Pure Mathematics 理论数学, 2024, 14(2), 433-443
Published Online February 2024 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2024.142042

含Bernoulli数、Euler数、Genocchi数的多重卷积

陈　悦

浙江理工大学理学院，浙江　杭州

收稿日期：2023年12月14日；录用日期：2023年12月25日；发布日期：2024年2月21日

摘　要

利用生成函数及双曲函数导子多项式的性质，建立关于Bernoulli数与Euler数的三个多重卷积的递推关系，这三个多重卷积中有两个是Euler型卷积，一个是Rademacher型卷积。又进一步利用部分分式展开法与生成函数方法建立关于Bernoulli数与Genocchi数的混合多重卷积恒等式。

关键词

Bernoulli数，Euler数，Genocchi数，递推关系，生成函数

Multiple Convolutions on Bernoulli Numbers, Euler Numbers and Genocchi Numbers

Yue Chen

School of Science, Zhejiang Sci-Tech University, Hangzhou Zhejiang

Received: Dec. 14th, 2023; accepted: Dec. 25th, 2023; published: Feb. 21st, 2024

Abstract

In this paper, by using generating functions and the properties of derivative polynomials of the hyperbolic functions, we establish the recurrences of three multiple convolutions on Bernoulli numbers and Euler numbers, including two Euler-type convolutions and one Rademacher-type convolution. Moreover, using the methods of partial fraction decompositions and generating functions, we present a mixed multiple convolution identity on Bernoulli numbers and Genocchi numbers.

Keywords

Bernoulli Numbers, Euler Numbers, Genocchi Numbers, Recurrence Relations, Generating Functions

文章引用: 陈悦. 含 Bernoulli 数、Euler 数、Genocchi 数的多重卷积[J]. 理论数学, 2024, 14(2): 433-443.
DOI: 10.12677/pm.2024.142042

1. 引言

Bernoulli 数(多项式)、Euler 数(多项式)、Genocchi 数、Fibonacci 数(多项式)等经典组合序列及其恒等式在组合学、数论、特殊函数论、算法分析等领域有着重要的应用。这些组合序列的各种形式的多重卷积更是受到学者们的广泛关注[1]-[8]。Bernoulli 数、Euler 数与 Genocchi 数可由下面的生成函数定义[9]：

$$\frac{t}{e^t-1}=\sum_{n=0}^{\infty}B_n\frac{t^n}{n!},\quad \frac{2e^t}{e^{2t}+1}=\sum_{n=0}^{\infty}E_n\frac{t^n}{n!},\quad \frac{2t}{e^t+1}=\sum_{n=1}^{\infty}G_n\frac{t^n}{n!}。$$

它们的前几项为 $B_0=1$，$B_1=-\frac{1}{2}$，$B_2=\frac{1}{6}$，$B_4=-\frac{1}{30}$，$E_0=1$，$E_2=-1$，$E_4=5$，当 $k\geq 1$ 时，$B_{2k+1}=E_{2k-1}=0$。此外，对于 $n\geq 0$，有 $G_n=2\left(1-2^n\right)B_n$。Bernoulli 数与 Euler 数还可由双曲函数定义[10]：

$$t\coth(t)=\sum_{n=0}^{\infty}B_{2n}\frac{(2t)^{2n}}{(2n)!},\quad \operatorname{sech}(t)=\sum_{n=0}^{\infty}E_{2n}\frac{t^{2n}}{(2n)!}。\tag{1}$$

对 $n\in\mathbb{N}$，高阶 Bernoulli 数 $B_n^{(\alpha)}$ 和高阶 Genocchi 数 $G_n^{(\alpha)}$ 由生成函数定义为

$$\left(\frac{t}{e^t-1}\right)^{\alpha}=\sum_{n=0}^{\infty}B_n^{(\alpha)}\frac{t^n}{n!},\quad \left(\frac{2t}{e^t+1}\right)^{\alpha}=\sum_{n=0}^{\infty}G_n^{(\alpha)}\frac{t^n}{n!}。\tag{2}$$

Bernoulli 数满足如下卷积恒等式：

$$\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}B_jB_{n-j}=-nB_{n-1}-(n-1)B_n,\quad n\geq 1,\tag{3}$$

该恒等式称为 Euler 恒等式。Berndt [11]给出了 Euler 恒等式(3)的等价形式：

$$\sum_{j=0}^{n}\binom{2n}{2j}B_{2j}B_{2n-2j}=-(2n-1)B_{2n},\quad n\geq 2。$$

Euler 恒等式已经得到了不同类型的推广。例如，1996 年，Dilcher [2]研究了 Bernoulli 数的多重卷积，即任意多个 Bernoulli 数的乘积之和

$$\sum_{\substack{j_1+\cdots+j_l=n\\ j_1,\cdots,j_l\geq 0}}\binom{2n}{2j_1,\cdots,2j_l}B_{2j_1}\cdots B_{2j_l},$$

并给出了表达式，这里 $\binom{2n}{2j_1,\cdots,2j_l}$ 为多项式系数。之后，2007 年，Agoh 和 Dilcher [1]利用第二类 Stirling 数及整数幂和的卷积恒等式研究了(3)式的以下推广形式：

$$\left(B_j+B_l\right)^n:=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}B_{j+k}B_{l+n-k}，其中\ j,\ l,\ n\geq 0。\tag{4}$$

2009 年，Agoh 和 Dilcher [3]又推广了上面的结果，并得到了(4)的高阶形式

$$\left(B_{k_1}+\cdots+B_{k_l}\right)^n:=\sum_{\substack{j_1+\cdots+j_l=n\\ j_1,\cdots,j_l\geq 0}}\binom{n}{j_1,\cdots,j_l}B_{k_1+j_1}\cdots B_{k_l+j_l}$$

的存在定理。此外，2013 年，王伟平[6]利用部分分式展开法和生成函数方法还建立了 Bernoulli 多项式与 Euler 多项式的混合多重卷积恒等式。

设 D_t 为导算子，满足 $D_t f(t)=f'(t)$，则对于双曲余切函数 $\coth(t)$，存在 $n+1$ 阶整系数多项式 $P_n(y)$，使得

$$P_n(\coth(t))=D_t^n \coth(t),\quad n=0,1,2,\cdots,$$

其中，

$$P_0(y)=y,\quad P_1(y)=1-y^2,\quad P_2(y)=-2y+2y^3,\quad P_3(y)=-2+8y^2-6y^4,$$

且

$$P_{n+1}(y)=\left(1-y^2\right)P_n'(y),\quad n\geq 0。$$

这些多项式称为双曲函数的导子多项式。可证明对于 $y=\tanh(t)$ 有相同的导子多项式。导子多项式的概念由 Hoffman [12]在 1995 年引入。关于导子多项式的研究还可以参考 Boyadzhiev [13]、初文昌等[4] [5]、马世美[14]等的工作。

2010 年，初文昌和王琛颖[4]利用生成函数方法和导子多项式的性质，建立了几类关于 Bernoulli 数的卷积恒等式，其中包括三个多重卷积恒等式。2020 年，初文昌[5]又利用类似方法进一步得到了更多的关于 Euler 数与 Bernoulli 数的多重卷积恒等式。2023 年，王伟平和徐策[8]又基于导子多项式建立了一类含 Bernoulli 数与 Genocchi 数的卷积恒等式，并用于得到关于 Euler 和的对称级数恒等式。

基于上述工作，本文将研究 Bernoulli 数与 Euler 数的多重卷积的递推关系以及 Bernoulli 数与 Genocchi 数的混合多重卷积恒等式。首先，利用导子多项式的性质及 Bernoulli 数与 Euler 数的生成函数，建立多重卷积

$$\sum_{\substack{j_1+\cdots+j_l=n\\ j_1,\cdots,j_l\geq 0}}\binom{2n}{2j_1,\cdots,2j_l}B_{2j_1}\cdots B_{2j_l},\quad \sum_{\substack{j_1+\cdots+j_l=n\\ j_1,\cdots,j_l\geq 0}}\binom{2n+l}{2j_1+1,\cdots,2j_l+1}\frac{B_{2j_1+2}\cdots B_{2j_l+2}}{(j_1+1)\cdots(j_l+1)}$$

与

$$\sum_{\substack{j_1+\cdots+j_l=n\\ j_1,\cdots,j_l\geq 0}}\binom{2n}{2j_1,\cdots,2j_l}E_{2j_1}\cdots E_{2j_l}$$

的生成函数满足的关系式，再通过对关系式两端取系数建立多重卷积的递推关系，并给出一些特殊的卷积恒等式；之后，利用部分分式展开法和生成函数方法，得到关于 Bernoulli 数与 Genocchi 数的混合多重卷积恒等式，由此可证明混合多重卷积

$$S_n^{(k)}(l,k-l):=\sum_{\substack{j_1+\cdots+j_k=n\\ j_1,\cdots,j_k\geq 0}}\binom{n}{j_1,\cdots,j_k}B_{j_1}\cdots B_{j_l}G_{j_{l+1}}\cdots G_{j_k}$$

可以由 Bernoulli 数 B_n、Genocchi 数 G_n 与 Euler 数 $E_n(0)$ 表示。

2. Bernoulli 数与 Euler 数的多重卷积的递推关系

定义 1 给定一个序列 $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$，若存在 $a_1,\cdots,a_k$，使得

$$h_n=a_1h_{n-1}+\cdots+a_kh_{n-k},\quad n\geq k,$$

则称序列 $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 满足 k 阶齐次线性递推关系。

本节利用导子多项式的性质及 Bernoulli 数与 Euler 数的生成函数，建立 Bernoulli 数与 Euler 数的多重卷积的递推关系。

对于整数 $2n > l \ge 1$，有下列 Euler 型多重卷积公式[5]成立：

$$\varepsilon_1(n,l) := \sum_{\substack{j_1+\cdots+j_l=n \\ j_1,\cdots,j_l\ge 0}} \binom{2n}{2j_1,\cdots,2j_l} B_{2j_1}\cdots B_{2j_l} = (-1)^{l-1} l! \binom{2n}{l} \sum_{k=0}^{\left[\frac{l-1}{2}\right]} \frac{B_{2n-2k}}{2n-2k} W(k,l),$$

其中

$$W(k,l) = \sum_{i=0}^{2k} (-1)^i \frac{2^{-i}}{(l-1-i)!} \binom{l}{i} \begin{bmatrix} l-i \\ l-2k \end{bmatrix},$$

$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}$表示第一类 Stirling 数[9]。除 $\varepsilon_1(n,l)$ 之外，对于整数 $n \ge l \ge 1$，有下列 Rademacher 型多重卷积公式[5]成立：

$$\varepsilon_2(n,l) := \sum_{\substack{j_1+\cdots+j_l=n \\ j_1,\cdots,j_l\ge 0}} \binom{2n+l}{2j_1+1,\cdots,2j_l+1} \frac{B_{2j_1+2}\cdots B_{2j_l+2}}{(j_1+1)\cdots(j_l+1)} = (-1)^{l-1} 2^{l-1} \sum_{k=0}^{\left[\frac{l-1}{2}\right]} \frac{B_{2n+2l-2k}}{n+l-k} T(k,l),$$

其中

$$T(k,l) = \sum_{m=2k+1}^{l} \sum_{i=0}^{2k} (-1)^i \frac{2^{-i}}{(m-1-i)!} \binom{l}{m} \binom{m}{i} \frac{1}{(2n+l+1)_{l-m}} \begin{bmatrix} m-i \\ m-2k \end{bmatrix}。$$

例如，对 $n \ge 2$，有 $\varepsilon_1(n,2) = -(2n-1)B_n$，该公式即为 Euler 恒等式。此外，

$$\varepsilon_2(n,1) = \frac{B_{2n+2}}{n+1}, \quad \varepsilon_2(n,2) = -\frac{2(2n+5)B_{2n+4}}{(2n+3)(n+2)}。$$

Euler 型多重卷积及 Rademacher 型多重卷积在量子场理论及拓扑弦论中有重要的应用(见[15])。

下面建立上述两个 Bernoulli 数多重卷积的递推关系。

定理 1 对于正整数 $n \ge l$，Euler 型多重卷积 $\varepsilon_1(n,l)$ 和 Rademacher 型多重卷积 $\varepsilon_2(n,l)$ 满足下面的递推关系：

$$\varepsilon_1(n,l+1) = -\frac{2n-l}{l}\varepsilon_1(n,l) + \frac{n(2n-1)}{2}\varepsilon_1(n-1,l-1), \quad l \ge 2, \tag{5}$$

$$\varepsilon_2(n-1,l+1) = -\frac{2(2n+3l)}{l(2n+l)}\varepsilon_2(n,l) + \varepsilon_2(n,l-1), \quad l \ge 2。 \tag{6}$$

证明 根据生成函数(1)，定义

$$g_1(t) := t\coth(t) = \sum_{n=0}^{\infty} B_{2n} \frac{(2t)^{2n}}{(2n)!}, \quad g_2(t) := t\coth(t) - 1 = \sum_{n=0}^{\infty} B_{2n+2} \frac{(2t)^{2n+2}}{(2n+2)!},$$

则有

$$g_1(t)^l = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_1(n,l) \frac{(2t)^{2n}}{(2n)!}, \quad g_2(t)^l = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_2(n,l) \frac{2^{2n+l} t^{2n+2l}}{(2n+l)!}。 \tag{7}$$

运用导子多项式的性质

$$\coth'(t)=P_1(\coth(t))=1-\coth^2(t),$$

则

$$tg_1'(t)=t(t\coth(t))'=t\left(\coth(t)+t\left(1-\coth^2(t)\right)\right)=t^2+g_1(t)-g_1(t)^2,$$

类似可得

$$tg_2'(t)=t^2-g_2(t)-g_2(t)^2,\quad \left(tg_1(t)^l\right)'=(l+1)g_1(t)^l-lg_1(t)^{l+1}+lt^2g_1(t)^{l-1},$$

$$\left(tg_2(t)^l\right)'=(-l+1)g_2(t)^l-lg_2(t)^{l+1}+lt^2g_2(t)^{l-1},$$

再将(7)式代入，可得

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty}\varepsilon_1(n,l)\frac{2^{2n}t^{2n+1}}{(2n)!}\right)'=(l+1)\sum_{n=0}^{\infty}\varepsilon_1(n,l)\frac{(2t)^{2n}}{(2n)!}-l\sum_{n=0}^{\infty}\varepsilon_1(n,l+1)\frac{(2t)^{2n}}{(2n)!}+l\sum_{n=0}^{\infty}\varepsilon_1(n,l-1)\frac{2^{2n}t^{2n+2}}{(2n)!},$$

比较等式两边t^{2n}的系数即可得(5)式，同理并比较t^{2n+2l}的系数可得(6)式。□

对于 Bernoulli 数的上述 Euler 型多重卷积，当$l-1$重与l重卷积的表达式确定之后，即可利用递推关系(5)确定$l+1$重卷积的表达式。类似地，对于上述 Rademacher 型多重卷积，也可递推地确定$l+1$重卷积的表达式，但需注意为得到最终结果，在利用(6)式之后，还需进行变量替换$n\to n+1$。

例 1 在定理 1 中取$l=2,3,4$，可得

$$\varepsilon_1(n,3)=3!\binom{2n}{3}\left[\frac{B_{2n}}{4n}+\frac{B_{2n-2}}{8(n-1)}\right],\quad \varepsilon_1(n,4)=-4!\binom{2n}{4}\left[\frac{B_{2n}}{12n}+\frac{B_{2n-2}}{6(n-1)}\right],$$

$$\varepsilon_1(n,5)=5!\binom{2n}{5}\left[\frac{B_{2n}}{48n}+\frac{5B_{2n-2}}{48(n-1)}+\frac{B_{2n-4}}{32(n-2)}\right],$$

$$\varepsilon_2(n,3)=\frac{2(2n+7)(n+4)B_{2n+6}}{(2n+5)(n+3)(n+2)}+\frac{B_{2n+4}}{n+2},\quad \varepsilon_2(n,4)=-\frac{8\langle 2n+9\rangle_3B_{2n+8}}{3\langle 2n+5\rangle_4}-\frac{32(n+4)B_{2n+6}}{3\langle 2n+5\rangle_2},$$

$$\varepsilon_2(n,5)=\frac{4\langle 2n+11\rangle_4B_{2n+10}}{3\langle 2n+6\rangle_5}+\frac{20\langle 2n+10\rangle_2B_{2n+8}}{3\langle 2n+6\rangle_3}+\frac{B_{2n+6}}{n+3},$$

其中$\langle x\rangle_n$为升阶乘，定义为$\langle x\rangle_0=1$，$\langle x\rangle_n=x(x+1)\cdots(x+n-1)$，$n=1,2,\cdots$。□

类似地，对于 Euler 数，若定义：

$$\varepsilon_3(n,l):=\sum_{\substack{j_1+\cdots+j_l=n\\ j_1,\cdots,j_l\ge 0}}\binom{2n}{2j_1,\cdots,2j_l}E_{2j_1}\cdots E_{2j_l},$$

则根据 Berndt [11]的著作，有$\varepsilon_3(n,1)=E_{2n}$，$\varepsilon_3(n,2)=4^{n+1}\left(2^{2n+2}-1\right)\frac{B_{2n+2}}{2n+2}$。最近，初文昌[5]建立了$l$为偶数与奇数时，$\varepsilon_3(n,l)$的两个表达式。下面给出$\varepsilon_3(n,l)$的递推关系。

定理 2 对于正整数$n\ge l$，Euler 型多重卷积$\varepsilon_3(n,l)$满足下面的递推关系：

$$\varepsilon_3(n,l+2)=-\frac{1}{l(l+1)}\varepsilon_3(n+1,l)+\frac{l}{l+1}\varepsilon_3(n,l),\quad l\ge 1。$$

证明 根据生成函数(1)，定义

$$g_3(t) := \operatorname{sech}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} E_{2n} \frac{t^{2n}}{(2n)!}, \tag{8}$$

则有

$$g_3(t)^l = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_3(n,l) \frac{t^{2n}}{(2n)!},$$

又由导子多项式的性质得

$$g_3'(t) = -\tanh(t)\operatorname{sech}(t), \quad g_3''(t) = g_3(t) - 2g_3(t)^3,$$

$$\left(g_3(t)^l\right)' = l g_3(t)^{l-1} g_3'(t), \quad \left(g_3(t)^l\right)'' = l^2 g_3(t)^l - l(l+1) g_3(t)^{l+2},$$

将(8)式代入并比较 t^{2n} 的系数，再整理即可得到定理 2。□

例 2 在定理 2 中取 $l = 1,2,3,4$，可得以下恒等式：

$$\varepsilon_3(n,3) = -\frac{E_{2n+2}}{2} + \frac{E_{2n}}{2}, \quad \varepsilon_3(n,4) = 4^{n+1}\left[-\frac{\left(2^{2n+4}-1\right)B_{2n+4}}{3(n+2)} + \frac{\left(2^{2n+2}-1\right)B_{2n+2}}{3(n+1)}\right],$$

$$\varepsilon_3(n,5) = \frac{E_{2n+4}}{24} - \frac{5E_{2n+2}}{12} + \frac{3E_{2n}}{8},$$

$$\varepsilon_3(n,6) = 4^{n+1}\left[\frac{\left(2^{2n+6}-1\right)B_{2n+6}}{15(n+3)} - \frac{\left(2^{2n+4}-1\right)B_{2n+4}}{3(n+2)} + \frac{4\left(2^{2n+2}-1\right)B_{2n+2}}{15(n+1)}\right].$$

由定理 2 可知，当 l 为偶数时 $\varepsilon_3(n,l)$ 可以由 Bernoulli 数 B_{2n} 表示，当 l 为奇数时 $\varepsilon_3(n,l)$ 可以由 Euler 数 E_{2n} 表示。

3. Bernoulli 数与 Genocchi 数的混合多重卷积恒等式

Dilcher [2]建立了高阶 Bernoulli 数 $B_n^{(k)}$ 的表达式

$$B_n^{(k)} = (-1)^{k-1} k \binom{n}{k} \sum_{j=1}^{k} \begin{bmatrix} k \\ j \end{bmatrix} \frac{B_{n-k+j}}{n-k+j}, \tag{9}$$

例如，

$$B_n^{(2)} = -(n-1)B_n - nB_{n-1}, \quad B_n^{(3)} = \frac{(n-1)(n-2)}{2}B_n + \frac{3n(n-2)}{2}B_{n-1} + n(n-1)B_{n-2},$$

$$B_n^{(4)} = -\frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{6}B_n - n(n-2)(n-3)B_{n-1} - \frac{11n(n-1)(n-3)}{6}B_{n-2} - n(n-1)(n-2)B_{n-3}.$$

此外，Dilcher [2]还建立了高阶 Euler 多项式在 0 处的值 $E_n^{(k)}(0)$ 的表达式

$$E_n^{(k)}(0) = \left[\frac{t^n}{n!}\right]\left(\frac{2}{\mathrm{e}^t+1}\right)^k = \sum_{\substack{j_1+\cdots+j_k=n \\ j_1,\cdots,j_k\ge 0}} \binom{2n}{2j_1,\cdots,2j_k} E_{2j_1}(0)\cdots E_{2j_k}(0)$$

$$= \frac{2^{k-1}}{(k-1)!}\sum_{j=0}^{k-1}\begin{bmatrix} k \\ k-j \end{bmatrix} E_{n+k-1-j}(0),$$

其中，$n \ge k \ge 1$，$E_n(0)$ 为 Euler 多项式 $E_n(x)$ 在 0 处的值，为简便起见，本文中也称之为 Euler 数。结合生成函数(2)可得如下引理。

引理 1 高阶 Genocchi 数 $G_n^{(k)}$ 可以用 Euler 数 $E_n(0)$ 表示：

$$G_n^{(k)}=k\binom{n}{k}2^{k-1}\sum_{j=0}^{k-1}\begin{bmatrix}k\\k-j\end{bmatrix}E_{n-1-j}(0)，\quad n\ge k\ge 1。\tag{10}$$

证明 由生成函数(2)以及上述 Dilcher 的结果，可得

$$G_n^{(k)}=n!\left[t^{n-k}\right]\left(\frac{2}{\mathrm{e}^{2t}-1}\right)^k=\frac{n!}{(n-k)!}\left[\frac{t^{n-k}}{(n-k)!}\right]\left(\frac{2}{\mathrm{e}^{2t}-1}\right)^k=k\binom{n}{k}2^{k-1}\sum_{j=0}^{k-1}\begin{bmatrix}k\\k-j\end{bmatrix}E_{n-1-j}(0)。$$

例 3 在引理 1 中取 $k=1,2,3,4$，可得

$$\begin{aligned}
G_n^{(1)}&=nE_{n-1}(0),\\
G_n^{(2)}&=2n(n-1)\left[E_{n-1}(0)+E_{n-2}(0)\right],\\
G_n^{(3)}&=2n(n-1)(n-2)\left[E_{n-1}(0)+3E_{n-2}(0)+2E_{n-3}(0)\right],\\
G_n^{(4)}&=\frac{4n(n-1)(n-2)(n-3)}{3}\left[E_{n-1}(0)+6E_{n-2}(0)+11E_{n-3}(0)+6E_{n-4}(0)\right].
\end{aligned}$$

下面考虑 l 个 Bernoulli 数与 $k-l$ 个 Genocchi 数的混合多重卷积。

定理 3 对于正整数 n,k,l，有以下恒等式成立：

$$\begin{aligned}
S_n^{(k)}(l,k-l)&:=\sum_{\substack{j_1+\cdots+j_k=n\\ j_1,\cdots,j_k\ge 0}}\binom{n}{j_1,\cdots,j_k}B_{j_1}\cdots B_{j_l}G_{j_{l+1}}\cdots G_{j_k}\\
&=\sum_{i=1}^{l}\left(-\frac{1}{2}\right)^{l-i}\frac{(n)_{k-i}\langle k-l\rangle_{l-i}}{(l-i)!}B_{n-k+i}^{(i)}+\left(-\frac{1}{2}\right)^{l}\sum_{j=1}^{k-l}\frac{(n)_{k-j}\langle l\rangle_{k-l-j}}{(k-l-j)!}G_{n-k+j}^{(j)},
\end{aligned}$$

其中，$(x)_n$ 为降阶乘，定义为 $(x)_0=1$，$(x)_n=x(x-1)\cdots(x-n+1)$，$n=1,2,\cdots$。

证明 根据 Bernoulli 数与 Genocchi 数的生成函数，定理 3 左边的生成函数可改写为

$$\left(\frac{t}{\mathrm{e}^t-1}\right)^l\left(\frac{2t}{\mathrm{e}^t+1}\right)^{k-l}=\frac{2^{k-l}t^k}{\left(\mathrm{e}^t-1\right)^l\left(\mathrm{e}^t+1\right)^{k-l}},\tag{11}$$

对上式进行部分分式展开，为简便起见，定义

$$f(z):=\frac{1}{(z-1)^l(z+1)^{k-l}}=\sum_{i=1}^{l}\frac{A_i}{(z-1)^i}+\sum_{j=1}^{k-l}\frac{B_j}{(z+1)^j},$$

其中 A_i 和 B_j 为待定系数，$i=1,\cdots,l$，$j=1,\cdots,k-l$。系数 A_i 满足

$$A_i=\frac{(-1)^{l-i}\langle k-l\rangle_{l-i}}{2^{k-i}(l-i)!},\quad f(z)-\sum_{s=i}^{l}\frac{A_s}{(z-1)^s}=\frac{1}{(z-1)^l(z+1)^{k-l}}\left[1+\sum_{\tau=0}^{l-i}(-1)^{\tau-1}\frac{\langle k-l\rangle_\tau}{\tau!}\left(\frac{z-1}{2}\right)^\tau\left(\frac{z+1}{2}\right)^{k-l}\right]。\tag{12}$$

可通过反向数学归纳法证明上式从 $i=l$ 到 $i=1$ 都成立。首先，系数 A_l 容易求得：

$$A_l=\lim_{z\to 1}(z-1)^l f(z)=\lim_{z\to 1}\frac{1}{(z+1)^{k-l}}=\frac{1}{2^{k-l}},$$

由此可得

$$f(z)-\frac{A_l}{(z-1)^l}=\frac{1}{(z-1)^l(z+1)^{k-l}}-\frac{1}{2^{k-l}(z-1)^l}=\frac{1}{(z-1)^l(z+1)^{k-l}}\left[1-\left(\frac{z+1}{2}\right)^{k-l}\right],$$

所以当 $i=l$ 时，(12)式成立。假设(12)式对 i 成立，根据归纳假设，可得 A_{i-1} 如下：

$$A_{i-1}=\lim_{z\to1}(z-1)^{i-1}\left[f(z)-\sum_{s=i}^{l}\frac{A_s}{(z-1)^s}\right]$$
$$=\lim_{z\to1}\frac{1}{(z-1)^{l-i+1}(z+1)^{k-l}}\left[(z+1)^{-k+l}+\sum_{\tau=0}^{l-i}(-1)^{\tau-1}\frac{\langle k-l\rangle_\tau}{\tau!}\left(\frac{z-1}{2}\right)^{\tau}\frac{1}{2^{k-l}}\right].$$

运用 $l-i+1$ 次洛必达法则可得

$$A_{i-1}=\frac{(-1)^{l-i+1}\langle k-l\rangle_{l-i+1}}{2^{k-i+1}(l-i+1)!},$$

由此得

$$f(z)-\sum_{s=i-1}^{l}\frac{A_s}{(z-1)^s}=\left[f(z)-\sum_{s=i}^{l}\frac{A_s}{(z-1)^s}\right]-\frac{A_{i-1}}{(z-1)^{i-1}}$$
$$=\frac{1}{(z-1)^l(z+1)^{k-l}}\left[1+\sum_{\tau=0}^{l-i+1}(-1)^{\tau-1}\frac{\langle k-l\rangle_\tau}{\tau!}\left(\frac{z-1}{2}\right)^{\tau}\left(\frac{z+1}{2}\right)^{k-l}\right].$$

所以(12)式对第 $i-1$ 项也成立。同理，也可验证系数 B_j 满足

$$B_j=(-1)^l\frac{\langle l\rangle_{k-l-j}}{2^{k-j}(k-l-j)!},\quad f(z)-\sum_{s=j}^{k-l}\frac{B_s}{(z+1)^s}=\frac{1-(-1)^l\sum_{\tau=0}^{k-l-j}\frac{\langle l\rangle_\tau}{\tau!}\left(\frac{z+1}{2}\right)^{\tau}\left(\frac{z-1}{2}\right)^{l}}{(z-1)^l(z+1)^{k-l}}。$$

由此，系数 A_i 与 B_j 都得到确定，则(11)式的生成函数进行部分分式展开后得到

$$\frac{2^{k-l}t^k}{(e^t-1)^l(e^t+1)^{k-l}}=\sum_{i=1}^{l}\left(-\frac{1}{2}\right)^{l-i}\frac{\langle k-l\rangle_{l-i}}{(l-i)!}\frac{t^k}{(e^t-1)^i}+\sum_{j=1}^{k-l}\left(-\frac{1}{2}\right)^{l}\frac{\langle l\rangle_{k-l-j}}{(k-l-j)!}\frac{2^jt^k}{(e^t+1)^j}。$$

利用生成函数(2)比较 $t^n/n!$ 的系数，即可得到所求恒等式。□

下面考虑定理 3 的一些特殊情况。当 $l=k$ 或 $l=0$ 时，由定理 3 可得(9)式和(10)式。当 $l=k-1$ 及 $l=1$ 时，有如下两个推论成立。

推论 1 对于正整数 $n\ge k\ge2$，可得以下恒等式：

$$S_n^{(k)}(k-1,1)=\sum_{\substack{j_1+\cdots+j_k=n\\ j_1,\cdots,j_k\ge0}}\binom{n}{j_1,\cdots,j_k}B_{j_1}\cdots B_{j_{k-1}}G_{j_k}=\sum_{i=1}^{k-1}\left(-\frac{1}{2}\right)^{k-1-i}(n)_{k-i}B_{n-k+i}^{(i)}+\left(-\frac{1}{2}\right)^{k-1}(n)_{k-1}G_{n-k+1}。$$

例 4 在推论 1 中取 $k=2,3,4$，结合(9)式和(10)式，可得

$$S_n^{(2)}(1,1)=\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}B_jG_{n-j}=nB_{n-1}-\frac{n}{2}G_{n-1},$$

$$S_n^{(3)}(2,1)=\sum_{j_1+j_2+j_3=n}\binom{n}{j_1,j_2,j_3}B_{j_1}B_{j_2}G_{j_3}=-n(n-2)B_{n-1}-\frac{3n(n-1)}{2}B_{n-2}+\frac{n(n-1)}{4}G_{n-2},$$

$$S_n^{(4)}(3,1)=\frac{n(n-2)(n-3)}{2}B_{n-1}+2n(n-1)(n-3)B_{n-2}+\frac{7n(n-1)(n-2)}{4}B_{n-3}-\frac{n(n-1)(n-2)}{8}G_{n-3}.$$

推论 2 对于正整数 $n\ge k\ge2$，可得以下恒等式：

$$S_n^{(k)}(1,k-1)=\sum_{\substack{j_1+\cdots+j_k=n\\ j_1,\cdots,j_k\ge 0}}\binom{n}{j_1,\cdots,j_k}B_{j_1}G_{j_2}\cdots G_{j_k}=(n)_{k-1}B_{n-k+1}-\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{k-1}(n)_{k-j}G_{n-k+j}^{(j)}\text{。}$$

例 5 在推论 2 中取 $k=2$ 可得 $S_n^{(2)}(1,1)$，取 $k=3,4$，并结合(9)式和(10)式，可得

$$S_n^{(3)}(1,2)=n(n-1)B_{n-2}-\frac{n(n-1)}{2}G_{n-2}+\frac{(n-1)(n-2)}{2}\left[E_{n-2}(0)+E_{n-3}(0)\right],$$

$$S_n^{(4)}(1,3)=n(n-1)(n-2)B_{n-3}-\frac{n(n-1)(n-2)}{2}G_{n-3}-(n)_4\left[E_{n-2}(0)+4E_{n-3}(0)+3E_{n-4}(0)\right].$$

例 6 除推论 1 和推论 2 外，由定理 3 还能求得一些其他的卷积恒等式，例如：

$$\begin{aligned}S_n^{(4)}(2,2)&=\sum_{\substack{j_1+\cdots+j_4=n\\ j_1,\cdots,j_4\ge 0}}\binom{n}{j_1,\cdots,j_4}B_{j_1}B_{j_2}G_{j_3}G_{j_4}\\&=-n(n-1)(n-3)B_{n-2}-2(n)_3B_{n-3}+\frac{(n)_3}{2}G_{n-3}+\frac{(n)_4}{2}\left[E_{n-2}(0)+E_{n-3}(0)\right],\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}S_n^{(5)}(2,3)&=\sum_{\substack{j_1+\cdots+j_5=n\\ j_1,\cdots,j_5\ge 0}}\binom{n}{j_1,\cdots,j_5}B_{j_1}B_{j_2}G_{j_3}G_{j_4}G_{j_5}\\&=-(n)_3(n-4)B_{n-3}-\frac{5(n)_4}{2}B_{n-4}+\frac{3(n)_4}{4}G_{n-4}+\frac{(n)_5}{2}\left[E_{n-3}(0)+5E_{n-4}(0)+4E_{n-5}(0)\right],\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}S_n^{(5)}(3,2)&=\sum_{\substack{j_1+\cdots+j_5=n\\ j_1,\cdots,j_5\ge 0}}\binom{n}{j_1,\cdots,j_5}B_{j_1}B_{j_2}B_{j_3}G_{j_4}G_{j_5}\\&=\frac{n(n-1)(n-3)(n-4)}{2}B_{n-2}+\frac{5(n)_3(n-4)}{2}B_{n-3}+\frac{11(n)_4}{4}B_{n-4}\\&\quad-\frac{3(n)_4}{8}G_{n-4}-\frac{(n)_5}{4}\left[E_{n-4}(0)+E_{n-5}(0)\right].\end{aligned}$$

注 乌云高娃[16]建立了高阶 Genocchi 数与高阶 Bernoulli 数的关系式：

$$G_n^{(k)}=k!\sum_{j=0}^{k-1}\binom{n}{j}\left\{\begin{matrix}j\\k\end{matrix}\right\}2^{n-j}B_{n-j}^{(k)}\text{，}\quad n\ge k\ge 1\text{，}$$

其中，$\left\{\begin{matrix}j\\k\end{matrix}\right\}$ 是第二类 Stirling 数。事实上，由生成函数(2)以及第二类 Stirling 数的生成函数

$$\frac{\left(\mathrm{e}^t-1\right)^k}{k!}=\sum_{n=k}^{\infty}\left\{\begin{matrix}n\\k\end{matrix}\right\}\frac{t^n}{n!},$$

可得

$$\sum_{n=0}^{\infty}G_n^{(k)}\frac{t^n}{n!}=\left(\frac{2t}{\mathrm{e}^t+1}\right)^k=k!\left(\frac{2t}{\mathrm{e}^{2t}-1}\right)^k\frac{\left(\mathrm{e}^t-1\right)^k}{k!}=k!\sum_{m=0}^{\infty}B_m^{(k)}\frac{(2t)^m}{m!}\sum_{m=k}^{\infty}\left\{\begin{matrix}m\\k\end{matrix}\right\}\frac{t^m}{m!}=k!\sum_{n=k}^{\infty}\sum_{j=k}^{n}\binom{n}{j}\left\{\begin{matrix}j\\k\end{matrix}\right\}2^{n-j}B_{n-j}^{(k)}\frac{t^n}{n!},$$

比较等式两边 $t^n/n!$ 的系数，即可得上式。结合引理 1，可进一步将以下含高阶 Bernoulli 数 $B_n^{(k)}$ 的和式用 Euler 数 $E_n(0)$ 表示：

$$\sum_{j=0}^{n}\binom{n+k}{j}\left\{\begin{matrix}n+k-j\\k\end{matrix}\right\}2^jB_j^{(k)}=\frac{2^{k-1}}{(k-1)!}\binom{n+k}{k}\sum_{j=0}^{k-1}\left[\begin{matrix}k\\k-j\end{matrix}\right]E_{n+k-1-j}(0)\text{，}\quad n\ge 0\text{，}\quad k\ge 1\text{，}$$

例如，当$k=1,2,3$时，可得

$$\sum_{j=0}^{n}\binom{n+1}{j}2^{j}B_{j}=(n+1)E_{n}(0),$$

$$\sum_{j=0}^{n}\binom{n+2}{j}\left\{\begin{matrix}n+2-j\\2\end{matrix}\right\}2^{j}B_{j}^{(2)}=(n+2)(n+1)\left[E_{n+1}(0)+E_{n}(0)\right],$$

$$\sum_{j=0}^{n}\binom{n+3}{j}\left\{\begin{matrix}n+3-j\\3\end{matrix}\right\}2^{j}B_{j}^{(3)}=\frac{(n+3)(n+2)(n+1)}{3}\left[E_{n+2}(0)+3E_{n+1}(0)+2E_{n}(0)\right].$$

4. 结论

本文利用生成函数方法及导子多项式的性质建立了三个 Bernoulli 数与 Euler 数多重卷积的递推关系，并通过参数特殊化得到一些恒等式，可以发现已有的一些恒等式，比如 Euler 恒等式以及文献[4]中的一些例子都是本文所得递推关系的特例。另外，本文利用部分分式展开法与生成函数方法建立了 Bernoulli 数与 Genocchi 数的混合多重卷积恒等式，并给出相关推论和例子。后续可以在此基础上进一步研究更多形式的含特殊组合序列的卷积公式。

致　谢

本文是在导师王伟平教授的精心指导下完成的，在此表示感谢！

基金项目

国家自然科学基金项目(11671360)；浙江省自然科学基金探索项目(LY22A010018)。

参考文献

[1] Agoh, T. and Dilcher, K. (2007) Convolution Identities and Lacunary Recurrences for Bernoulli Numbers. *Journal of Number Theory*, **124**, 105-122. https://doi.org/10.1016/j.jnt.2006.08.009

[2] Dilcher, K. (1996) Sums of Products of Bernoulli Numbers. *Journal of Number Theory*, **60**, 23-41. https://doi.org/10.1006/jnth.1996.0110

[3] Agoh, T. and Dilcher, K. (2009) Higher-Order Recurrences for Bernoulli Numbers. *Journal of Number Theory*, **129**, 1837-1847. https://doi.org/10.1016/j.jnt.2009.02.015

[4] Chu, W. and Wang, C. (2010) Convolution Formulae for Bernoulli Numbers. *Integral Transforms and Special Functions*, **21**, 437-457. https://doi.org/10.1080/10652460903360861

[5] Chu, W. (2020) Multiple Convolution Formulae of Bernoulli and Euler Numbers. *Indian Journal of Pure and Applied Mathematics*, **51**, 969-987. https://doi.org/10.1007/s13226-020-0444-2

[6] Wang, W. (2013) Some Results on Sums of Products of Bernoulli Polynomials and Euler Polynomials. *The Ramanujan Journal*, **32**, 159-184. https://doi.org/10.1007/s11139-012-9447-x

[7] 王慧，王伟平．关于两个(p，q)型 Fibonacci 多项式乘积的研究[J]．浙江理工大学学报(自然科学版)，2016，35(1)：145-149.

[8] Wang, W. and Xu, C. (2023) On Variants of the Euler Sums and Symmetric Extensions of the Kaneko-Tsumura Conjecture. *Revista de la Real Academia de Ciencias Exactas*, *Físicas y Naturales. Serie A. Matemáticas*, **117**, Article No. 84. https://doi.org/10.1007/s13398-023-01398-7

[9] Comtet, L. (1974) Advanced Combinatorics. The Art of Finite and Infinite Expansions. D. Reidel Publishing Co., Dordrecht.

[10] Gradshteyn, I.S. and Ryzhik, I.M. (2015) Table of Integrals, Series, and Products. Academic Press, Amsterdam.

[11] Andrews, G.E. and Berndt, B.C. (2012) Ramanujan's Lost Notebook. Part III. Springer, New York. https://doi.org/10.1007/978-1-4614-3810-6

[12] Hoffman, M.E. (1995) Derivative Polynomials for Tangent and Secant. *The American Mathematical Monthly*, **102**, 23-30. https://doi.org/10.1080/00029890.1995.11990528

[13] Boyadzhiev, K.N. (2007) Derivative Polynomials for Tanh, Tan, Sech and Sec in Explicit Form. *Fibonacci Quarerly.*, **45**, 291-303.

[14] Ma, S.M. (2012) Derivative Polynomials and Enumeration of Permutations by Number of Interior and Left Peaks. *Discrete Mathematics*, **312**, 405-412. https://doi.org/10.1016/j.disc.2011.10.003

[15] Dunne, G.V. and Schubert, C. (2013) Bernoulli Number Identities from Quantum Field Theory and Topological String Theory. *Communications in Number Theory and Physics*, **7**, 225-249. https://doi.org/10.4310/CNTP.2013.v7.n2.a1

[16] Wuyungaowa (2013) Identities on Products of Genocchi Numbers. *Journal of Inequalities and Applications*, **2013**, Article No. 422. https://doi.org/10.1186/1029-242X-2013-422