

勒让德曲线的曲率型几何不等式

赵艳雯

大连海事大学理学院, 辽宁 大连

收稿日期: 2024年3月4日; 录用日期: 2024年3月29日; 发布日期: 2024年5月11日

摘要

本文主要研究勒让德曲线的曲率型几何不等式的两类加强形式, 在Hausdorff距离和 L_2 度量意义下, 分别得到勒让德曲线的一个曲率型几何不等式的稳定性。此外, L_2 度量意义下的结果回答了Li和Wang提出的一个问题。

关键词

勒让德曲线, 曲率对, 几何不等式

Curvature-Type Geometric Inequalities of Legendre Curves

Yanwen Zhao

College of Science, Dalian Maritime University, Dalian Liaoning

Received: Mar. 4th, 2024; accepted: Mar. 29th, 2024; published: May 11th, 2024

Abstract

This article investigates two stronger versions of a curvature-type inequality of Legendre curves. With the help of the Hausdorff distance and the L_2 metric, the stability of a curvature-type inequality of Legendre curves are concluded. Moreover, the result under the L_2 metric gives a positive answer to the question appeared by Li and Wang.

Keywords

Legendre Curves, Curvature-Type Pair, Geometric Inequalities

Copyright © 2024 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言及主要结果

在微分几何领域，与平面正则曲线不同，带有奇性的曲线在奇点处无法构建传统的 Frenet 标架，这对该类曲线的研究带来了挑战。20 世纪 30 年代，Morse 首次探索了奇点理论，而后有许多学者对其进行了深入研究和完善，取得了显著进展。受到 Arnold 提出的勒让德流形概念的启发，研究者们将这一概念与奇点理论相结合，发展出了勒让德奇点理论，这一理论在子流形奇异点的研究中发挥了重要作用。近年来，日本学者 Fukunaga 和 Takahashi 等人对可能包含奇异点的勒让德曲线进行了深入探讨。勒让德曲线是严格凸曲线的一种扩展，即便存在奇异点，也总能找到一个明确定义的单位法向量场，这使得在奇异点处能够构建相应的活动标架，并且定义曲率对。这对我们理解和研究一般常规平面曲线的渐屈线问题提供了极大的帮助，同时在力学、医学等领域也显示出了它的重要性。近期，李恩泽和裴东河[1]对这类曲线展开了进一步研究，他们建立了球面 Legendre 曲线与平面 Legendre 曲线对应的广义包络之间的关系，并引入了球面勒让德曲线的渐开线和渐屈线的概念。Li 和 Wang [2]推广了勒让德曲线的逆曲率曲线流，并证明了在进行重尺度化处理后，该曲线流总是会收敛到一个紧致的孤子解。这些研究成果不仅丰富了微分几何的理论，也为相关领域的应用提供了新的视角和工具。

几何不等式与等周问题、特征值估计等密切相关，是泛函分析、微分方程、微分几何等学科之间的重要纽带。在诸多几何不等式中，最为著名的当属经典的等周不等式。经典的等周不等式表明等周问题有唯一解，即在所有的平面简单曲线中，圆周所围的单连通区域面积最大。讨论不同几何不等式的加强形式，受到国内外许多学者的关注，可参见文献[3] [4] [5]。

曲率型不等式作为几何不等式中的重要一类，20 世纪 80 年代以来的曲线演化问题相关研究中起到了重要作用。1983 年，Gage [6]首次证明了一个含有曲率平方积分的几何不等式(现称为 Gage 不等式)。Gage 不等式在验证曲线收缩流[7]的渐近行为过程中起到关键作用。为了研究一类平面保长度曲率流，潘生亮和杨娟娜[7]得到了一个含有曲率倒数平方积分的几何不等式。曲率型不等式在许多平面曲线演化问题的研究中不仅能够用来判定演化曲线的长度或所围区域面积的单调性，而且在讨论演化问题的渐近行为过程中特别重要，可参见文献[8] [9]。在文献[10]中，作者利用一类保长度曲线流得到文献[8]中不等式的加强形式，并得到了反向等周不等式猜想的一个新证明。

基于平面凸曲线几何不等式的相关工作，Li 和 Wang [2]也探讨了一类可能带有奇性的曲线(称为 ℓ -凸勒让德曲线)的几何不等式。对 ℓ -凸勒让德曲线 γ ，他们得到一个曲率型几何不等式

$$\Delta := \frac{1}{12} \int_{S^1} \beta^2 d\theta - 2 \left(\frac{L^2}{4\pi} - A \right) \geq 0, \quad (1.1)$$

其中 L 和 A 分别是 γ 的代数长度和代数面积， β 是关于支撑函数 p 的一个光滑函数，“ \cdot ”表示 β 关于法向角 θ 的一阶导数，且式(1.1)等号成立当且仅当 γ 是一条星形线(参见图 1)的平行曲线。在文献[2]，作者通过傅里叶级数的方法，建立了 ℓ -凸勒让德曲线的一些几何不等式，例如等周不等式、Green-Osher 不等式等。这些几何不等式可以看作平面凸曲线的几何不等式的推广。针对式(1.1)，他们还提出如下问题：

问题 1.1 当 Δ 趋于 0 时， γ 会接近于一个星形线的平行曲线吗？

问题 1.1 本质上是关于式(1.1)的稳定性问题。对平面凸曲线的几何不等式稳定性问题的讨论，可参见文献[3] [4] [5]。本文主要通过建立式(1.1)的一般形式，从而给出问题 1.1 的肯定回答。

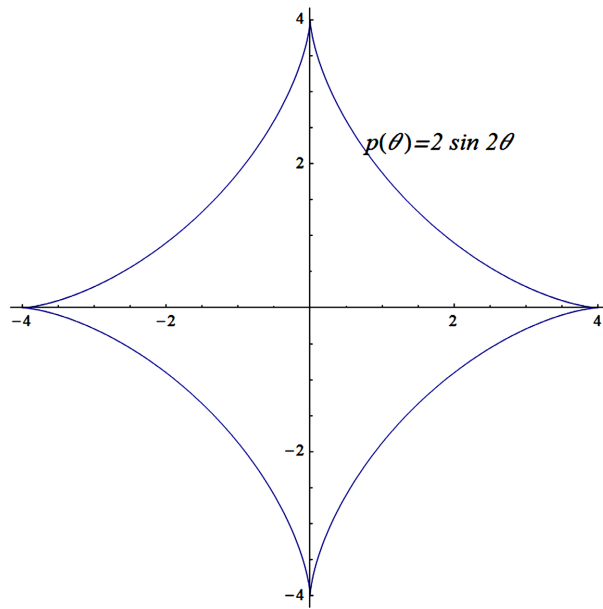


Figure 1. The astroid with support function $p(\theta) = 2 \sin 2\theta$

图 1. 支撑函数为 $p(\theta) = 2 \sin 2\theta$ 的星形线

用 $\beta^{(i)}$ 表示 β 的第 i 阶导数, 本文得到的主要结果如下:

定理 1.1 设 γ 是一条 ℓ -凸勒让德曲线, 其代数长度为 L , 代数面积为 A 。若 $\tilde{\gamma}$ 是与 γ 相关的星形线, 则

$$\int_{S^1} (\beta^{(i)})^2 d\theta \geq \begin{cases} 2A + 8\left(\frac{L^2}{4\pi} - A\right) + 40h_2(\gamma, \tilde{\gamma})^2, & i = 0, \\ B(i)\left(\frac{L^2}{4\pi} - A\right) + C(i)\pi h_2(\gamma, \tilde{\gamma})^2, & i \geq 1, \end{cases} \quad (1.2)$$

其中 $B(i) = 3 \cdot 2^{2i+1}$ 和 $C(i) = 8(8 \cdot 3^{2i} - 3 \cdot 2^{2i})$, 其中 $i \geq 1$, $h_2(\gamma, \tilde{\gamma})$ 是曲线 γ 和 $\tilde{\gamma}$ 之间的 L_2 度量, 且式(1.2)中等号成立当且仅当 γ 的支撑函数为

$$p(\theta) = a_0 + a_1 \cos \theta + b_1 \sin \theta + a_2 \cos 2\theta + b_2 \sin 2\theta.$$

定理 1.1 给出了在 L_2 度量下, 式(1.1)的一般化加强形式。作为定理 1.1 的应用, 我们可以回答问题 1.1, 即: 取 $i = 1$, 当 Δ 趋于 0 时, ℓ -凸勒让德曲线 γ 接近于一个星形线的平行曲线。若初始曲线为凸曲线, 当 $i = 0$ 时, 式(1.2)即为文献[9]中式(18)的加强形式。

定理 1.2 设 γ 是一条 ℓ -凸勒让德曲线, 其代数长度为 L , 代数面积为 A 。若 $\tilde{\gamma}$ 是与 γ 相关的星形线, 则

$$\int_{S^1} (\beta^{(i)})^2 d\theta \geq \begin{cases} 2A + 8\left(\frac{L^2}{4\pi} - A\right) + \frac{144\pi}{5} h_1(\gamma, \tilde{\gamma})^2, & i = 0, \\ B(i)\left(\frac{L^2}{4\pi} - A\right) + D(i)\pi h_1(\gamma, \tilde{\gamma})^2, & i \geq 1, \end{cases} \quad (1.3)$$

其中 $B(i) = 3 \cdot 2^{2i+1}$ 和 $D(i) = \frac{12}{5}(8 \cdot 3^{2i} - 3 \cdot 2^{2i})$, 其中 $i \geq 1$, $h_1(\gamma, \tilde{\gamma})$ 是曲线 γ 和 $\tilde{\gamma}$ 之间的 Hausdorff 距离。

定理 1.2 给出了在 Hausdorff 距离下, 式(1.1)的一般化加强形式。

本文的结构安排如下:

本文分成三个部分, 第一部分为引言和主要结果, 该部分主要介绍本文的研究目的和主要结论; 第二部分是预备知识, 该部分主要介绍 ℓ -凸勒让德曲线的相关概念; 第三部分为主要结果的证明, 该部分利用文献[4]和[5]中的技巧给出本文重要定理的证明。

2. 预备知识

设 $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^2$ 是一条勒让德曲线, 如果存在一个单位法向量 $\nu: I \rightarrow \mathbb{S}^1$ 满足

$$\langle \gamma'(\theta), \nu(\theta) \rangle = 0, \quad \forall \theta \in I,$$

其中 $\gamma'(\theta) = \frac{d\gamma}{d\theta}$ 和 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ 表示内积。当向量场 ν 光滑时, 这类特殊的勒让德曲线[10]被称为 frontal。

若 γ 是一个 frontal, 标架 $\{\nu(\theta), \mu(\theta)\}$ 是 \mathbb{R}^2 上沿着曲线 $\gamma(\theta)$ 的活动标架场, 其中 $\mu(\theta) = J(\nu(\theta))$, J 表示在 \mathbb{R}^2 上逆时针旋转 $\frac{\pi}{2}$ 。故 γ 的 Frenet 标架为

$$\begin{pmatrix} \nu'(\theta) \\ \mu'(\theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \ell(\theta) \\ -\ell(\theta) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu(\theta) \\ \mu(\theta) \end{pmatrix},$$

其中 $\ell(\theta) = \langle \nu'(\theta), \mu(\theta) \rangle$, 并且存在一个光滑函数 β , 使得

$$\gamma'(\theta) = \beta(\theta)\mu(\theta).$$

因此, 曲线 γ 是正则曲线当且仅当 β 处处非零。数对 (ℓ, β) 是勒让德曲线的一个重要不变量, 通常称为勒让德曲线的曲率对。通过直接的计算可得勒让德曲线的曲率 κ 与 β 之间的关系[11]是

$$\kappa = \frac{\ell}{|\beta|}.$$

容易看出, 在一条勒让德曲线上, $\beta = 0$ 表示该曲线的奇点。此外, 如果 ℓ 和 β 的符号保持一致, 则该勒让德曲线是一条平面凸曲线, 反之亦然[12]。因此, 勒让德曲线可看作是平面凸曲线的一类扩展。当 $\ell > 0$ 时, 称为 ℓ -凸勒让德曲线。文献[2]中指出, 通过重新参数化可将勒让德曲线转换为 $\ell = 1$ 的曲线。不失一般性, 下文中只考虑 $\ell = 1$ 的勒让德曲线。

设 $\gamma: \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{R}^2$ 是一条 $\ell = 1$ 的 ℓ -凸勒让德曲线。根据文献[2]中的引理 3.3 可知, 曲线 γ 可被表示为

$$\gamma(\theta) = p(\theta)(\cos \theta, \sin \theta) + p'(\theta)(-\sin \theta, \cos \theta),$$

其中 $(\cos \theta, \sin \theta)$ 表示 \mathbb{S}^1 上的单位法向量 ν 。函数 $p(\theta)$ 与凸曲线的支撑函数的作用相同, 在文献[2]中也称为 ℓ -凸勒让德曲线 γ 的支撑函数。若对任意 $\theta \in \mathbb{S}^1$, 均有 $p(\theta) > 0$ 且 $p(\theta) + p''(\theta) > 0$, 则 γ 变成一条平面凸曲线。由文献[2]的注 3.5, 则有

$$\beta(\theta) = p(\theta) + p''(\theta). \quad (2.1)$$

类似于平面凸曲线, γ 的代数长度 L 和代数面积 A 可被定义为

$$L = \int_{\mathbb{S}^1} (p(\theta) + p''(\theta)) d\theta = \int_{\mathbb{S}^1} p(\theta) d\theta, \quad (2.2)$$

$$A = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{S}^1} p(\theta)(p(\theta) + p''(\theta)) d\theta. \quad (2.3)$$

值得注意的是, 用 $-p$ 替换 p 只会改变 L 的符号, 而 A 的符号保持不变。因此, 只需关注 $L \geq 0$ 的 ℓ -

凸勒让德曲线。需要强调的是，一条勒让德曲线的代数面积 A 可能是正值、负值和零。

若考虑 ℓ -凸勒让德曲线 γ ，其支撑函数为

$$p(\theta) = a_0 + \sum_{k \geq 1} (a_k \cos k\theta + b_k \sin k\theta), \quad (2.4)$$

使用分部积分和 Parseval 恒等式，根据式(2.2)和式(2.3)，可得

$$L = 2\pi a_0, \quad (2.5)$$

$$A = \pi a_0^2 + \frac{\pi}{2} \sum_{k \geq 2} (1 - k^2) (a_k^2 + b_k^2), \quad (2.6)$$

式(2.6)中的系数 a_1 和 b_1 对确定曲线 γ 的位置十分重要意义，对平面凸曲线而言，点 (a_1, b_1) 通常被称为 Steiner 点。

设 ℓ -凸勒让德曲线 γ_1 和 γ_2 的支撑函数分别为 $p_1(\theta)$ 和 $p_2(\theta)$ ，常用于度量 γ_1 和 γ_2 之间偏差的函数是 Hausdorff 距离

$$h_1(\gamma_1, \gamma_2) = \max_{\theta} |p_1(\theta) - p_2(\theta)|$$

和 L_2 度量

$$h_2(\gamma_1, \gamma_2) = \left(\int_{\mathbb{S}^1} |p_1(\theta) - p_2(\theta)|^2 d\theta \right)^{\frac{1}{2}}.$$

如果 ℓ -凸勒让德曲线 γ 的支撑函数为具有(2.4)中的形式， ℓ -凸勒让德曲线 $\tilde{\gamma}$ 的支撑函数为

$$\tilde{p}(\theta) = a_0 + a_1 \cos \theta + b_1 \sin \theta + a_2 \cos 2\theta + b_2 \sin 2\theta.$$

那么称 $\tilde{\gamma}$ 为与 γ 相关的星形线。

因为

$$|p(\theta) - \tilde{p}(\theta)| = \left| \sum_{k \geq 3} (a_k \cos k\theta + b_k \sin k\theta) \right| \leq \sum_{k \geq 3} |a_k \cos k\theta + b_k \sin k\theta|,$$

故有

$$h_2(\gamma, \tilde{\gamma})^2 = \sum_{k \geq 3} \pi (a_k^2 + b_k^2) \quad (2.7)$$

和

$$h_1(\gamma, \tilde{\gamma}) \leq \sum_{k \geq 3} \sqrt{a_k^2 + b_k^2}. \quad (2.8)$$

3. 主要结果的证明

定理 1.1 的证明 设 $p^{(i)}$ 是 p 的 i 阶导数，根据式(2.1)可得

$$\beta^{(i)} = p^{(i)} + p^{(i+2)}.$$

通过分部积分可得

$$\int_{\mathbb{S}^1} (\beta^{(i)})^2 d\theta = \int_{\mathbb{S}^1} (p^{(i)})^2 d\theta + \int_{\mathbb{S}^1} (p^{(i+2)})^2 d\theta - 2 \int_{\mathbb{S}^1} (p^{(i+1)})^2 d\theta.$$

当 $i \geq 1$ 时，对式(2.4)两边求 i 阶导数可得

$$p^{(i)}(\theta) = \sum_{k \geq 1} k^i \left(a_k \cos \left(k\theta + \frac{i\pi}{2} \right) + b_k \sin \left(k\theta + \frac{i\pi}{2} \right) \right).$$

根据 Parseval 恒等式, 可得

$$\int_{\mathbb{S}^1} (p^{(i)})^2 d\theta = \begin{cases} 2\pi a_0^2 + \pi \sum_{k \geq 1} (a_k^2 + b_k^2), & i = 0, \\ \pi \sum_{k \geq 1} k^{2i} (a_k^2 + b_k^2), & i \geq 1. \end{cases} \quad (3.1)$$

当 $i=0$ 时, 由式(2.5)、式(2.6)、式(2.7)和式(3.1), 可知

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{S}^1} \beta^2 d\theta - 2A - 8 \left(\frac{L^2}{4\pi} - A \right) &= \pi \sum_{k \geq 3} (k^2 - 1)(k^2 - 4)(a_k^2 + b_k^2) \\ &\geq 40\pi \sum_{k \geq 3} (a_k^2 + b_k^2) = 40h_2(\gamma, \tilde{\gamma})^2, \end{aligned} \quad (3.2)$$

上式等号成立当且仅当 $k \geq 3$ 时, 均有 $a_k = b_k = 0$ 。

同理, 根据 Parseval 恒等式, 可得

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{S}^1} (\beta^{(i)})^2 d\theta - B(i) \left(\frac{L^2}{4\pi} - A \right) &= \pi \sum_{k \geq 3} (k^2 - 1)(k^{2i+2} - k^{2i} - 3 \cdot 2^{2i})(a_k^2 + b_k^2) \\ &\geq 8(8 \cdot 3^{2i} - 3 \cdot 2^{2i}) \pi \sum_{k \geq 3} (a_k^2 + b_k^2) = C(i) \pi h_2(\gamma, \tilde{\gamma})^2 \end{aligned} \quad (3.3)$$

成立, 且等式成立当且仅当 $k \geq 3$ 时, 均有 $a_k = b_k = 0$ 。

定理 1.2 的证明 当 $i=0$ 时, 根据式(3.2)和 Hölder 不等式, 有

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{S}^1} \beta^2 d\theta - 2A - 8 \left(\frac{L^2}{4\pi} - A \right) &= \pi \sum_{k \geq 3} (k^2 - 1)(k^2 - 4)(a_k^2 + b_k^2) \\ &\geq \pi \left(\sum_{k \geq 3} \frac{1}{(k^2 - 1)(k^2 - 4)} \right)^{-1} \left(\sum_{k \geq 3} \sqrt{a_k^2 + b_k^2} \right)^2. \end{aligned}$$

因为

$$\begin{aligned} \sum_{k \geq 3} \frac{1}{(k^2 - 1)(k^2 - 4)} &= \frac{1}{3} \left(\sum_{k \geq 3} \frac{1}{k^2 - 4} - \sum_{k \geq 3} \frac{1}{k^2 - 1} \right) \\ &= \frac{1}{12} \sum_{k \geq 3} \left(\frac{1}{k-2} - \frac{1}{k+2} \right) - \frac{1}{6} \sum_{k \geq 3} \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k+1} \right) = \frac{5}{144}, \end{aligned}$$

可以得到

$$\int_{\mathbb{S}^1} \beta^2 d\theta - 2A - 8 \left(\frac{L^2}{4\pi} - A \right) \geq \frac{144\pi}{5} h_1(\gamma, \tilde{\gamma})^2.$$

同理, 当 $i \geq 1$ 时, 根据式(3.3)可得,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{S}^1} (\beta^{(i)})^2 d\theta - B(i) \left(\frac{L^2}{4\pi} - A \right) &= \pi \sum_{k \geq 3} (k^2 - 1)(k^{2i+2} - k^{2i} - 3 \cdot 2^{2i})(a_k^2 + b_k^2) \\ &\geq (8 \cdot 3^{2i} - 3 \cdot 2^{2i}) \pi \sum_{k \geq 3} (k^2 - 1)(a_k^2 + b_k^2) \\ &\geq \tilde{D}(i) \pi \left(\sum_{k \geq 3} \frac{1}{k^2 - 1} \right)^{-1} \left(\sum_{k \geq 3} \sqrt{a_k^2 + b_k^2} \right)^2, \end{aligned}$$

其中 $\tilde{D}(i) = 8 \cdot 3^{2i} - 3 \cdot 2^{2i}$ 。再结合 $\sum_{k \geq 3} \frac{1}{k^2 - 1} = \frac{5}{12}$ 和式(2.8), 则有

$$\int_{S^1} (\beta^{(i)})^2 d\theta - B(i) \left(\frac{L^2}{4\pi} - A \right) \geq D(i) \pi h_1(\gamma, \tilde{\gamma})^2.$$

注 在定理 1.1 中, 当 $i=1$ 时, 随着 $\Delta \rightarrow 0$, 有 $h_2(\gamma, \tilde{\gamma}) \rightarrow 0$ 。由式(2.7)可知, 曲线 γ 的支撑函数为

$$p(\theta) = a_0 + a_1 \cos \theta + b_1 \sin \theta + a_2 \cos 2\theta + b_2 \sin 2\theta,$$

这表明 γ 是一条以 (a_1, b_1) 为中心的星形线的平行曲线, 这给出问题 1.1 一个肯定的答案, 即当式(1.1)中的 Δ 趋于 0 时, γ 会接近于一条星形线的平行曲线。若 γ 是平面凸曲线, 具有上述支撑函数的曲线 γ 为 6 次代数曲线[13]。

本文解决了文献[2]中的问题 1.1, 该问题的研究将为开展勒让德曲线逆曲率流工作提供重要的依据, 相信后面还会有很多学者对其感兴趣, 深入探索勒让德曲线的几何奥秘。

致 谢

感谢审稿人对改进本文提供的宝贵建议。

参考文献

- [1] Li, E. and Pei, D. (2021) Envelopoids and Involutooids of Spherical Legendre Curves. *Journal of Geometry and Physics*, **170**, 23 p. <https://doi.org/10.1016/j.geomphys.2021.104371>
- [2] Li, M. and Wang, G. (2023) l -Convex Legendre Curves and Geometric Inequalities. *Calculus of Variations and Partial Differential Equations*, **62**, 24 p. <https://doi.org/10.1007/s00526-023-02480-z>
- [3] Groemer, H. (1990) Stability Properties of Geometric Inequalities. *The American Mathematical Monthly*, **97**, 382-394. <https://doi.org/10.1080/00029890.1990.11995611>
- [4] Zhang, D.Y. (2021) A Mixed Symmetric Chernoff Type Inequality and Its Stability Properties. *Journal of Geometric Analysis*, **31**, 5418-5436. <https://doi.org/10.1007/s12220-020-00485-0>
- [5] Fang, J.B. and Yang, Y.L. (2023) Chernoff Type Inequalities Involving k -Order Width and Their Stability Properties. *Results in Mathematics*, **78**, 13 p. <https://doi.org/10.1007/s00025-023-01889-4>
- [6] Gage, M.E. (1983) An Isoperimetric Inequality with Applications to Curve Shortening. *Duke Mathematical Journal*, **50**, 1225-1229. <https://doi.org/10.1215/S0012-7094-83-05052-4>
- [7] Gage, M.E. and Hamilton, R.S. (1986) The Heat Equation Shrinking Convex Plane Curves. *Journal of Differential Geometry*, **23**, 69-96. <https://doi.org/10.4310/jdg/1214439902>
- [8] Pan, S.L. and Yang, J.N. (2008) On a Non-Local Perimeter-Preserving Curve Evolution Problem for Convex Plane Curves. *Manuscripta Mathematica*, **127**, 469-484. <https://doi.org/10.1007/s00229-008-0211-x>
- [9] Lin, Y.-C. and Tsai, D.-H. (2012) Application of Andrews and Green-Osher Inequalities to Nonlocal Flow of Convex Plane Curves. *Journal of Evolution Equations*, **12**, 833-854. <https://doi.org/10.1007/s00028-012-0157-z>
- [10] Yang, Y. and Wu, W. (2021) The Reverse Isoperimetric Inequality for Convex Plane Curves through a Length-Preserving Flow. *Archiv der Mathematik*, **116**, 107-113. <https://doi.org/10.1007/s00013-020-01541-5>
- [11] Fukunaga, T. and Takahashi, M. (2013) Existence and Uniqueness for Legendre Curves. *Journal of Geometry*, **104**, 297-307. <https://doi.org/10.1007/s00022-013-0162-6>
- [12] Fukunaga, T. and Takahashi, M. (2016) On Convexity of Simple Closed Frontals. *Kodai Mathematical Journal*, **39**, 389-398. <https://doi.org/10.2996/kmj/1467830145>
- [13] Gao, L.Y., Zhang, Z.Y. and Zhou, F. (2020) An Extension of Rabinowitz's Polynomial Representation for Convex Curves. *Beitrage zur Algebra und Geometrie*, **61**, 455-464. <https://doi.org/10.1007/s13366-020-00494-8>