

数学文化融入数学课堂的教学设计

——以人教A版“等差数列求和”为例

高艳飞

扬州大学数学科学学院, 江苏 扬州

收稿日期: 2024年4月4日; 录用日期: 2024年5月3日; 发布日期: 2024年5月10日

摘要

当前的教育实践中, 将数学文化融入课堂教学已成为提升学生数学素养的关键途径。这不仅有助于激发学生对数学的兴趣, 还能够加深他们对数学知识的深层次理解。然而, 现实课堂教学在融入中华优秀传统文化时常存在材料选择不当、数学教学与生活实际脱节等问题, 导致学生无法领略数学文化的魅力。本文以等差数列前 n 项和公式教学设计为例, 探讨如何在数列教学中融入数学史、数学美等元素, 帮助学生深化对数列本质的理解。

关键词

数学文化, 等差数列前 n 项和, 数学教学

Teaching Design of Integrating Mathematics Culture into Mathematics Classroom

—Taking the “Sum of Arithmetic Sequences” Version A of People’s Education as an Example

Yanfei Gao

College of Mathematical Science, Yangzhou University, Yangzhou Jiangsu

Received: Apr. 4th, 2024; accepted: May 3rd, 2024; published: May 10th, 2024

Abstract

In current educational practice, integrating mathematics culture into classroom teaching has become a key way to improve students’ mathematical literacy. This not only helps stimulate students’

文章引用: 高艳飞. 数学文化融入数学课堂的教学设计[J]. 教育进展, 2024, 14(5): 113-119.

DOI: 10.12677/ae.2024.145664

interest in mathematics, but also deepens their in-depth understanding of mathematical knowledge. However, when real-life classroom teaching is integrated into the excellent traditional Chinese culture, there are often problems such as improper selection of materials and disconnection between mathematics teaching and real life, resulting in students being unable to appreciate the cultural charm of mathematics knowledge. This article takes the teaching design of the first term and formula of arithmetic sequence as an example to explore how to incorporate elements of mathematical history, mathematical beauty and other elements into the teaching of sequence to help students deepen their understanding of the nature of the sequence.

Keywords

Mathematical Culture, The Sum of the First n Terms of an Arithmetic Sequence, Mathematics Teaching

Copyright © 2024 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 研究背景

在全球化和多元文化背景下，数学教育的目标不再局限于传授计算技能和解决实际问题，而是扩展到了培养学生的数学素养，包括数学的思维方式、数学的审美情趣以及对数学文化价值的认识。《普通高中数学课程标准》明确提出了数学教学应融入数学文化的理念，强调通过数学文化的教学活动，引导学生理解数学知识的发展脉络，感受数学的科学价值、应用价值、文化价值和审美价值[1]。这一理念的提出，反映了教育部门对数学教育深层次目标的追求以及对于学生全面发展的重视。因此，数学文化的融入不仅响应了当前教育改革的趋势，也为数学教学提供了更为丰富和立体的视角。通过深入研究和实践，教育工作者可以更好地理解和运用数学文化资源，为学生提供一个更加生动、有趣和富有启发性的数学学习环境。

2. 数学文化在课堂教学中的实践与探索

2.1. 数学文化融入数学课堂的现状

人教 A 版高中数学教材通过“阅读与思考”“数学探究”“探究”以及“复习参考题”等板块，呈现了丰富的中华优秀传统文化内容，包括重要的古代数学人物以及数学知识的历史演进。这种编排设计有助于学生深入了解中国古代数学的伟大成就，为他们进行学习探究提供了引导和研究思路(如表 1)。

然而，在教学实践中，与数学教育界呼吁将数学文化理念融入数学教学实践的积极态度形成对比，中小学数学一线教师对数学文化的认知更多地表现为困惑。例如在众多史料中选择恰当的材料、针对不同的课题和教学环节选择合适的融入方式和方法等。这些问题值得深入思考。

2.2. 教学目标及重难点解析

本节课旨在通过数学史案例或故事，引导学生深入探索等差数列概念的渊源、发展历程及相关数学家的贡献，以丰富学生对数学文化的认识。本节课的教学重点在于引导学生初步掌握等差数列前项和公式的推导过程，以及深入理解其数学史背后所蕴含的思想与方法。而教学难点则在于学生对等差数列前项的推导过程可能存在挑战，需要在教学过程中进行深入解释与引导。

Table 1. Correlation table between ancient wisdom and modern knowledge in mathematics textbooks**表 1.** 数学教材中的古代智慧与现代知识关联表

教材	板块	内容	知识关联
必修 1	探究	赵爽弦图	不等式的证明
必修 1	阅读与思考	《九章算术》《数书九章》	解方程
必修 1	问题	《农政全书》中筒车的工作原理	三角函数
必修 2	阅读与思考	《数书九章》中的“三斜求积”	三角函数
必修 2	探究与发现	祖暅原理	立方体体积
选择性必修 2	课前导入	《庄子·天下》	等比数列的定义
选择性必修 2	阅读与思考	中国古代数学家求数列和的方法	数列求和
选择性必修 2	复习参考题	《算法统宗》中的等比数列问题	等比数列求和
选择性必修 3	数学探究	杨辉三角的性质与应用	数列, 组合数

2.3. 古代数学家求数列和的方法

公元前 1800 年, 古埃及的“加罕纸草书”记载了等差数列的求和问题; 17 世纪代数符号普及之后, 数列求和问题逐渐形成了现代分析学的一个分支——级数理论。中国魏晋时期的数学家刘徽在为《九章算术》所做的注文中给出了等差数列的求和公式; 北宋的数学家沈括发展了自《九章算术》以来对等差数列问题的研究, 开创了我国“垛积术”的研究; 南宋数学家杨辉在《祥解九章算法·商功》中将堆垛与相应立体图形作类比, 推导出了三角垛、方垛等公式[2]。

3. 教学过程

3.1. 在创设情境时融合数学文化

问题 1: 趣味三角形数, 毕达哥拉斯派认为数是万物的本源, 他们把图 1 趣味三角形数的 1、3、6、10……这样的数叫做三角形数。按照这样的规律, 第 100 个图形表示的几?

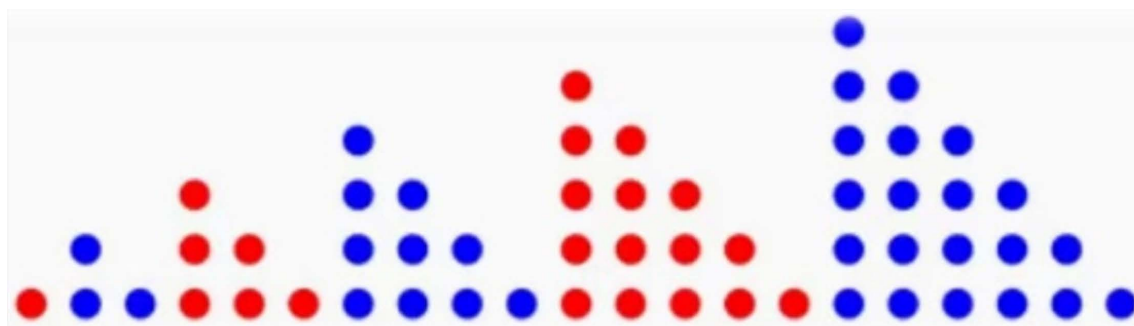


Figure 1. Interesting triangle numbers

图 1. 趣味三角形数

问题 2: 图 2 为古印度的泰姬陵, 相传当时在这个建筑中有一个特殊的三角形, 它是由 100 层宝石堆砌而成的。思考: 堆砌这个三角形需要多少宝石?

设计意图: 通过毕达哥拉斯故事、泰姬陵的传说, 激发学生学习兴趣, 拉近数学与现实生活之间的距离, 将数学文化渗透在教学中, 从而引出了今天要学习的主要内容。

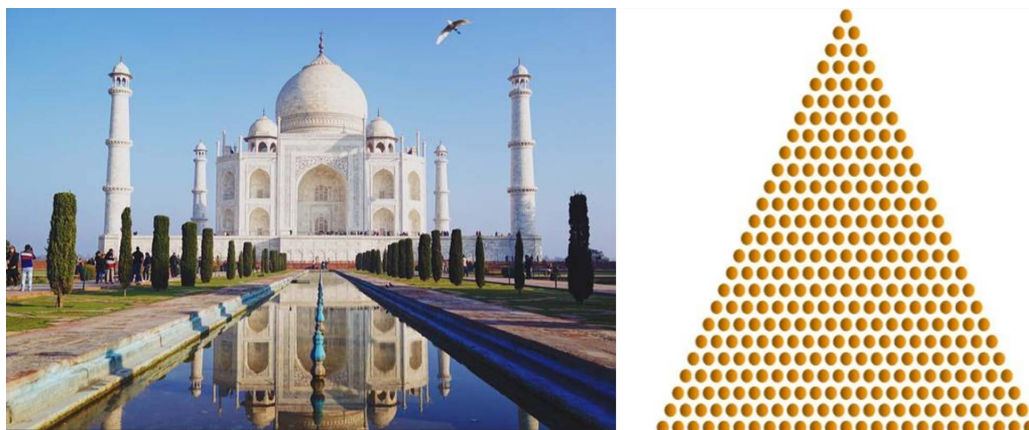


Figure 2. Plan of the Taj Mahal in ancient India
图 2. 古印度泰姬陵平面图

3.2. 在探究新知时融入数学文化

情境 1

师：观察图 3，同学们有何发现，请用数式表示？

生： $1+2+3+4+\dots+21=21+20+19+\dots+1$

$$1+21=2+20=3+19=\dots=21+1$$

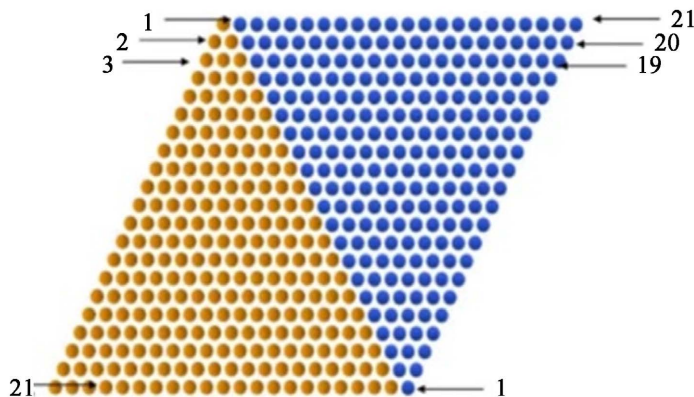


Figure 3. Increasing digital sequence diagram
图 3. 递增数字序列图

设计意图：通过向学生展示图片及相应的数学表达式，引导学生初步了解倒序相加法，为深入探究相关公式打下基础。

情境 2

师：讲述小故事关于高斯的小故事。高斯是德国著名数学家，与阿基米德、牛顿齐名，被誉为“数学王子”。10岁时，高斯的老师给出了一道题：“ $1+2+3+4+\dots+99+100=?$ ”

过了两分钟，正当大家在： $1+2=3, 3+3=6, \dots$ 算时，高斯站起来回答说： $1+2+\dots+99+100=5050$ 。老师问他是如何计算的，他回答说： $1+100=101; 2+99=101; \dots; 50+51=101$ 所以 $101 \times 50 = 5050$ 。

问题 1：你能发现高斯是如何算的？

问题 2：你能用高斯的方法计算 $1+2+3+4+\dots+99+100+101=?$

设计意图：让学生对对称性和配对思想有所感悟，将高斯算法从 $1+2+3+4+\cdots+99+100$ 推广到 $1+2+3+4+\cdots+99+100+101$ ，引导学生发现它们之间的不同：当项数为偶数时更方便计算，当项数为奇数时多了一个中间项，这导致计算等差数列的前 n 项和时需要讨论项数分奇、偶数进行讨论。

问题3：思考 $1+2+3+4+\cdots+99+100+101+\cdots+n=?$

师生活动：

当 n 为偶数时：由 $a_1+a_n=a_2+a_{n-1}=\cdots=a_{\frac{n}{2}}+a_{\frac{n}{2}+1}$ ，故

$$\begin{aligned} S_n &= 1+2+3+\cdots+101+\cdots+n \\ &= (1+n)+[2+(n-1)]+\left[\frac{n}{2}+\left(\frac{n}{2}+1\right)\right] \\ &= (1+n)+(1+n)+\cdots+(1+n) \\ &= \frac{n}{2}(n+1) \end{aligned}$$

当 n 为奇数时：由 $a_1+a_n=a_2+a_{n-1}=\cdots=a_{\frac{n}{2}}+a_{\frac{n}{2}+1}$ ，故

$$\begin{aligned} S_n &= 1+2+3+\cdots+101+\cdots+n \\ &= (1+n)+[2+(n-1)]+\left[\left(\frac{n+1}{2}-1\right)+\left(\frac{n+1}{2}+1\right)\right]+\frac{n+1}{2} \\ &= (1+n)+(1+n)+\cdots+\frac{n+1}{2} \\ &= \frac{n-1}{2}(n+1)+\frac{n+1}{2} \\ &= \frac{n}{2}(n+1) \end{aligned}$$

故对任何正整数 n ，都有 $S_n=1+2+3+\cdots+101+\cdots+n=\frac{n}{2}(n+1)$

问题4：在求前 n 个正整数的和时，要对 n 分奇数、偶数进行讨论，能否避免分类讨论？

师生活动：教师引导学生对公式 $S_n=1+2+3+\cdots+101+\cdots+n=\frac{n}{2}(n+1)$ 作变形，可得

$2S_n=2(1+2+3+\cdots+101+\cdots+n)=n(n+1)$ ，它相当于两个 S_n 相加，而结果变成 n 个 $(n+1)$ 相加。教师继续引导学生前 n 项和也可写为 $S_n=n+(n-1)+(n-2)+\cdots+1$ ；又 $S_n=1+2+3+\cdots+101+\cdots+n$ 。

两个 S_n 相加可得 $2S_n=(n+1)+[(n-1)+2]+\cdots+(n+1)=n(n+1)$ ，故 $S_n=\frac{n}{2}(n+1)$ 。

可以发现上述方法妙处在于将 $1+2+3+\cdots$ “倒序” $n+(n-1)+(n-2)+\cdots+1$ ，再通过倒序相加，将原式求和问题转化为 n 个 $(n+1)$ 的和，避免了奇偶项的讨论。

问题5：设等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n ，即 $S_n=a_1+a_2+\cdots+a_n$ ；求 S_n ？

师生活动：对于等差数列，有 $a_1+a_n=a_2+a_{n-1}=\cdots=a_n+a_1$ ；根据上述的高斯算法，我们可以得到

$$\begin{aligned} S_n &= a_1+a_2+\cdots+a_n \\ S_n &= a_n+a_{n-1}+\cdots+a_1 \\ 2S_n &= (a_1+a_n)+(a_2+a_{n-1})+\cdots+(a_n+a_1) \\ &= (a_1+a_n)+(a_1+a_n)+\cdots+(a_1+a_n) \\ &= n(a_1+a_n) \end{aligned}$$

故等差数列的前 n 项和为 $S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2}$ 。对于等差数列 $\{a_n\}$ ，若已知首项 a_1 和公差 d ，把等差数列的通项公式 $a_n = a_1 + (n-1)d$ 代入公式 $S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2}$ ，可得 $S_n = na_n + \frac{(n-1)n}{2}d$ 。

3.3. 在巩固练习时融入数学文化

问题 1 “天数一三五七九，地数二四六八十，积五十五”你会算吗？(选自《续古摘奇算法卷上》)

此题中古人的算法为“并上下数共一十一，以高数十乘之，得百一十，折半得五十五，为天地之数”。一三五七九是天数(也就是奇数，或者天奇数)，二四六八十是地数(也就是偶数，或者地偶数)，天数 5 个，地数 5 个。现代教学中，教师在介绍古人算法的同时，需引导学生用数列的观点，把这 10 个数重新排序为：1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10，转化为等差数列的求和问题。

问题 2 今有女不善织，日减功迟。初日织五尺，末日织一尺，今三十日织讫，问织几何？(选自《张丘建算经》)

此题中张丘建的解法为：“末日织尺数，半之，余以乘织讫日数”。张丘建的方法体现了古代中国数学家对数学问题的深刻洞察和创造性解决问题的能力。突显了古代中国数学研究的悠久历史和重要地位，为我们更深入地了解数学在古代东方文化中的发展贡献了重要见解[3]。

设计意图：以数学史中的素材，典籍中的一些问题作为等差数列前 n 项和的练习题，容易把学生带到等差数列求和的情境中，使学生由直观感知到数学抽象，引导学生用数学的眼光看待问题，既实现了知识巩固与数学文化教育的双重目标，又突显数学在文化领域中的价值与作用。

4. 教学反思

4.1. 识别学生现有的数学文化背景

识别学生现有的数学文化背景是促进数学文化融入课堂的重要一环。首先，教师需要关注学生在数学学习中的态度和表现，了解他们对数学的兴趣和认知水平。通过观察学生在课堂上的互动和参与程度，可以初步了解他们的数学文化背景。其次，教师可以利用课堂调查或问卷调查的方式，收集学生对数学的看法、数学学习的习惯以及数学文化传统的了解程度。通过这些调查结果，教师能够更全面地了解学生的数学文化背景，为课堂教学提供指导和参考。另外，教师可以鼓励学生分享自己的数学文化体验，例如数学家故事、数学成就、传统数学游戏等，从而进一步深入了解学生的数学文化背景。

4.2. 强化教学内容的文化敏感性

强化教学内容的文化敏感性是解决数学文化融入课堂问题的重要举措之一。在教学反思中，教师需要认识到教学内容的文化适应性对学生的意义。首先，教师应该审视教材和课程设置，确保其中融入了丰富多样的数学文化元素，涵盖不同文化背景学生的需求和兴趣。其次，教师需要对数学知识进行文化解读，让学生了解数学与不同文化之间的联系和意义，从而增强学生的文化认同感和学习兴趣。此外，教师还可以引导学生探索不同文化背景下的数学问题和应用，促进跨文化交流和理解。

4.3. 探索合适的数学文化融入策略

在解决数学文化融入数学课堂存在的问题时，探索合适的文化融入策略至关重要。首先，教师需要深入了解学生的文化背景和数学学习需求。其次，教师应该研究并尝试各种文化融入策略，包括引入来自不同文化背景的数学问题和故事、设计符合学生文化背景的数学活动等。教师可以通过文化主题的数学游戏、数学节庆活动等方式，激发学生的兴趣和参与度。另外，教师还可以利用多媒体技术和互动式

教学手段,打破文化和语言的障碍,提高学生的学习效果。通过不断地探索和反思,教师可以找到最适合学生的文化融入策略,从而提高数学文化融入课堂的效果,促进学生对数学的兴趣和理解[4]。

5. 小结

本文旨在通过深入分析人教 A 版高中数学教材中数学文化的融入现状,探讨在数学课堂中如何有效地整合数学文化元素,以提升学生的数学素养。文中以等差数列前 n 项和公式的教学设计为案例,详细阐述了在教学过程中如何巧妙地融入数学史和数学美等,从而帮助学生深化对数列概念的理解。通过古代数学家求和方法的介绍、生动的教学情境创设、以及富有启发性的探究活动,展示了数学文化与数学教学相结合的有效途径。此外,本文还提出了识别学生数学文化背景、强化教学内容的文化敏感性、以及探索合适融入策略等教学反思点,为数学教育工作者提供了实践指导和思考方向。通过这些策略的实施,教师不仅能激发学生的学习兴趣,还能促进他们对数学知识的深层次理解和文化价值的认同。

参考文献

- [1] 中华人民共和国教育部. 普通高中数学课程标准(2017 年版) [S]. 北京: 人民教育出版社, 2018.
- [2] 章建锋. 人教 A 版新教材中“阅读材料”的内容分析与教学思考[J]. 中学数学教学参考, 2023(1): 38-41.
- [3] 张国林, 邵书静. 数学文化之中国古代对等差数列的研究[J]. 中学生数理化(教与学), 2020(4): 85.
- [4] 李虹. 浅谈数学文化融入初中数学课堂教学的实践研究[J]. 数学学习与研究, 2023(18): 39-41.