单表示

假设 $p(x,y)=\sum\limits_{0\le i+j\le 3}a_{i,j}x^iy^j$ 和 $q(x,y)=\sum\limits_{0\le i+j\le 3}b_{i,j}x^iy^j$ 都是任意的多项式,由 (2) 式知, 定理 1.2 中的 Abel 积分 $I(h)$ 有如下形式.

$$I(h)=\oint_{\Gamma_h}x^{-\frac{7}{3}}\left(\sum_{0\le i+j\le 3}b_{i,j}x^iy^j dx-\sum_{0\le i+j\le 3}a_{i,j}x^iy^j dy\right), \tag{5}$$

为了简洁, 记

$$I_{i,j}(h)=\oint_{\Gamma_h}x^{i-\frac{7}{3}}y^j dx,$$

其中 $i=-1,0,1,2,3; j=0,1,2,3,4$. 当 $j=1$, 记 $I_{i,j}(h)=J_i(h)$

由于

$$\oint_{\Gamma_h}x^{i-\frac{7}{3}}y^j dy=\frac{\oint_{\Gamma_h}x^{i-\frac{7}{3}}dy^{j+1}}{j+1}=-\frac{i-\frac{7}{3}}{j+1}\oint_{\Gamma_h}x^{i-\frac{7}{3}-1}y^{j+1}dx=-\frac{i-\frac{7}{3}}{j+1}I_{i-1,j+1}(h).$$

因此, 由 (5) 式知, 可以将 $I(h)$ 改写为

$$I(h)=\sum_{\substack{0\le i\le 3,\\0\le j\le 3,\\0\le i+j\le 3}}b_{i,j}I_{i,j}(h)+\frac{i-\frac{7}{3}}{j+1}\sum_{\substack{0\le i\le 3,\\0\le j\le 3,\\0\le i+j\le 3}}a_{i,j}I_{i-1,j+1}(h)=\sum_{\substack{-1\le i\le 3,\\0\le j\le 4,\\0\le i+j\le 3}}e_{i,j}I_{i,j}(h), \tag{6}$$

其中 $e_{i,j}=b_{i,j}+\frac{3i-4}{3j}a_{i+1,j-1}$, $a_{i,-1}=0(i=1-4)$, $b_{-1,j}=0(j=0-4)$.

由于周期轨道 Γ_h 关于 x 轴对称, 因此当 j 为偶数时, $I_{i,j}(h)=0$, 故只需考虑 j 为奇数的情况.

即

$$\begin{aligned}I(h)=&e_{-1,1}J_{-1}(h)+e_{0,1}J_0(h)+e_{1,1}J_1(h)+\\&e_{2,1}J_2(h)+e_{-1,3}I_{-1,3}(h)+e_{0,3}I_{0,3}(h),\end{aligned} \tag{7}$$

其中 $e_{-1,1}=-\frac{7a_{0,0}}{3}$, $e_{0,1}=b_{0,1}-\frac{4a_{1,0}}{3}$, $e_{1,1}=b_{1,1}-\frac{a_{2,0}}{3}$, $e_{2,1}=b_{2,1}+\frac{2a_{3,0}}{3}$, $e_{-1,3}=-\frac{7a_{0,2}}{9}$, $e_{0,3}=b_{0,3}-\frac{4a_{1,2}}{9}$.

文献 [10]中 (18) 和 (20) 式如下：

$$I_{m,j}(h)=\frac{2jA}{3m+2j-4}[I_{m+2,j-2}(h)-I_{m+1,j-2}(h)], \tag{8}$$

$$A(3m+5)J_{m+2}(h)=(3m+2)hJ_{m-\frac{1}{2}}(h)-A(6m+1)J_{m+1}(h), \tag{9}$$

其中 $A=\frac{1}{3\cdot 2^5}$.

在 (8) 中, 令 $(m,j)=(-1,3)$, $(0,3)$, 可得

$$I_{-1,3}(h)=6AJ_0(h)-6AJ_1(h), \tag{10}$$

$$I_{0,3}(h)=3AJ_2(h)-3AJ_1(h). \tag{11}$$

由 (7) (10) (11) 式可得

$$I(h)=p_{-1}J_{-1}(h)+p_0J_0(h)+p_1J_1(h)+p_2J_2(h), \tag{12}$$

其中 $p_{-1}=e_{-1,1}$, $p_0=e_{0,1}+6Ae_{-1,3}$, $p_1=e_{1,1}-6Ae_{-1,3}-3Ae_{0,3}$, $p_2=e_{2,1}+3Ae_{0,3}$.

再由 (9) 式, 可得

$$J_0(h)=\frac{1}{5A}hJ_{\frac{1}{3}}(h)+\frac{2}{5}J_1(h), \tag{13}$$

$$J_2(h)=\frac{2}{5A}hJ_{\frac{1}{3}}(h)-\frac{1}{5}J_1(h), \tag{14}$$

$$J_{-1}(h)=(\frac{2}{231A^3}h^3-\frac{1}{11})[\frac{1}{5}hJ_{\frac{1}{3}}(h)+\frac{2}{5}J_1(h)]+\frac{1}{231A^2}h^2J_{\frac{2}{3}}(h). \tag{15}$$

由 (12) (13) (14) (15) 式, 可得

$$I(h)=\alpha(h)J_{\frac{1}{3}}(h)+\beta(h)J_{\frac{2}{3}}(h)+\gamma(h)J_1(h), \tag{16}$$

其中 $\alpha(h)=\frac{1}{5A}h(a_1h^3+b_1)$, $\beta(h)=a_2h^2$, $\gamma(h)=a_3h^3+b_3$, $a_1=\frac{2}{231A^3}$, $b_1=-\frac{p_{-1}}{11}+p_0+p_2$, $a_2=\frac{p_{-1}}{231A^2}$, $a_3=\frac{4p_{-1}}{5\cdot 231A^3}$, $b_3=-\frac{2p_{-1}}{55}+\frac{2}{5}p_0-\frac{1}{5}p_2$.

3. Riccati方程

本节中, 主要研究 Abel 积分 $I(h)$和 $J_{\frac{2}{3}}(h)$ 之间的关系, 得到 Riccati 方程.

文献 [10]中, 对于系统 $r(9)$, 有如下引理的结论.

引理 3.1 [10] 当 $n\geqslant 1$ 时, $J(h)$ 满足如下的 Raccita 方程

$$B(h)\gamma_1(h)I'(h)=B(h)\gamma_1'(h)I(h)+S(h), \quad S(h)=E(h)J'_{\frac{1}{3}}(h)+F(h)J'_{\frac{2}{3}}(h), \tag{17}$$

其中

$$B(h)=2h^3-54A^3=2(h-\frac{1}{2^5})(h^2+\frac{1}{2^5}h+\frac{1}{2^{10}}),$$

$$E(h)=\gamma_1(h)\alpha_2(h)-B(h)\gamma_1'(h)\alpha_1(h),\quad F(h)=\gamma_1(h)\beta_2(h)-B(h)\gamma_1'(h)\beta_1(h),$$

且 $\alpha_1(h)=\frac{2}{3}h\alpha(h)-6A\beta(h)$, $\beta_1(h)=2h\beta(h)-3A\gamma(h)$, $\gamma_1(h)=h\gamma(h)-2A\alpha(h)$, $\alpha_2(h)=B(h)\alpha_1'(h)+h^2\alpha_1(h)+3Ah\beta_1(h)+9A^2\gamma_1(h)$, $\beta_2(h)=B(h)\beta_1'(h)-h^2\beta_1(h)-9A^2\alpha_1(h)-3Ah\gamma_1(h)$.

引理 3.2 [10] 当 $n\geqslant 1$ 时, 设 $W(h)=\frac{S(h)}{J'_{\frac{2}{3}}(h)}$, 则 $W(h)$ 满足如下的 Raccita 方程

$$B(h)E(h)W'(h)=-3AhW^2(h)+D(h)W(h)+G(h),\tag{18}$$

其中$D(h)=B(h)E'(h)-2h^2E(h)-2h^2F(h)$, $G(h)=B(h)E(h)F'(h)-B(h)E'(h)F(h)+2h^2E(h)F(h)+4A^2E^2(h)+h^2F^2(h)$.

引理 3.3 [10] 当 $h\in(\frac{1}{2^5},+\infty)$ 时, $J_m(\frac{1}{2^5})=0(m=\frac{1}{3},\frac{2}{3},1)$; $J_{-1}(h)<0$, $J'_m(h)>0(m=\frac{1}{3},\frac{2}{3},1)$.

当 $n=3,2,1$ 时, 由引理 3.1 可得

$$\alpha_1(h)=h^2(a_4h^3+b_4),\quad \beta_1(h)=a_5h^3+b_5,\quad \gamma_1(h)=h(a_6h^3+b_6),\tag{19}$$

其中 $a_4=\frac{2}{15A}a_1$, $b_4=\frac{2}{15A}b_1-6Aa_2$, $a_5=2a_2-2Aa_3$, $b_5=-3Ab_3$, $a_6=a_3-\frac{1}{5}a_1$, $b_6=b_3-\frac{1}{5}b_1$.

$$\alpha_2(h)=h(a_7h^6+b_7h^3+c_7),\quad \beta_2(h)=h^2(a_8h^3+b_8),$$

其中 $a_7=11a_4$, $b_7=270A^3a_4+3Aa_5+9A^2a_6+5b_4$, $c_7=3Ab_5+9A^2b_6-108A^3b_4$, $a_8=5a_5-9A^2a_4-3Aa_6$, $b_8=-162A^3a_5-9A^2b_4-b_5-3Ab_6$.

$$E(h)=h^2(a_9h^9+b_9h^6+c_9h^3+d_9),\quad F(h)=a_{10}h^9+b_{10}h^6+c_{10}h^3+d_{10},\tag{20}$$

其中 $a_9=a_6a_7-8a_4a_6$, $b_9=216a_4a_6A^3-8a_6b_4-2a_4b_6+a_7b_6+a_6b_7$, $c_9=216a_6A^3b_4+54a_4A^3b_6+a_6c_7-2b_4b_6+b_6b_7$, $d_9=b_6c_7+54A^3b_4b_6$, $a_{10}=a_6a_8-8a_5a_6$, $b_{10}=216a_5a_6A^3-8a_6b_5-2a_5b_6+a_8b_6+a_6b_8$, $c_{10}=216a_6A^3b_5+54a_5A^3b_6-2b_5b_6+b_6b_8$, $d_{10}=54A^3b_5b_6$.

再由引理 3.2 可得

$$G(h)=h(e_1h^{21}+e_2h^{18}+e_3h^{15}+e_4h^{12}+e_5h^9+e_6h^6+e_7h^3+e_8),\tag{21}$$

其中 $e_1=-9a_9^2A^2-6a_9a_{10}$, $e_2=108a_9a_{10}A^3-18a_9A^2b_9-3a_{10}^2A-12a_9b_{10}$, $e_3=-54a_{10}A^3b_9+270a_9A^3b_{10}-18a_9A^2c_9-6a_{10}Ab_{10}+6a_{10}c_9-18a_9c_{10}-9A^2b_9^2-6b_9b_{10}$, $e_4=-216a_{10}A^3c_9+432a_9A^3c_{10}-18a_9A^2d_9-6a_{10}Ac_{10}+12a_{10}d_9-24a_9d_{10}+108A^3b_9b_{10}-18A^2b_9c_9-3Ab_{10}^2-12b_9c_{10}$, $e_5=-54A^3b_{10}c_9-9A^2c_9^2+270A^3b_9c_{10}-6Ab_{10}c_{10}-6c_9c_{10}-378a_{10}A^3d_9-594a_9A^3d_{10}-6a_{10}Ad_{10}+18A^2b_9d_9+6b_{10}d_9-18b_9d_{10}$, $e_6=-216A^3b_{10}d_9+432A^3b_9d_{10}+108A^3c_9c_{10}-18A^2c_9d_9-6Ab_{10}d_{10}-3Ac_{10}^2-12c_9d_{10}$, $e_7=-54A^3c_{10}d_9+270A^3c_9d_{10}-9A^2d_9^2-6Ac_{10}d_{10}-6d_9d_{10}$, $e_8=108A^3d_9d_{10}-3Ad_{10}^2$

为不含 h 的常数.

4. Abel 积分 $I(h)$ 零点个数的上界

文献 [10]中仅仅只靠考虑了函数 $\alpha(h), \beta(h), \gamma(h), B(h), E(h)$ 和 $G(h)$ 关于 h 的次数. 现在,研究这些函数关于 h 的次数的同时, 还将 h 的取值范围, 函数的奇偶性考虑进去, 从而得到相较于 [10]中更好的结果. 本节中, 将使用 Riccati 方程法证明定理 1.2.

用 $\sharp I(h)$ 表示 Abel 积分 $I(h)$ 在区间 $\triangle$ 上的零点个数. 完成定理 1.2 的证明还需要用到下面的引理.

引理 4.1 [7]　若光滑函数 $W(h)$, $\phi(h)$, $\psi(h)$, $\xi(h)$ 和 $\eta(h)$ 满足下面的 Riccita 方程

$$\eta(h)W'(h) = \phi(h)W^2(h) + \psi(h)W(h) + \xi(h),$$

则

$$\sharp W(h) \leqslant \sharp\eta(h) + \sharp\xi(h) + 1$$

最后, 让我们使用 Riccita 方程法来完成定理 1.2 的证明.

证明　使用引理3.1, 引理3.2, 引理3.3, (17) - (18) 式和引理 4.1, 可得

$$\sharp I(h) \leqslant 2\sharp B(h) + \sharp\gamma_1(h) + \sharp E(h) + \sharp G(h) + 2 \tag{22}$$

假设 $k := h^3$, 由 (20) (21) 式得

$$E(h) = h^2(a_9h^9 + b_9h^6 + c_9h^3 + d_9) = k^{\frac{2}{3}}(a_9k^3 + b_9k^2 + c_9k + d_9) = U(k). \tag{23}$$

$$\begin{aligned} G(h) &= h(e_1h^{21} + e_2h^{18} + e_3h^{15} + e_4h^{12} + e_5h^9 + e_6h^6 + e_7h^3 + e_8) \\ &= k^{\frac{1}{3}}(e_1k^7 + e_2k^6 + e_3k^5 + e_4k^4 + e_5k^3 + e_6k^2 + e_7k + e_8) = V(k). \end{aligned} \tag{24}$$

函数 $U(k) = k^{\frac{2}{3}}(a_9k^3 + b_9k^2 + c_9k + d_9)$ 在区间 $(\frac{1}{2^5}, +\infty)$ 内最多有 3 个零点, 而且对于一个定值 k, 只能对应唯一的 $h = k^{\frac{1}{3}} \in (\frac{1}{2^5}, +\infty)$, 所以函数 $E(h) = h^2(a_9h^9 + b_9h^6 + c_9h^3 + d_9)$ 在区间 $(\frac{1}{2^5}, +\infty)$ 内最多有 3 个零点, 即$\sharp E(h) = \sharp[h^2(a_9h^9 + b_9h^6 + c_9h^3 + d_9)] \leqslant 3$; 同理可得,在区间$(\frac{1}{2^5}, +\infty)$ 内, 函数$G(h) = h(e_1h^{21} + e_2h^{18} + e_3h^{15} + e_4h^{12} + e_5h^9 + e_6h^6 + e_7h^3 + e_8)$ 最多有 7 个零点, 即$\sharp G(h) = \sharp h(e_1h^{21} + e_2h^{18} + e_3h^{15} + e_4h^{12} + e_5h^9 + e_6h^6 + e_7h^3 + e_8) \leqslant 7$. 同样地, 由 (19) 式, 可得 $\sharp\gamma_1(h) = \sharp h(a_6h^3 + b_6) = \sharp(a_6h^3 + b_6) \leqslant 1$. 同时, 注意到

$$B(h) = 2h^3 - 54A^3 = 2(h - \frac{1}{2^5})(h^2 + \frac{1}{2^5}h + \frac{1}{2^{10}}),$$

在区间 $(\frac{1}{2^5}, +\infty)$ 内没有零点. 故由 (22) 式可得

$$\sharp I(h) \leqslant 2 \times 0 + 1 + 3 + 7 + 2 = 13.$$

5. 结论

对于系统 ($r9$), 本文运用 Riccati 方程法研究其在任意 n $(1 \leqslant n \leqslant 3)$ 次多项式扰动下的 Abel 积分孤立零点个数的上界, 得到的结果为: 当 $n = 3, 2, 1$ 时, 上界为 13. 这些结果是对原结果的一些改进.

基金项目

江西省教育厅科研项目(No. GJJ211346, GJJ201342)，景德镇市科技项目(20212GYZD009-5)。

参考文献

[1] 李承治, 李伟固. 弱化希尔伯特第16问题及其研究现状[J]. 数学进展, 2010, 39(5): 513-526.

[2] Han, M. (2013) Bifurcation Theory of Limit Cycles. Science Press, Beijing, 310-312.

[3] 赵育林. 三次Hamilton向量场的Abel积分[D]: [博士学位论文]. 北京: 北京大学, 1998.

[4] Li, J. (2003) Hilbert's 16th Problem and Bifurcations of Planar Polynomial Vector Fields. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, **13**, 47-106. https://doi.org/10.1142/S0218127403006352

[5] Horozov, E. and Iliev, I.D. (1998) Linear Estimate for the Number of Zeros of Abelian Integrals with Cubic Hamiltonians. *Nonlinearity*, **11**, 1521-1537. https://doi.org/10.1088/0951-7715/11/6/006

[6] Gautier, S., Gavrilov, L. and Iliev, I.D. (2009) Perturbations of Quadratic Centers of Genus One. *Discrete and Continuous Dynamical Systems*, **25**, 511-535. https://doi.org/10.3934/dcds.2009.25.511

[7] Zhao, Y., Li, W., Li, C. and Zhang, Z. (2002) Linear Estimate of the Number of Zeros of Abelian Integrals for Quadratic Centers Having Almost All Their Orbits Formed by Cubics. *Science in China, Series A: Mathematics*, **45**, 964-974. https://doi.org/10.1007/BF02879979

[8] Li, W., Zhao, Y., Li, C. and Zhang, Z. (2002) Abelian Integrals for Quadratic Centres Having Almost All Their Orbits Formed by Quartics. *Nonlinearity*, **15**, 863-885. https://doi.org/10.1088/0951-7715/15/3/321

[9] Hong, X., Xie, S. and Chen, L. (2016) Estimating the Number of Zeros for Abelian Integrals of Quadratic Reversible Centers with Orbits Formed by Higher-Order Curves. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, **26**, Article ID: 1650020. https://doi.org/10.1142/S0218127416500206

[10] Hong, X., Xie, S. and Ma, R. (2015) On the Abelian Integrals of Quadratic Reversible Centers with Orbits Formed by Genus One Curves of Higher Degree. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **429**, 924-941. https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2015.03.068

[11] Hong, X., Lu, J. and Wang, Y. (2018) Upper Bounds for the Associated Number of Zeros of Abelian Integrals for Two Classes of Quadratic Reversible Centers of Genus One. *Journal of Applied Analysis and Computation*, **8**, 1959-1970. https://doi.org/10.11948/2018.1959

[12] Hong, L., Lu, J. and Hong, X. (2020) On the Number of Zeros of Abelian Integrals for a Class of Quadratic Reversible Centers of Genus One. *Journal of Nonlinear Modeling and Analysis*, **2**, 161-171.

[13] Hong, L., Hong, X. and Lu, J. (2020) A Linear Estimation to the Number of Zeros for Abelian Integrals in a Kind of Quadratic Reversible Centers of Genus One. *Journal of Applied Analysis and Computation*, **10**, 1534-1544. https://doi.org/10.11948/20190247