Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, 2015, 4, 1-6
Published Online February 2015 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/aam
http://dx.doi.org/10.12677/aam.2015.41001

A New Criterion for Series of Positive Terms Containing Logarithmic Powers

Donghuan Jiang, Dezhi Gao, Guangbao Xu

College of Mathematics and Systems Science, Shandong University of Science and Technology, Qingdao Shandong
Email: jdh-2002@163.com

Received: Dec. 29th, 2014; accepted: Jan. 22nd, 2015; published: Jan. 27th, 2015

Abstract

Using a kind of positive series containing ln*n* as comparison standard, we obtained a new test for series of positive terms in this paper. The new convergence criterion is for the promotion of Raabe criterion. It is especially effective for positive terms containing logarithmic powers.

Keywords

Series of Positive Terms, Raabe Criterion, Convergence Criterion, Divergence

含有对数方幂的正项级数的一种新判别方法

姜东焕，高德智，徐光宝

山东科技大学，数学与系统科学学院，山东 青岛
Email: jdh-2002@163.com

收稿日期：2014年12月29日；录用日期：2015年1月22日；发布日期：2015年1月27日

摘　要

利用一类含有ln*n*的正项级数作为比较标准，对正项级数的拉贝判别法进行推广，得到一个新的判别方法。

该判别方法对含有对数方幂的正项级数敛散性判别特别有效。

关键词

正项级数，拉贝判别法，收敛性，发散性

1. 引言

正项级数在级数理论中占据着重要的位置，常用的判别方法有比较判别法、比值判别法、根值判别法和积分判别法[1]。比值判别法与根值判别法都是用等比级数作为比较级数，等比级数的收敛速度是比较快的，所以，它们只能用于判别那些比等比级数收敛速度更快的级数，而对于比等比级数收敛速度慢的那些级数，这两种判别法就无能为力了。拉贝利用收敛速度慢的 p 级数作为比较级数，得到了比比值判别法更为精细的拉贝判别法。高斯利用比 p 级数收敛速度更慢的正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(\ln n)^p}$ 作为比较级数，得到了高斯判别法。为了得到适用范围更广的判别方法就必须寻找收敛速度更慢的正项级数。近年来，很多学者对正项级数的敛散性进行研究并取得不少的成果[2]-[7]，其中很大部分是对拉贝判别法进行了研究和推广。当我们遇到含有 $\ln n$ 的级数时，通常用比较判别法和积分判别法。若对 $\ln n$ 的性质了解不够，无法利用比较判别法；若对广义积分了解不够，也无法利用积分判别法。基于此，利用正项级数 $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(\ln n)^q}{n^p}$ 作为比较级数，本文提出了新的适合处理通项含有 $\ln n$ 的正项级数的判别方法。

2. 新的判别方法

引理 1：$\forall p>0, \lim_{n\to\infty}\frac{(\ln n)^q}{n^p}=0$，则 $\exists N$，当 $n>N$ 时，有 $(\ln n)^q<n^p$。

证明：1) 当 $q\le 0$ 时，$\lim_{n\to\infty}\frac{(\ln n)^q}{n^p}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^p(\ln n)^{-q}}=0$。

2) 当 $0<q\le 1$ 时，因为 $\lim_{x\to+\infty}\frac{(\ln x)^q}{x^p}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{xpx^{p-1}(\ln x)^{1-q}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{px^p(\ln x)^{1-q}}=0\,(p>0)$，

所以 $\lim_{n\to\infty}\frac{(\ln n)^q}{n^p}=0$。

3) 当 $q>1$，设 $m=[q]+1$，则连续使用 m 次罗必塔法则，便能得到 $\lim_{x\to+\infty}\frac{(\ln x)^q}{x^p}=0$。所以 $\lim_{n\to\infty}\frac{(\ln n)^q}{n^p}=0$。

综上，由极限的保序性可知，$\exists N$，当 $n>N$ 时，有 $(\ln n)^q<n^p\ (p>0)$。

引理 2：正项级数 $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(\ln n)^q}{n^p}\,(p>0)$ 当 $p<1$ 时发散；当 $p>1$ 时收敛；当 $p=1$ 时，若 $q\ge -1$，级数 $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(\ln n)^q}{n^p}$ 发散；若 $q<-1$，级数 $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(\ln n)^q}{n^p}$ 收敛。

证明：1) 当 $p>1$ 时，由引理 1，$\exists N$，当 $n>N$ 时，有 $(\ln n)^q<n^\lambda\ (\lambda>0)$。可取 λ，使得 $p-\lambda>1$，$\frac{(\ln n)^q}{n^p}<\frac{n^\lambda}{n^p}=\frac{1}{n^{p-\lambda}}$。因为 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{p-\lambda}}$ 收敛，由比较判别法知 $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(\ln n)^q}{n^p}$ 收敛。

2) 当 $p<1$ 时，$\exists\lambda$，使得 $p+\lambda<1$。$\dfrac{(\ln n)^q}{n^p}=\dfrac{1}{n^p(\ln n)^{-q}}>\dfrac{1}{n^p\cdot n^\lambda}=\dfrac{1}{n^{p+\lambda}}$，又因为此时 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^{p+\lambda}}$ 发散，由比较判别法知 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{(\ln n)^q}{n^p}$ 发散。

3) 当 $p=1$ 时，若 $-1\le q\le 0$，则 $0\le -q\le 1$，由积分判别法知，$\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{(\ln n)^q}{n}=\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{1}{n(\ln n)^{-q}}$ 发散。若 $q>0$，$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(\ln n)^q}{n}\Big/\dfrac{1}{n}=\lim\limits_{n\to\infty}(\ln n)^q=+\infty$，由比较判别法知 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{(\ln n)^q}{n}$ 发散；若 $q<-1$，则 $-q>1$，由积分判别法知级数 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{(\ln n)^q}{n}=\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{1}{n(\ln n)^{-q}}$ 收敛。

本文用引理 2 中的级数作为比较级数，得到如下的判别方法。

定理 1：设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 为正项级数且存在某正整数 N 及常数 r，

1) 若对任意 $n>N$，有 $(n+1)\left(1-\dfrac{(\ln n)^q}{(\ln(n+1))^q}\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right)\ge r>1$，则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛；

2) 若对任意 $n>N$，有 $(n+1)\left(1-\dfrac{(\ln n)^q}{(\ln(n+1))^q}\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right)\ge 1$ 且 $q<-1$，则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛；

3) 若对任意 $n>N$，有 $(n+1)\left(1-\dfrac{(\ln n)^q}{(\ln(n+1))^q}\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right)\le 1$ 且 $q\ge -1$，则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 发散。

证明：1) 因为 $(n+1)\left(1-\dfrac{(\ln n)^q}{(\ln(n+1))^q}\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right)\ge r$，所以 $\dfrac{(\ln n)^q}{(\ln(n+1))^q}\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\le 1-\dfrac{r}{n+1}$

因为 $r>1$，所以 $\exists p, s.t\ 1<p<r$。由题意知 $\exists N>0$，当 $n>N$ 时，有

$$\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^p\ge 1-\frac{p}{n+1}>1-\frac{r}{n+1}$$

从而

$$\frac{(\ln n)^q}{(\ln(n+1))^q}\frac{u_{n+1}}{u_n}\le\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^p=\left(\frac{n}{n+1}\right)^p,\ \text{即}\ \frac{u_{n+1}}{u_n}\le\frac{(\ln(n+1))^q}{(\ln n)^q}\frac{n^p}{(n+1)^p}$$

当 $n>N$ 时，有

$$\begin{aligned}u_{n+1}&=\frac{u_{n+1}}{u_n}\frac{u_n}{u_{n-1}}\cdots\frac{u_{N+1}}{u_N}u_N<\frac{(\ln(n+1))^q}{(\ln n)^q}\frac{n^p}{(n+1)^p}\frac{(\ln n)^q}{(\ln(n-1))^q}\frac{(n-1)^p}{n^p}\cdots\frac{(\ln(N+1))^q}{(\ln N)^q}\frac{N^p}{(N+1)^p}u_N\\&=\frac{(\ln(n+1))^q}{(n+1)^p}u_N\end{aligned}$$

因为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(\ln(n+1))^q}{(n+1)^p}$ 收敛，由比较判别法知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛。

2) 令 $v_n=\frac{(\ln n)^q}{n}$，由条件知，$\exists N>0$，当 $n>N$ 时，$(n+1)\left(1-\frac{(\ln n)^q}{(\ln(n+1))^q}\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)\geq 1$ 即

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}\leq\frac{(\ln(n+1))^q}{(\ln n)^q}\frac{n}{n+1}=\frac{v_{n+1}}{v_n}$$

当 $q<-1$ 时，$\sum_{n=1}^{\infty}v_n$ 收敛，所以 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 也收敛。

3) 证明与 2)类似，易得

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}\geq\frac{(\ln(n+1))^q}{(\ln n)^q}\frac{n}{n+1}=\frac{v_{n+1}}{v_n}$$

因为当 $q\geq -1$ 时，$\sum_{n=1}^{\infty}v_n$ 发散，所以 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 也发散。

注 1：定理中取 $q=0$，该判别法就是拉贝判别法。

注 2：此类判别法特别适用于判定级数通项中含有对数方幂 $(\ln n)^q$ 的级数。

定理 1 的极限形式见定理 2。

定理 2：正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$，若有 $\lim_{n\to\infty}(n+1)\left(1-\frac{(\ln n)^q}{(\ln(n+1))^q}\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)=s$，则

1) 当 $s>1$ 时，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛；

2) 当 $s<1$ 且 $q\geq -1$ 时，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 发散。

注：$s=1$ 时，定理 2 中判别法失效。如发散级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\ln n}$，取 $q=-2$ 时，$s=1$；收敛级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(\ln n)^2}$，取 $q=-1$ 时，$s=1$。此时，可以用定理 1 判别这两个级数的敛散性。

例 1：判定级数 $\sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{n(\ln n)^p}$ 的敛散性。

解：取 $q=-p$，有

$$(n+1)\left(1-\frac{(\ln n)^q}{(\ln(n+1))^q}\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)=(n+1)\left(1-\frac{(\ln n)^{-p}}{(\ln(n+1))^{-p}}\frac{n(\ln n)^p}{(n+1)(\ln(n+1))^p}\right)=1$$

由定理 1 知，当 $q<-1$ 即 $p>1$ 时级数收敛；当 $q\geq -1$ 即 $p\leq 1$ 时级数发散。

例 2：判定正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(\ln n)^2}$ 的敛散性。

解：取 $q=-1$，

$$\lim_{n\to\infty}(n+1)\left(1-\frac{(\ln n)^q}{(\ln(n+1))^q}\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)=\lim_{n\to\infty}(n+1)\left(1-\frac{\ln(n+1)}{\ln n}\frac{(\ln n)^2}{(\ln(n+1))^2}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}(n+1)\left(1-\frac{\ln n}{\ln(n+1)}\right)=\lim_{n\to\infty}(n+1)\frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\ln(n+1)}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n+1}{n}}{\ln(n+1)}=0<1.$$

由定理 2 知，该级数发散。

例 3：判定正项级数 $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{(\ln n)^3}$ 的敛散性。

解：取 $q=-3$，

$$(n+1)\left(1-\frac{(\ln n)^q}{(\ln(n+1))^q}\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)=(n+1)\left(1-\frac{(\ln n)^{-3}}{(\ln(n+1))^{-3}}\frac{\ln\left(1+\frac{1}{n+1}\right)}{(\ln(n+1))^3}\frac{(\ln n)^3}{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}\right)$$

$$=(n+1)\left(1-\frac{\ln\left(1+\frac{1}{n+1}\right)}{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}\right)=(n+1)\left(\frac{\ln\left(1+\frac{1}{n(n+2)}\right)}{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}\right)$$

$$\geq(n+1)\left(\frac{1}{n(n+2)+1}\right)\Big/\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\geq\frac{1}{(n+1)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}=\frac{1}{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)^{(n+1)}}\geq\frac{1}{\ln e}=1.$$

由定理 1 知，级数 $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{(\ln n)^3}$ 收敛。

3. 新判别方法的优点

新判别法对通项含有对数方幂的级数的敛散性判别特别有效。为了说明这一点，我们对文中的例子用常用的相对简洁的方法判别其敛散性。这样就能与文中的方法形成对比，从而说明新判别方法对含有 $\ln n$ 的正项级数更为有效。

对于例 1 中级数的敛散性的判别，也可以用现有的方法判别[7] [8]，但是需要分 $p\leq 0$ 和 $p>0$ 进行讨论。当 $p\leq 0$ 时，用比较判别法判别；当 $p>0$ 时用积分判别法判别，详见参考文献[7]。相比较而言，文中新方法更简洁。

对于例 2 中级数的敛散性判别，也可以用比较判别法来判别，对于此例来说，比较判别法比文中新方法要简洁一些。

对于例 3 中的级数的敛散性的判别，如果用比较判别法，不容易找到已知敛散性的正项级数进行比较；由于该题的后项和前项的比值的极限为 1，所以比值判别法对该题也失效；如果用积分判别法，需要求解被积函数的分子和分母中都含有对数的一个广义积分，这也是很难做到的。所以，常用的一些判别法并不能判别该级数的敛散性。文献[8]推广了广义比值判别法并用其判别了例 3 中级数的敛散性。该方法需要选取特殊参数 k 来判别级数的敛散性，然而合适参数的选取有一定的难度。因此，用文中的新方法来判别类似例 3 这样含有对数方幂的级数更为合适。

4. 结论

本文提出了一种对含对数方幂的正项级数较为有效的判别方法，同时从理论上推导了该方法的正确性。另外，针对文中给出的例子，分析了用新方法与现有其他方法判定敛散性的区别，从而说明了新方法在一定程度上对于判别此类级数的敛散性具有一定的优势。因为新方法与拉贝判别法形式相似，如果

熟悉了拉贝判别法，那么就可以比较容易地记住新方法并用它解决相关级数的敛散性判定问题。

参考文献 (References)

[1] 华东师范大学数学系 (2001) 数学分析(下). 高等教育出版社, 北京.

[2] 高德智, 梁向前 (2009) 广义拉贝判别法. *大学数学*, **6**, 177-181.

[3] 王晖东, 刘笑颖 (2011) 拉贝判别法的推广. *大学数学*, **4**, 166-169.

[4] 周杰荣 (2014) 正项级数敛散性的对数判别法与拉贝判别法. *数学的实践与认识*, **3**, 287-290.

[5] 梁峰, 殷晓斌 (2010) 正项级数敛散性的一个判别法. *高等数学研究*, **3**, 8-9.

[6] 周杰荣 (2013) 含有 $\ln n$ 的正项级数敛散性的若干个判定方法. *大学数学*, **2**, 113-116.

[7] 张天德, 等 (2014) 高等数学辅导. 北京理工大学出版社, 北京.

[8] 李波, 崔群法 (2008) 正项级数收敛判别法的推广. *安阳工学院学报*, **6**, 97-100.

汉斯出版社为全球科研工作者搭建开放的网络学术中文交流平台。自2011年创办以来，汉斯一直保持着稳健快速发展。随着国内外知名高校学者的陆续加入，汉斯电子期刊已被450多所大中华地区高校图书馆的电子资源采用，并被中国知网全文收录，被学术界广为认同。

汉斯出版社是国内开源（Open Access）电子期刊模式的先行者，其创办的所有期刊全部开放阅读，即读者可以通过互联网免费获取期刊内容，在非商业性使用的前提下，读者不支付任何费用就可引用、复制、传播期刊的部分或全部内容。