Pure Mathematics 理论数学, 2024, 14(1), 34-40
Published Online January 2024 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2024.141005

Hans汉斯

Sherman-Morrison公式的五种证明方法

周　芳[1]，唐楠楠[1]，李志诚[2]

[1]太原师范学院数学与统计学院，山西 晋中
[2]太原师范学院物理系，山西 晋中

收稿日期：2023年12月4日；录用日期：2024年1月5日；发布日期：2024年1月15日

摘　要

本文分别用矩阵分解、矩阵的升阶运算、矩阵的初等变换、矩阵方程的求解以及因式分解的方法，给出了**Sherman-Morrison**公式的五种证明方法，更加明确了**Sherman-Morrison**公式的构造过程，丰富了高等代数课程教学内容。通过在一题多解的课堂教学中采用针对性的措施活跃学生的解题思维，进一步提高学生的解题能力。

关键词

矩阵分解，初等变换，矩阵方程，因式分解，**Sherman-Morrison**公式

Five Proof Methods for the Sherman-Morrison Formula

Fang Zhou[1], Nannan Tang[1], Zhicheng Li[2]

[1]School of Mathematics and Statistics, Taiyuan Normal University, Jinzhong Shanxi
[2]Department of Physics, Taiyuan Normal University, Jinzhong Shanxi

Received: Dec. 4th, 2023; accepted: Jan. 5th, 2024; published: Jan. 15th, 2024

Abstract

This paper provides five proof methods for the Sherman-Morrison formula by using matrix decomposition, ascending order method, matrix elementary transformation, the solution of matrix equations, and factorization methods. Those clarify the construction process of the Sherman-Morrison formula, enrich the teaching content of the course. By adopting targeted measures in classroom teaching with multiple solutions to one problem, students can activate their problem-solving thinking and further improve their problem-solving abilities.

文章引用: 周芳, 唐楠楠, 李志诚. Sherman-Morrison 公式的五种证明方法[J]. 理论数学, 2024, 14(1): 34-40.
DOI: 10.12677/pm.2024.141005

Keywords

Matrix Decomposition, Elementary Operations, Matrix Equations, Factorization Methods, Sherman-Morrison Formula

1. 引言

矩阵的求逆一直是矩阵计算中的热门问题，但是对于矩阵的和的求逆过程往往不太容易。假设 $\boldsymbol{A}$ 是数域 $\mathbb{P}$ 上的 n 阶可逆矩阵，$\boldsymbol{\alpha}$、$\boldsymbol{\beta}$ 是 n 维列向量，我们称 $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{\alpha\beta}')^{-1}=\boldsymbol{A}^{-1}-\dfrac{\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{\alpha\beta}'\boldsymbol{A}^{-1}}{1+\boldsymbol{\beta}'\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{\alpha}}$ 为 Sherman-Morrison 公式，该公式由 Sherman 和 Morrison 在 1950 年提出。因此只需求得 $\boldsymbol{A}^{-1}$，即可求出 $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{\alpha\beta}')^{-1}$，降低了求 $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{\alpha\beta}')^{-1}$ 的复杂程度。Sherman-Morrison 公式广泛应用于矩阵求逆运算中，它提供了一种更加简洁的判别矩阵的和的可逆性以及求逆矩阵的方法。关于矩阵的求逆，目前取得了丰富的结果。文献[1]中，尹小艳从分块矩阵求逆的课本习题出发，给出了一种简便的矩阵求逆的新解法；陈建华等介绍了三对角形矩阵求逆的新思路，见文献[2]；李亭亭在文献[3]中给出了初等变换法求逆矩阵及其推广；曾聃和徐运阁在文献[4]中给出降阶公式的各种变形以及在解题中的应用。本文运用矩阵的分解、升阶法、因式分解法、矩阵方程的求解以及运用行列式降阶定理等方法，给出了证明 Sherman-Morrison 公式的五种方法，不仅丰富了教师运用“一题多解”的课堂教学内容，并且使学生的逻辑思维能力、运用抽象概念联系实际的能力、将实际数学问题抽象代数化的能力方面都得到提升。通过在一题多解的课堂教学中采用针对性的措施活跃学生的解题思维，可以进一步提高学生的解题能力。本文的符号和术语是标准的，见参考文献[5] [6]。

2. 预备知识

我们首先给出下述引理，称为行列式降阶定理。

引理 1 [5]在数域 $\mathbb{P}$ 上，已知 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶方阵，$\boldsymbol{D}$ 是 m 阶方阵，其中 $\boldsymbol{B}$ 是 $n\times m$ 阶矩阵，$\boldsymbol{C}$ 是 $m\times n$ 阶矩阵，则：

1) 当 $\boldsymbol{A}$ 为可逆矩阵时，$\begin{vmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{B}\\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{D}\end{vmatrix}=|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{D}-\boldsymbol{C}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}|$；

2) 当 $\boldsymbol{D}$ 为可逆矩阵时，$\begin{vmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{B}\\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{D}\end{vmatrix}=|\boldsymbol{D}||\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}\boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{C}|$。

引理 2 设 $\boldsymbol{A}$ 是数域 $\mathbb{P}$ 上的 n 阶可逆矩阵，$\boldsymbol{\alpha}$、$\boldsymbol{\beta}$ 是数域 $\mathbb{P}$ 上的 n 维列向量，则：

$$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{\alpha\beta}' \text{ 可逆当且仅当 } 1+\boldsymbol{\beta}'\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{\alpha}\neq 0。$$

证 先证必要性。

当 $\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{0}$ 时，显然有 $1+\boldsymbol{\beta}'\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{\alpha}=1\neq 0$ 成立。

下设 $\boldsymbol{\alpha}\neq\boldsymbol{0}$，用反证法。假设 $1+\boldsymbol{\beta}'\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{\alpha}=0$，则有

$$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{\alpha\beta}')\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{\beta}'\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{\alpha})=\boldsymbol{\alpha}(1+\boldsymbol{\beta}'\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{\alpha})=\boldsymbol{0}.$$

由于 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}'$ 可逆，因此 $\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{0}$ 。又因为 $\boldsymbol{A}$ 可逆，故 $\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{0}$ ，与假设矛盾。因此，

$$1+\boldsymbol{\beta}'\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{\alpha}=1\neq 0\,.$$

再证充分性。

当 $1+\boldsymbol{\beta}'\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{\alpha}=1\neq 0$ 时，我们设 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{A}+\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}'$ ，以及 $\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{A}^{-1}-\dfrac{\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}'\boldsymbol{A}^{-1}}{1+\boldsymbol{\beta}'\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{\alpha}}$ 。

计算

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{XY}&=\left(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}'\right)\left(\boldsymbol{A}^{-1}-\frac{\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}'\boldsymbol{A}^{-1}}{1+\boldsymbol{\beta}'\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{\alpha}}\right)\\
&=\boldsymbol{AA}^{-1}-\frac{\boldsymbol{AA}^{-1}\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}'\boldsymbol{A}^{-1}}{1+\boldsymbol{\beta}'\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{\alpha}}+\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}'\boldsymbol{A}^{-1}-\frac{\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}'\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}'\boldsymbol{A}^{-1}}{1+\boldsymbol{\beta}'\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{\alpha}}\\
&=\boldsymbol{E}_n-\frac{\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}'\boldsymbol{A}^{-1}}{1+\boldsymbol{\beta}'\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{\alpha}}+\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}'\boldsymbol{A}^{-1}-\frac{\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}'\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}'\boldsymbol{A}^{-1}}{1+\boldsymbol{\beta}'\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{\alpha}}\\
&=\boldsymbol{E}_n-\frac{\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}'\boldsymbol{A}^{-1}}{1+\boldsymbol{\beta}'\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{\alpha}}+\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}'\boldsymbol{A}^{-1}-\frac{\boldsymbol{\alpha}\left(\boldsymbol{\beta}'\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{\alpha}\right)\boldsymbol{\beta}'\boldsymbol{A}^{-1}}{1+\boldsymbol{\beta}'\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{\alpha}}\\
&=\boldsymbol{E}_n-\frac{\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}'\boldsymbol{A}^{-1}}{1+\boldsymbol{\beta}'\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{\alpha}}+\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}'\boldsymbol{A}^{-1}-\left(\boldsymbol{\beta}'\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{\alpha}\right)\frac{\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}'\boldsymbol{A}^{-1}}{1+\boldsymbol{\beta}'\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{\alpha}}\\
&=\boldsymbol{E}_n+\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}'\boldsymbol{A}^{-1}-\left(1+\boldsymbol{\beta}'\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{\alpha}\right)\frac{\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}'\boldsymbol{A}^{-1}}{1+\boldsymbol{\beta}'\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{\alpha}}\\
&=\boldsymbol{E}_n+\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}'\boldsymbol{A}^{-1}-\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}'\boldsymbol{A}^{-1}\\
&=\boldsymbol{E}_n
\end{aligned}$$

因此， $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}'$ 可逆。

引理 3 [5]在数域 $\mathbb{P}$ 上，已知 $\boldsymbol{A}$ 、$\boldsymbol{B}$ 分别是 $n\times m$ 和 $m\times n$ 阶矩阵，$\boldsymbol{E}_n\pm\boldsymbol{AB}$ 可逆，则 $\boldsymbol{E}_m\pm\boldsymbol{BA}$ 也可逆，且 $\left(\boldsymbol{E}_m\pm\boldsymbol{BA}\right)^{-1}=\boldsymbol{E}_m\mp\boldsymbol{B}\left(\boldsymbol{E}_n\pm\boldsymbol{AB}\right)^{-1}\boldsymbol{A}$ 。

定义 1 [6]如果 $\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^{n\times n}$ ，定义 $\left\|\boldsymbol{x}\right\|_p=\left(\left|\boldsymbol{x}_1\right|^p+\cdots+\left|\boldsymbol{x}_n\right|^p\right)^{\frac{1}{p}}$ $p\geq 1$ 为 p-范数。

引理 4 [6]如果 $\boldsymbol{F}\in\mathbb{R}^{n\times n}$ 并且设 $\left\|\boldsymbol{F}\right\|_p<1$，则 $\boldsymbol{E}_n-\boldsymbol{F}$ 是可逆矩阵，且 $\left(\boldsymbol{E}_n-\boldsymbol{F}\right)^{-1}=\sum\limits_{k=0}^{\infty}\boldsymbol{F}^k$ 。

引理 5 [5]在数域 $\mathbb{P}$ 上，若 $\boldsymbol{A}^n=0$，则 $\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}$ 可逆，并且 $\left(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}\right)^{-1}=\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^2+\cdots+\boldsymbol{A}^{n-1}$ 。

3. Sherman-Morrison 公式的五种证明方法

(Sherman-Morrison 公式)设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶可逆矩阵， $\boldsymbol{\alpha}$ 、 $\boldsymbol{\beta}$ 是 n 维列向量，且 $1+\boldsymbol{\beta}'\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{\alpha}\neq 0$ ，证明： $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}'$ 可逆，并且 $\left(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}'\right)^{-1}=\boldsymbol{A}^{-1}-\dfrac{\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}'\boldsymbol{A}^{-1}}{1+\boldsymbol{\beta}'\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{\alpha}}$ 。

方法 1 由引理 2 可知，当 $1+\boldsymbol{\beta}'\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{\alpha}\neq 0$ 时， $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}'$ 可逆，即

$$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}'=\boldsymbol{A}\left(\boldsymbol{E}_n-\left(\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{\alpha}\right)\left(-\boldsymbol{\beta}'\right)\right)\text{可逆，且}\left(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}'\right)^{-1}=\left(\boldsymbol{E}_n-\left(\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{\alpha}\right)\left(-\boldsymbol{\beta}'\right)\right)^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}, \tag{1}$$

再根据引理 3 可得

$$\left(\boldsymbol{E}_n-\left(\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{\alpha}\right)\left(-\boldsymbol{\beta}'\right)\right)^{-1}=\boldsymbol{E}_n+\left(\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{\alpha}\right)\left(1+\boldsymbol{\beta}'\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{\alpha}\right)^{-1}\left(-\boldsymbol{\beta}'\right)=\boldsymbol{E}_n-\frac{1}{1+\boldsymbol{\beta}'\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{\alpha}}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}',$$

将其代入(1)式可得$\left(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{\alpha\beta}'\right)^{-1}=\boldsymbol{A}^{-1}-\dfrac{\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{\alpha\beta}'\boldsymbol{A}^{-1}}{1+\boldsymbol{\beta}'\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{\alpha}}$。证毕。

此种方法对于数学基本功有一定的要求，需要借助于引理 2 和引理 3 的结论方可证明。

下面我们运用升阶法，直接对升阶的矩阵做初等变换来证明 Sherman-Morrison 公式，这种方法比第一种方法更为初等，可以更直观的理解 Sherman-Morrison 公式的构造过程。

方法 2 将$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{\alpha\beta}'$升阶为$n+1$阶方阵，然后对其进行初等变换求逆矩阵：

$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}+\boldsymbol{\alpha\beta}' & 0 & \boldsymbol{E}_n & 0\\ -\boldsymbol{\beta}' & 1 & \boldsymbol{0} & 1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{\alpha} & \boldsymbol{E}_n & \boldsymbol{\alpha}\\ -\boldsymbol{\beta}' & 1 & \boldsymbol{0} & 1\end{pmatrix}$$
$$\to\begin{pmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{\alpha} & \boldsymbol{E}_n & \boldsymbol{\alpha}\\ \boldsymbol{0} & 1+\boldsymbol{\beta}'\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{\alpha} & \boldsymbol{\beta}'\boldsymbol{A}^{-1} & 1+\boldsymbol{\beta}'\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{\alpha}\end{pmatrix}$$
$$\to\begin{pmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{\alpha} & \boldsymbol{E}_n-\left(1+\boldsymbol{\beta}'\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{\alpha}\right)^{-1}\boldsymbol{\alpha\beta}'\boldsymbol{A}^{-1} & 0\\ \boldsymbol{0} & 1+\boldsymbol{\beta}'\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{\alpha} & \boldsymbol{\beta}'\boldsymbol{A}^{-1} & 1+\boldsymbol{\beta}'\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{\alpha}\end{pmatrix}$$
$$\to\begin{pmatrix}\boldsymbol{E}_n & 0 & \boldsymbol{A}^{-1}-\left(1+\boldsymbol{\beta}'\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{\alpha}\right)^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{\alpha\beta}'\boldsymbol{A}^{-1} & 0\\ \boldsymbol{0} & 1 & \left(1+\boldsymbol{\beta}'\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{\alpha}\right)^{-1}\boldsymbol{\beta}'\boldsymbol{A}^{-1} & 1\end{pmatrix},$$

故

$$\boldsymbol{M}^{-1}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}^{-1}-\left(1+\boldsymbol{\beta}'\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{\alpha}\right)^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{\alpha\beta}'\boldsymbol{A}^{-1} & 0\\ \left(1+\boldsymbol{\beta}'\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{\alpha}\right)^{-1}\boldsymbol{\beta}'\boldsymbol{A}^{-1} & 1\end{pmatrix}.$$

所以

$$\boldsymbol{MM}^{-1}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}+\boldsymbol{\alpha\beta}' & 0\\ -\boldsymbol{\beta}' & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_1 & \boldsymbol{B}_1\\ \boldsymbol{C}_1 & \boldsymbol{D}_1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{E}_n & 0\\ \boldsymbol{0} & 1\end{pmatrix},$$

即$\left(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{\alpha\beta}'\right)\boldsymbol{A}_1=\boldsymbol{E}_n$。因此$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{\alpha\beta}'$可逆，且$\left(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{\alpha\beta}'\right)^{-1}=\boldsymbol{A}_1=\boldsymbol{A}^{-1}-\dfrac{\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{\alpha\beta}'\boldsymbol{A}^{-1}}{1+\boldsymbol{\beta}'\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{\alpha}}$。证毕。

接下来运用分块矩阵的方法来证明 Sherman-Morrison 公式。分块矩阵在矩阵计算中是一种重要的工具和方法，通过合理的划分矩阵，可以使矩阵的结构更加清晰，具有优化计算、便于分析和提高运算效率等优点。

方法 3 由于$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{\alpha\beta}'$可逆当且仅当其行列式不为 0，即

$$\left|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{\alpha\beta}'\right|=\begin{vmatrix}\boldsymbol{A}+\boldsymbol{\alpha\beta}' & 0\\ \boldsymbol{0} & 1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{A} & -\boldsymbol{\alpha}\\ \boldsymbol{\beta}' & 0\end{vmatrix}=|\boldsymbol{A}|\left|1+\boldsymbol{\beta}'\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{\alpha}\right|\neq 0.$$

已知$\boldsymbol{A}$可逆，因此$|\boldsymbol{A}|\neq 0$；又因为$1+\boldsymbol{\beta}'\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{\alpha}\neq 0$，所以$\left|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{\alpha\beta}'\right|\neq 0$，故$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{\alpha\beta}'$可逆。

我们令$\begin{pmatrix}\boldsymbol{A} & -\boldsymbol{\alpha}\\ \boldsymbol{\beta}' & 1\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{X}\\ \boldsymbol{Y} & \boldsymbol{B}\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{C} & \boldsymbol{D}\\ \boldsymbol{E} & \boldsymbol{F}\end{pmatrix}$，那么

$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{X}\\ \boldsymbol{Y} & \boldsymbol{B}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{C} & \boldsymbol{D}\\ \boldsymbol{E} & \boldsymbol{F}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{C} & \boldsymbol{D}\\ \boldsymbol{E} & \boldsymbol{F}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{X}\\ \boldsymbol{Y} & \boldsymbol{B}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{E}_n & 0\\ \boldsymbol{0} & 1\end{pmatrix},$$

由矩阵的运算得到下述方程组：

$$\begin{cases} \boldsymbol{AC} + \boldsymbol{XE} = \boldsymbol{E}_n \\ \boldsymbol{AD} + \boldsymbol{XF} = \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{YC} + \boldsymbol{BE} = \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{YD} + \boldsymbol{BF} = 1 \end{cases},$$

以及

$$\begin{cases} \boldsymbol{CA} + \boldsymbol{DY} = \boldsymbol{E}_n \\ \boldsymbol{CX} + \boldsymbol{DB} = \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{EA} + \boldsymbol{FY} = \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{EX} + \boldsymbol{FB} = 1 \end{cases},$$

解得

$$\begin{cases} \boldsymbol{D} = \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{X}\left(\boldsymbol{YA}^{-1}\boldsymbol{X} - \boldsymbol{B}\right)^{-1} \\ \boldsymbol{E} = \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{Y}\left(\boldsymbol{XB}^{-1}\boldsymbol{Y} - \boldsymbol{A}\right)^{-1} \\ \boldsymbol{C} = \boldsymbol{A}^{-1} - \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{X}\left(\boldsymbol{YA}^{-1}\boldsymbol{X} - \boldsymbol{B}\right)^{-1}\boldsymbol{YA}^{-1} \end{cases},$$

由 $\boldsymbol{YC} + \boldsymbol{BE} = \boldsymbol{0}$ 得 $\boldsymbol{Y}\left(\boldsymbol{A}^{-1} - \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{X}\left(\boldsymbol{YA}^{-1}\boldsymbol{X} - \boldsymbol{B}\right)^{-1}\boldsymbol{YA}^{-1}\right) + \boldsymbol{Y}\left(\boldsymbol{XB}^{-1}\boldsymbol{Y} - \boldsymbol{A}\right)^{-1} = \boldsymbol{0}$, (2)

将 $\boldsymbol{X} = -\boldsymbol{\alpha}$， $\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{\beta}'$， $\boldsymbol{B} = 1$ 代入(2)式得：

$$\boldsymbol{\beta}'\left(\boldsymbol{A}^{-1} - \boldsymbol{A}^{-1}(-\boldsymbol{\alpha})\left(\boldsymbol{\beta}'\boldsymbol{A}^{-1}(-\boldsymbol{\alpha}) - 1\right)^{-1}\boldsymbol{\beta}'\boldsymbol{A}^{-1}\right) + \boldsymbol{\beta}'\left(-\boldsymbol{\alpha\beta}' - \boldsymbol{A}\right)^{-1} = \boldsymbol{0},$$

于是

$$\left(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{\alpha\beta}'\right)^{-1} = \boldsymbol{A}^{-1} - \frac{\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{\alpha\beta}'\boldsymbol{A}^{-1}}{1 + \boldsymbol{\beta}'\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{\alpha}}.$$

接下来，利用矩阵方程求解的思想证明 Sherman-Morrison 公式。这种方法简单易懂，缺点是计算复杂度较高。

方法 4 由引理 2 可知，当 $1 + \boldsymbol{\beta}'\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{\alpha} \neq 0$ 时，则 $\boldsymbol{A} + \boldsymbol{\alpha\beta}'$ 可逆。

考虑矩阵方程 $\left(\boldsymbol{E}_n + \boldsymbol{\alpha\beta}'\right)\boldsymbol{X} = \boldsymbol{B}$，其中 $\boldsymbol{B}$ 是数域 $\mathbb{P}$ 上的 n 阶可逆矩阵，解出 $\boldsymbol{X}$ 即可以得到 $\left(\boldsymbol{E}_n + \boldsymbol{\alpha\beta}'\right)^{-1}$ 的公式。

由矩阵运算， $\boldsymbol{E}_n\boldsymbol{X} + \boldsymbol{\alpha\beta}'\boldsymbol{X} = \boldsymbol{B}$， 记 $\gamma = \boldsymbol{\beta}'\boldsymbol{X}$， 有

$$\boldsymbol{X} + \boldsymbol{\alpha}\gamma = \boldsymbol{B}. \tag{3}$$

(3)式左右两边同时左乘 $\boldsymbol{\beta}'$，得到 $\boldsymbol{\beta}'\boldsymbol{X} + \boldsymbol{\beta}'\boldsymbol{\alpha}\gamma = \boldsymbol{\beta}'B$，即 $\gamma + \boldsymbol{\beta}'\boldsymbol{\alpha}\gamma = \boldsymbol{\beta}'\boldsymbol{B}$，解得 $\gamma = \left(1 + \boldsymbol{\beta}'\boldsymbol{\alpha}\right)^{-1}\boldsymbol{\beta}'\boldsymbol{B}$。那么，由(3)式得 $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{B} - \boldsymbol{\alpha}\gamma = \boldsymbol{B} - \boldsymbol{\alpha}\dfrac{\boldsymbol{\beta}'\boldsymbol{B}}{1 + \boldsymbol{\beta}'\boldsymbol{\alpha}} = \boldsymbol{B} - \dfrac{\boldsymbol{\alpha\beta}'}{1 + \boldsymbol{\beta}'\boldsymbol{\alpha}}\boldsymbol{B} = \left(\boldsymbol{E}_n - \dfrac{\boldsymbol{\alpha\beta}'}{1 + \boldsymbol{\beta}'\boldsymbol{\alpha}}\right)\boldsymbol{B}$， 因此得到 $\left(\boldsymbol{E}_n + \boldsymbol{\alpha\beta}'\right)\boldsymbol{X} = \left(\boldsymbol{E}_n + \boldsymbol{\alpha\beta}'\right)\left(\boldsymbol{E}_n - \dfrac{\boldsymbol{\alpha\beta}'}{1 + \boldsymbol{\beta}'\boldsymbol{\alpha}}\right)\boldsymbol{B} = \boldsymbol{B}$， 所以 $\left(\boldsymbol{E}_n + \boldsymbol{\alpha\beta}'\right)\left(\boldsymbol{E}_n - \dfrac{\boldsymbol{\alpha\beta}'}{1 + \boldsymbol{\beta}'\boldsymbol{\alpha}}\right) = \boldsymbol{E}_n$ 即

$$\left(\boldsymbol{E}_n + \boldsymbol{\alpha\beta}'\right)^{-1} = \boldsymbol{E}_n - \frac{\boldsymbol{\alpha\beta}'}{1 + \boldsymbol{\beta}'\boldsymbol{\alpha}}, \tag{4}$$

最终，将 $\boldsymbol{\alpha}$ 替换为 $\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{\alpha}$，由于 $\boldsymbol{\alpha}$ 和 $\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{\alpha}$ 都是 n 维列向量，所以(4)式可变为

$$\left(\boldsymbol{E}_n+\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}'\right)^{-1}=\boldsymbol{E}_n-\frac{\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}'}{1+\boldsymbol{\beta}'\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{\alpha}},$$

由于 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}'=\boldsymbol{A}\left(\boldsymbol{E}_n+\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}'\right)$ 可逆，并且

$$\left(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}'\right)^{-1}=\left(\boldsymbol{E}_n+\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}'\right)^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}=\left(\boldsymbol{E}_n-\frac{\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}'}{1+\boldsymbol{\beta}'\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{\alpha}}\right)\boldsymbol{A}^{-1}=\boldsymbol{A}^{-1}-\frac{\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}'\boldsymbol{A}^{-1}}{1+\boldsymbol{\beta}'\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{\alpha}}.$$

最后运用因式分解的方法来证明 Sherman-Morrison 公式。其中方法 5 由引理 4 的思想，简化后运用引理 5 进行证明，此种证明方法过程简练而且计算较为简单，但是对学生的逻辑推理能力以及对于高等代数的知识储备要求较高。

方法 5 由引理 2 可知，当 $1+\boldsymbol{\beta}'\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{\alpha}\neq 0$ 时，则 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}'$ 可逆，即

$$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}'=\boldsymbol{A}\left(\boldsymbol{E}_n+\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}'\right)\text{可逆，并且}\left(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}'\right)^{-1}=\left(\boldsymbol{E}_n+\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}'\right)^{-1}\boldsymbol{A}^{-1},\tag{5}$$

由引理 5，$\left(\boldsymbol{E}_n+\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}'\right)^{-1}=\sum_{i=0}^{\infty}(-1)^i\left(\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}'\right)^i$；$\left(1+\boldsymbol{\beta}'\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{\alpha}\right)^{-1}=\frac{1}{1+\boldsymbol{\beta}'\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{\alpha}}=\sum_{i=0}^{\infty}(-1)^i\left(\boldsymbol{\beta}'\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{\alpha}\right)^i$，进一步，将(5)代入得：

$$\begin{aligned}
\left(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}'\right)^{-1}&=\sum_{i=0}^{\infty}(-1)^i\left(\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}'\right)^i\boldsymbol{A}^{-1}\\
&=\boldsymbol{A}^{-1}-\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}'\boldsymbol{A}^{-1}+\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}'\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}'\boldsymbol{A}^{-1}-\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}'\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}'\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}'\boldsymbol{A}^{-1}+\cdots+(-1)^i\left(\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}'\right)^i\boldsymbol{A}^{-1}\\
&=\boldsymbol{A}^{-1}-\left(\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{\alpha}\right)\left(\boldsymbol{\beta}'\boldsymbol{A}^{-1}\right)+\left(\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{\alpha}\right)\boldsymbol{\beta}'\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{\alpha}\left(\boldsymbol{\beta}'\boldsymbol{A}^{-1}\right)-\left(\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{\alpha}\right)\left(\boldsymbol{\beta}'\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{\alpha}\right)^2\left(\boldsymbol{\beta}'\boldsymbol{A}^{-1}\right)+\cdots\\
&\quad+(-1)^i\left(\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{\alpha}\right)\left(\boldsymbol{\beta}'\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{\alpha}\right)^i\left(\boldsymbol{\beta}'\boldsymbol{A}^{-1}\right)\\
&=\boldsymbol{A}^{-1}-\left(\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{\alpha}\right)\sum_{i=0}^{\infty}(-1)^i\left(\boldsymbol{\beta}'\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{\alpha}\right)^i\left(\boldsymbol{\beta}'\boldsymbol{A}^{-1}\right)\\
&=\boldsymbol{A}^{-1}-\left(\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{\alpha}\right)\left(1+\boldsymbol{\beta}'\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{\alpha}\right)^{-1}\left(\boldsymbol{\beta}'\boldsymbol{A}^{-1}\right)\\
&=\boldsymbol{A}^{-1}-\frac{\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}'\boldsymbol{A}^{-1}}{1+\boldsymbol{\beta}'\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{\alpha}}
\end{aligned}$$

4. 结语

本文通过多角度、多维度、多层次，分别运用矩阵分解、矩阵的升阶法、因式分解法、矩阵方程的求解以及行列式降阶定理的方法对 Sherman-Morrison 公式的证明进行分析与处理，得到数学问题的多种解答方法，从而开阔学生解题思路，发散学生数学思维，使学生能够在之后处理类似问题时优选最佳的办法，为学生积累解题经验和解题技巧，进一步提高解题效率。由此发现，各个公式之间存在着密切的联系，通过运用不同的方法对 Sherman-Morrison 公式进行证明，加深了对于 Sherman-Morrison 公式的直观理解，提升学生数学思维的敏捷性。通过数学思维品质的培养，学生对数学知识的理解与运用也能够得到有效提升。教师在高等代数课程教学中要注重构建学生的数学知识体系，挖掘不同的数学模块及基础知识之间的内在联系，促进学生数学思想方法之间的渗透与沟通，实现数学知识的巧妙转化与合理运用，从而培养学生思维的广度与深度，拓展数学教学的价值。

基金项目

山西省基础研究计划(自由探索类)青年项目：202103021223328。

参考文献

[1] 尹小艳. 从一道课本例题谈矩阵求逆[J]. 高等数学研究, 2023, 26(5): 17-20.

[2] 陈建华, 焦荣政. 三对角矩阵求逆问题的思考——从一道课本习题谈起[J]. 大学数学, 2020, 36(1): 104-109.

[3] 李亭亭. 初等变换法求逆矩阵在线性代数教学与解题中的应用[J]. 数学大世界(上旬), 2023(5): 59-61.

[4] 曾聃, 徐运阁. 矩阵的逆及秩的降阶方法[J]. 大学数学, 2019, 35(5): 117-121.

[5] 北京大学数学系前代数小组. 高等代数[M]. 第5版. 王萼芳, 石生明, 修订. 北京: 高等教育出版社, 2019.

[6] Gene, H.G. and Charles, F.V.L. (1996) Matrix Computations. Johns Hopkins University Press, New York, 58-59.