Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, 2015, 4, 29-36
Published Online February 2015 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/aam
http://dx.doi.org/10.12677/aam.2015.41004

A Note on LS Berry-Esseen Estimator in Simple Linear EV Regression Model

Jiao Meng, Mingming Yu

Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, Nanjing Jiangsu
Email: zbmengjiao@sina.com, mengyilianmeng@163.com

Received: Jan. 26th, 2015; accepted: Feb. 11th, 2015; published: Feb. 17th, 2015

Abstract

In this paper, we study the convergence rate of the central limit theorems for LS estimator in simple linear errors-in-variables (EV) regression model. Further, its application has been introduced detailedly by Miao, Yang and Shen in [1].

Keywords

Central Limit Theorem, Convergence Rate, EV Regression Model, LS Estimator

简单线性EV回归模型中最小二乘估计量的Berry-Esseen估计

孟　娇，于明明

南京航空航天大学，江苏　南京
Email: zbmengjiao@sina.com, mengyilianmeng@163.com

收稿日期：2015年1月26日；录用日期：2015年2月11日；发布日期：2015年2月17日

摘　要

本论文的目的是研究简单线性存在误差项(EV)退化模型的最小二乘估计量中心极限定理的收敛速度。进

一步，Miao，Yang和Shen在[1]中对其实际应用做了详细的介绍。

关键词

中心极限定理，收敛速度，EV退化模型，最小二乘法估计量

1. 介绍

本文我们讨论下面 EV 模型[2]：

$$\eta_i = \theta + \beta x_i + \varepsilon_i,\ \xi_i = x_i + \delta_i,\ 1 \le i \le n \tag{1}$$

并且满足下列假设：

(1) $\theta, \beta, x_1, x_2, \cdots$ 是未知常数；

(2) $(\varepsilon_1, \delta_1), (\varepsilon_2, \delta_2), \cdots$ 是独立同分布 $(i.i.d.)$ 随机变量， $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots$ 是 $i.i.d.$， $\delta_1, \delta_2, \cdots$ 是 $i.i.d.$，且

$$E\delta_1 = E\varepsilon_1 = 0,\ 0 < Var(\delta_1) = \sigma_1^2,\ Var(\varepsilon_1) = \sigma_2^2 < \infty;$$

(3) $\xi_i, \eta_i, i = 1, 2, \cdots$ 是可观测值。

根据(1)，我们可得出

$$\eta_i = \theta + \beta \xi_i + v_i,\ v_i = \varepsilon_i - \beta \delta_i,\ 1 \le i \le n. \tag{2}$$

其中(2)是关于 η_i 的常见的退化模型，我们得到 θ 和 β 的最小二乘法估计量

$$\hat{\beta}_n = \frac{\sum_{i=1}^n (\xi_i - \bar{\xi}_n)(\eta_i - \bar{\eta}_n)}{\sum_{i=1}^n (\xi_i - \bar{\xi}_n)^2},\quad \hat{\theta}_n = \bar{\eta}_n - \hat{\beta}_n \bar{\xi}_n, \tag{3}$$

其中 $\bar{\xi}_n = n^{-1} \sum_{i=1}^n \xi_i$， 我们可用相同的方法去定义 $\bar{\eta}_n, \bar{\delta}_n$。

很多学者讨论了估计量的渐近性质和应用。Miao 和 Liu 在[3]中给出了它的中偏差原理，Miao，Yang 和 Shen 在[1]中得到其中心极限定理，有如下结论：

定理 A： 令 $S_n = \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}_n)^2$， 假设

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt{S_n}} = 0. \tag{4}$$

并且存在一个常数 $\alpha > 0$， 使得 $E|\varepsilon_i|^{2+\alpha} < \infty, E|\delta_i|^{2+\alpha} < \infty$ 且 $\lim_{n\to\infty} \max_{1\le i\le n} \frac{|x_i - \bar{x}_n|}{\sqrt{S_n}} = 0$，

则得到 $\hat{\beta}_n - \beta$ 的渐进性质，即

$$\frac{\sqrt{S_n}}{\sqrt{Var(\varepsilon_1 - \beta\delta_1)}} (\hat{\beta}_n - \beta) \to N(0,1),$$

其中 $N(0,1)$ 是标准正态分布。

定理 B： 当满足定理 A 的所有假设且满足条件： $\lim_{n\to\infty} \frac{S_n}{n\bar{x}_n^2} = \infty$， 则 $\hat{\theta}_n$ 的渐进性质为：

$$\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{Var(\varepsilon_1 - \beta\delta_1)}} (\hat{\theta}_n - \theta) \to N(0,1).$$

上述结论我们可以参见[4]-[6]，本文我们讨论定理 A 和定理 B 中的收敛速度，也就是中心极限定理的收敛速度。本文中 C 表示一个正常数。

我们有如下重要的结论：

定理 1.1：满足定理 A 的所有假设，当 n 充分大时

$$\sup_{x\in R}\left|P\left(\frac{\sqrt{S_n}}{\sqrt{Var(\varepsilon_1-\beta\delta_1)}}(\hat{\beta}_n-\beta)\le x\right)-\Phi(x)\right|\le C\max\left\{L_{n,\alpha},n^{\frac{1}{2}}S_n^{-\frac{1}{4}}\right\}, \tag{5}$$

其中 $\Phi(x)$ 是标准正态分布的分布函数且 $L_{n,\alpha}=S_n^{-\left(1+\frac{\alpha}{2}\right)}\sum_{i=1}^{n}\left|x_i-\bar{x}_n\right|^{2+\alpha}$.

定理 1.2：满足定理 B 的所有假设，当 n 充分大时

$$\sup_{x\in R}\left|P\left(\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{Var(\varepsilon_1-\beta\delta_1)}}(\hat{\theta}_n-\theta)\le x\right)-\Phi(x)\right|\le CN_n, \tag{6}$$

其中

$$N_n=\max\left\{n^{-\frac{1}{2}},\left(\frac{1+n\bar{x}_n^2}{S_n}\right)^{\frac{1}{4}}\left(\log\frac{1+n\bar{x}_n^2}{S_n}\right)^{-\frac{1}{2}},L_{n,\alpha},n^{\frac{1}{2}}S_n^{-\frac{1}{4}}\right\}.$$

注 1.1(1)满足定理 A 的所有假设，我们得到

$$L_{n,\alpha}=\frac{\sum_{i=1}^{n}\left|x_i-\bar{x}_n\right|^{2+\alpha}}{\left(\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x}_n)^2\right)^{1+\frac{\alpha}{2}}}\le\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x}_n)^2\cdot\max\limits_{1\le i\le n}\left|x_i-\bar{x}_n\right|^{\alpha}}{\left(\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x}_n)^2\right)^{1+\frac{\alpha}{2}}}=\max_{1\le i\le n}\frac{\left|x_i-\bar{x}_n\right|^{\alpha}}{S_n^{\frac{\alpha}{2}}}\to 0,\ \ n\to\infty$$

且 $n^{\frac{1}{2}}S_n^{-\frac{1}{4}}\to 0, n\to\infty$ 。因此，根据定理 1.1 有

$$\lim_{n\to\infty}P\left(\frac{\sqrt{S_n}}{\sqrt{Var(\varepsilon_1-\beta\delta_1)}}(\hat{\beta}_n-\beta)\le x\right)=\Phi(x).$$

(2) 满足定理 B 的所有假设，我们知道 $\frac{1+n\bar{x}_n^2}{S_n}\to 0$ ， $\log\frac{1+n\bar{x}_n^2}{S_n}\to\infty$ 。随即可以得到

$$\left(\frac{1+n\bar{x}_n^2}{S_n}\right)^{\frac{1}{4}}\to 0,\quad\left(\log\frac{1+n\bar{x}_n^2}{S_n}\right)^{-\frac{1}{2}}\to 0.$$

所以有

$$\left(\frac{1+n\bar{x}_n^2}{S_n}\right)^{\frac{1}{4}}\left(\log\frac{1+n\bar{x}_n^2}{S_n}\right)^{-\frac{1}{2}}\to 0, n\to\infty,$$

因此

$$\lim_{n\to\infty}P\left(\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{Var(\varepsilon_1-\beta\delta_1)}}(\hat{\theta}_n-\theta)\le x\right)=\Phi(x).$$

为了证明定理内容，我们给出以下引理。其中(1)的证明方法比较简单，(2)的证明可以参见[7]。

引理 1.1：令 X,Y,Z 是定义在概率空间 (Ω,F,P) 上的三个随机变量，并且 $P(Z>0)>0$ 。则对于任意的 $\varepsilon>0$ ，有

(1) $\sup\limits_{x\in R}\left|P(X+Y\le x)-\Phi(x)\right|\le\sup\limits_{x\in R}\left|P(X\le x)-\Phi(x)\right|+P(|Y|>\varepsilon)+\varepsilon;$

(2) $\sup\limits_{x\in R}\left|P\left(\frac{X}{Z}\le x\right)-\Phi(x)\right|\le\sup\limits_{x\in R}\left|P(X\le x)-\Phi(x)\right|+P(|Z-1|>\varepsilon)+\varepsilon.$

2. 定理的证明

下面为了计算方便，我们令

$$\hat{\beta}_n-\beta=\frac{1}{\sum_{i=1}^n\left(\xi_i-\overline{\xi}_n\right)^2}\left(\sum_{i=1}^n\left(\xi_i-\overline{\xi}_n\right)\varepsilon_i-\beta\sum_{i=1}^n\left(x_i-\overline{x}_n\right)\delta_i-\beta\sum_{i=1}^n\left(\delta_i-\overline{\delta}_n\right)^2\right) \tag{7}$$

和

$$\hat{\theta}_n-\theta=\left(\hat{\beta}_n-\beta\right)\overline{x}_n+\left(\hat{\beta}_n-\beta\right)\overline{\delta}_n-\beta\overline{\delta}_n+\overline{\varepsilon}_n. \tag{8}$$

为了证明定理内容，我们引入下面引理

引理 2.1： 对于任意的 $\varepsilon>0$，我们得到

$$P\left(\frac{\left|\sum_{i=1}^n\left(\delta_i-\overline{\delta}_n\right)\varepsilon_i\right|}{\sqrt{S_n}}\ge\varepsilon\right)\le\frac{n\sigma_1\sigma_2}{\varepsilon\sqrt{S_n}}.$$

证明： 对于所有的 $1\le i\le n$，根据 Holder 不等式即可得到

$$E\left|\left(\delta_i-\overline{\delta}_n\right)\varepsilon_i\right|\le\left(E\left(\delta_i-\overline{\delta}_n\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(E\varepsilon^2\right)^{\frac{1}{2}},$$

所以有

$$\sum_{i=1}^n E\left|\left(\delta_i-\overline{\delta}_n\right)\varepsilon_i\right|\le n\left(E\left(\delta_i-\overline{\delta}_n\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(E\varepsilon^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

根据马尔可夫不等式可得

$$P\left(\frac{\left|\sum_{i=1}^n\left(\delta_i-\overline{\delta}_n\right)\varepsilon_i\right|}{\sqrt{S_n}}\ge\varepsilon\right)\le\frac{1}{\varepsilon\sqrt{S_n}}\sum_{i=1}^n E\left|\left(\delta_i-\overline{\delta}_n\right)\varepsilon_i\right|\le\frac{n}{\varepsilon\sqrt{S_n}}\left(E\left(\delta_i-\overline{\delta}_n\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(E\varepsilon^2\right)^{\frac{1}{2}}\le\frac{n\sigma_1\sigma_2}{\varepsilon\sqrt{S_n}}.$$

引理 2.2： 对于任意的 $\varepsilon>0$，我们得到

$$P\left(\left|\frac{\sum_{i=1}^n\left(\xi_i-\overline{\xi}_n\right)^2}{S_n}-1\right|\ge\varepsilon\right)\le\frac{2n(2+\varepsilon)\sigma_1^2}{\varepsilon^2 S_n}.$$

证明： 根据简单的计算，我们得到

$$\sum_{i=1}^n\left(\xi_i-\overline{\xi}_n\right)^2=\sum_{i=1}^n\left(x_i-\overline{x}_n\right)^2+2\sum_{i=1}^n\left(x_i-\overline{x}_n\right)\left(\delta_i-\overline{\delta}_n\right)+\sum_{i=1}^n\left(\delta_i-\overline{\delta}_n\right)^2,$$

因此有

$$\left|\sum_{i=1}^n\left(\xi_i-\overline{\xi}_n\right)^2-S_n\right|\le\frac{\varepsilon}{2}S_n+\frac{2+\varepsilon}{\varepsilon}\sum_{i=1}^n\left(\delta_i-\overline{\delta}_n\right)^2.$$

最后，根据马尔可夫不等式得到

$$P\left(\left|\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(\xi_i-\bar{\xi}_n\right)^2}{S_n}-1\right|\geq\varepsilon\right)\leq P\left(\sum_{i=1}^{n}\left(\delta_i-\bar{\delta}_n\right)^2\geq\frac{\varepsilon^2S_n}{2(2+\varepsilon)}\right)\leq\frac{2n(2+\varepsilon)\sigma_1^2}{\varepsilon^2S_n}.$$

因为$(\varepsilon_1,\delta_1),(\varepsilon_2,\delta_2),\cdots$是$i.i.d.$，根据[8]中第五章定理 6，我们可以得到

引理 2.3：假设存在一个常数$0<\alpha\leq1$,使得$E|\varepsilon_1|^{2+\alpha}<\infty$和$E|\delta_1|^{2+\alpha}<\infty$，则有

$$\sup_{x\in R}\left|P\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x}_n)(\varepsilon_i-\beta\delta_i)}{\sqrt{S_n}\sqrt{Var(\varepsilon_1-\beta\delta_1)}}\leq x\right)-\Phi(x)\right|\leq CL_{n,\alpha}.$$

引理 2.4：当引理 2.3 的条件满足时，我们得到

$$\sup_{x\in R}\left|P\left(\frac{\sqrt{S_n}}{\sqrt{Var(\varepsilon_1-\beta\delta_1)}}\left(\hat{\beta}_n-\beta\right)\leq x\right)-\Phi(x)\right|\leq CM_n,$$

其中

$$M_n=\max\left\{L_{n,\alpha},n^{\frac{1}{2}}S_n^{-\frac{1}{4}},S_n^{-\frac{1}{2}},n^{\frac{1}{2}}S_n^{-\frac{3}{4}}\right\}.$$

证明：对于任意的$\varepsilon>0$，根据(7)和引理 1.1(2)

$$\sup_{x\in R}\left|P\left(\frac{\sqrt{S_n}}{\sqrt{Var(\varepsilon_1-\beta\delta_1)}}\left(\hat{\beta}_n-\beta\right)\leq x\right)-\Phi(x)\right|=I_1+I_2+\varepsilon, \tag{9}$$

其中

$$I_1=P\left(\left|\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(\xi_i-\bar{\xi}_n\right)^2}{S_n}-1\right|\geq\varepsilon\right),$$

$$I_2=\sup_{x\in R}\left|P\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(\xi_i-\bar{\xi}_n\right)\varepsilon_i-\beta\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x}_n)\delta_i-\beta\sum_{i=1}^{n}\left(\delta_i-\bar{\delta}_n\right)^2}{\sqrt{S_n}\sqrt{Var(\varepsilon_1-\beta\delta_1)}}\leq x\right)-\Phi(x)\right|.$$

根据引理 2.2 即可得到

$$I_1\leq\frac{2n(2+\varepsilon)\sigma_1^2}{\varepsilon^2S_n}. \tag{10}$$

现在我们只需去估计I_2的值。因为$\xi_i=x_i+\delta_i$，所以$\bar{\xi}_n=\bar{x}_n+\bar{\delta}_n$。

$$\begin{aligned}
&P\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(\xi_i-\bar{\xi}_n\right)\varepsilon_i-\beta\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x}_n)\delta_i-\beta\sum_{i=1}^{n}\left(\delta_i-\bar{\delta}_n\right)^2}{\sqrt{S_n}\sqrt{Var(\varepsilon_1-\beta\delta_1)}}\leq x\right)\\
&=P\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(x_i+\delta_i-\left(\bar{x}_n+\bar{\delta}_n\right)\right)\varepsilon_i-\beta\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x}_n)\delta_i-\beta\sum_{i=1}^{n}\left(\delta_i-\bar{\delta}_n\right)^2}{\sqrt{S_n}\sqrt{Var(\varepsilon_1-\beta\delta_1)}}\leq x\right)\\
&=P\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x}_n)\varepsilon_i+\sum_{i=1}^{n}\left(\delta_i-\bar{\delta}_n\right)\varepsilon_i-\beta\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x}_n)\delta_i-\beta\sum_{i=1}^{n}\left(\delta_i-\bar{\delta}_n\right)^2}{\sqrt{S_n}\sqrt{Var(\varepsilon_1-\beta\delta_1)}}\leq x\right)\\
&=P\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x}_n)(\varepsilon_i-\beta\delta_i)+\sum_{i=1}^{n}\left(\delta_i-\bar{\delta}_n\right)\varepsilon_i-\beta\sum_{i=1}^{n}\left(\delta_i-\bar{\delta}_n\right)^2}{\sqrt{S_n}\sqrt{Var(\varepsilon_1-\beta\delta_1)}}\leq x\right)
\end{aligned}$$

所以根据引理 1.1(1)，有

$$\begin{aligned}
&\left|P\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(\xi_i-\bar{\xi}_n\right)\varepsilon_i-\beta\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-\bar{x}_n\right)\delta_i-\beta\sum_{i=1}^{n}\left(\delta_i-\bar{\delta}_n\right)^2}{\sqrt{S_n}\sqrt{Var\left(\varepsilon_1-\beta\delta_1\right)}}\le x\right)-\Phi\left(x\right)\right|\\
&=\left|P\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-\bar{x}_n\right)\left(\varepsilon_i-\beta\delta_i\right)+\sum_{i=1}^{n}\left(\delta_i-\bar{\delta}_n\right)\varepsilon_i-\beta\sum_{i=1}^{n}\left(\delta_i-\bar{\delta}_n\right)^2}{\sqrt{S_n}\sqrt{Var\left(\varepsilon_1-\beta\delta_1\right)}}\le x\right)-\Phi\left(x\right)\right|\\
&\le\left|P\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-\bar{x}_n\right)\left(\varepsilon_i-\beta\delta_i\right)}{\sqrt{S_n}\sqrt{Var\left(\varepsilon_1-\beta\delta_1\right)}}\le x\right)-\Phi\left(x\right)\right|+P\left(\left|\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(\delta_i-\bar{\delta}_n\right)\varepsilon_i-\beta\sum_{i=1}^{n}\left(\delta_i-\bar{\delta}_n\right)^2}{\sqrt{S_n}\sqrt{Var\left(\varepsilon_1-\beta\delta_1\right)}}\right|>\varepsilon\right)\\
&\le\left|P\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-\bar{x}_n\right)\left(\varepsilon_i-\beta\delta_i\right)}{\sqrt{S_n}\sqrt{Var\left(\varepsilon_1-\beta\delta_1\right)}}\le x\right)-\Phi\left(x\right)\right|+P\left(\left|\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(\delta_i-\bar{\delta}_n\right)\varepsilon_i}{\sqrt{S_n}\sqrt{Var\left(\varepsilon_1-\beta\delta_1\right)}}\right|\ge\frac{\varepsilon}{2}\right)\\
&\quad+P\left(\left|\frac{\beta\sum_{i=1}^{n}\left(\delta_i-\bar{\delta}_n\right)^2}{\sqrt{S_n}\sqrt{Var\left(\varepsilon_1-\beta\delta_1\right)}}\right|\ge\frac{\varepsilon}{2}\right)
\end{aligned}$$

所以

$$I_2\le I_{21}+I_{22}+I_{23}+\varepsilon, \tag{11}$$

其中

$$I_{21}=P\left(\frac{\left|\sum_{i=1}^{n}\left(\delta_i-\bar{\delta}_n\right)\varepsilon_i\right|}{\sqrt{S_n}\sqrt{Var\left(\varepsilon_1-\beta\delta_1\right)}}\ge\frac{\varepsilon}{2}\right),\quad I_{22}=P\left(\frac{\beta\sum_{i=1}^{n}\left(\delta_i-\bar{\delta}_n\right)^2}{\sqrt{S_n}\sqrt{Var\left(\varepsilon_1-\beta\delta_1\right)}}\ge\frac{\varepsilon}{2}\right),$$

$$I_{23}=\sup_{x\in R}\left|P\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-\bar{x}_n\right)\left(\varepsilon_i-\beta\delta_i\right)}{\sqrt{S_n}\sqrt{Var\left(\varepsilon_1-\beta\delta_1\right)}}\le x\right)-\Phi\left(x\right)\right|.$$

根据引理 2.1 和引理 2.2，我们可以得到

$$I_{21}\le\frac{2n\sigma_1\sigma_2}{\varepsilon\sqrt{S_n}\sqrt{Var\left(\varepsilon_1-\beta\delta_1\right)}},\quad I_{22}\le\frac{2\beta n\sigma_1^2}{\varepsilon\sqrt{S_n}\sqrt{Var\left(\varepsilon_1-\beta\delta_1\right)}},\quad I_{23}\le CL_{n,\alpha}. \tag{12}$$

令 $\varepsilon=\frac{n^{1/2}}{S_n^{1/4}}$，结合(9)，(10)，(11)，(12)，我们可以得到引理 2.4 的证明。

引理 2.5：当引理 2.3 的条件成立时，我们得到

$$\sup_{x\in R}\left|P\left(\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{Var\left(\varepsilon_1-\beta\delta_1\right)}}\left(\hat{\theta}_n-\theta\right)\le x\right)-\Phi\left(x\right)\right|\le CW_n,$$

其中

$$W_n=\max\left\{n^{-\frac{1}{2}},\left(\frac{1+n\bar{x}_n^2}{S_n}\right)^{\frac{1}{4}}\left(\log\frac{1+n\bar{x}_n^2}{S_n}\right)^{-\frac{1}{2}},\left(\frac{1+n\bar{x}_n^2}{S_n}\right)^{\frac{1}{2}},\left(\frac{1+n\bar{x}_n^2}{S_n}\right)^{2},\left(\frac{1}{\left(1+n\bar{x}_n^2\right)S_n}\right)^{\frac{1}{2}},M_n\right\}.$$

证明：通过(8)和引理 1.1(1)，对于任意的 $\varepsilon>0$，

$$\sup_{x\in R}\left|P\left(\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{Var\left(\varepsilon_1-\beta\delta_1\right)}}\left(\hat{\theta}_n-\theta\right)\le x\right)-\Phi\left(x\right)\right|\le J_1+J_2+\varepsilon, \tag{13}$$

其中

$$J_1=\sup_{x\in R}\left|P\left(\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{Var\left(\varepsilon_1-\beta\delta_1\right)}}\left(\bar{\varepsilon}_n-\beta\bar{\delta}_n\right)\le x\right)-\Phi\left(x\right)\right|,$$

$$J_2=P\left(\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{Var\left(\varepsilon_1-\beta\delta_1\right)}}\left|\left(\beta-\hat{\beta}_n\right)\left(\bar{x}_n+\bar{\delta}_n\right)\right|\ge\varepsilon\right).$$

对于 J_1，根据[8]中第五章的定理 4，我们可以得到

$$J_1\le Cn^{-\frac{1}{2}}. \tag{14}$$

下面我们只需去估计 J_2 的值。首先我们知道

$$J_2\le J_{21}+J_{22}, \tag{15}$$

其中

$$J_{21}=P\left(\frac{\sqrt{S_n}}{\sqrt{Var\left(\varepsilon_1-\beta\delta_1\right)}}\left|\hat{\beta}_n-\beta\right|\ge 2\left(\log\frac{S_n}{1+n\bar{x}_n^2}\right)^{1/2}\right),$$

$$J_{22}=P\left(\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{S_n}}\left|\bar{x}_n+\bar{\delta}_n\right|\ge\frac{\varepsilon}{2}\left(\log\frac{S_n}{1+n\bar{x}_n^2}\right)^{-1/2}\right).$$

根据不等式 $\Phi\left(-2\left(\log T\right)^{1/2}\right)\le CT^{-2}$，其中 $C>0$ 是一个常数。因此根据定理 1.1

$$J_{21}\le 2\Phi\left(-2\left(\log\frac{S_n}{1+n\bar{x}_n^2}\right)^{1/2}\right)+CM_n\le 2C\left(\frac{1+n\bar{x}_n^2}{S_n}\right)^2+CM_n.$$

进一步通过 Chebyshev 不等式，我们有

$$J_{22}\le\frac{8n\left(\bar{x}_n^2+\frac{\sigma_1^2}{n}\right)}{S_n\varepsilon^2}\log\frac{S_n}{1+n\bar{x}_n^2}. \tag{16}$$

令 $\varepsilon=\left(\frac{1+n\bar{x}_n^2}{S_n}\right)^{\frac{1}{4}}\left(\log\frac{1+n\bar{x}_n^2}{S_n}\right)^{-\frac{1}{2}}$，结合(13)，(14)，(15)，(16)和 J_{21} 的估计，我们可以证明引理 2.5。

定理 1.1 和定理 1.2 的证明：因为 $\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{S_n}}=0$, 因此根据引理 2.4，当 n 充分大时，

$$M_n=\max\left\{L_{n,\alpha},n^{\frac{1}{2}}S_n^{-\frac{1}{4}}\right\}, \tag{17}$$

因此我们可以证明定理 1.1。

对于定理 1.2，当 n 充分大时，

$$\left(\frac{1}{\left(1+n\bar{x}_n^2\right)S_n}\right)^{\frac{1}{2}} \le \frac{1}{n}, \left(\frac{1+n\bar{x}_n^2}{S_n}\right)^2 \le \left(\frac{1+n\bar{x}_n^2}{S_n}\right)^{\frac{1}{2}} \le \left(\frac{1+n\bar{x}_n^2}{S_n}\right)^{\frac{1}{4}} \left(\log\frac{1+n\bar{x}_n^2}{S_n}\right)^{-\frac{1}{2}}.$$

结合引理 2.5 和(17)，我们可以得到定理 1.2.

基金项目

本论文是在我的老师和同学于明明的协助下完成的，感谢南京航空航天大学数学系的各位老师给予我的指导和帮助，感谢各位文献作者的成果给予我们的借鉴。

参考文献 (References)

[1] Miao, Y., Yang, G.Y. and Shen, L.M. (2007) The central limit theorem for LS estimator in simple linear EV regression models. *Communications in Statistics-Theory and Methods*, **36**, 2263-2272.

[2] Liu, J.X. and Chen, X.R. (2005) Consistency of LS estimator in simple linear EV regression model. *Acta Mathematica Scientia*, **25B**, 50-58.

[3] Miao,Y. and Liu, W.A. (2009) Moderate deviations for LS estimator in simple linear EV regression model. *Journal of Statistical Planning and Inference*, **139**, 3122-3131.

[4] Cui, H.J. (1997) Asymptotic normality of M-estimator in the EV model. *Journal of System Science and Mathematics*, **10**, 225-236.

[5] Deaton, A. (1985) Panel data from a time series of cross-sections. *Journal of Econometrics*, **30**, 109-126.

[6] Gleser, L.J. (1981) Estimation in a multivariate “error in variables” regression model: Large sample results. *Annals of Statistics*, **9**, 24-44.

[7] Michel, R. and Pfanzagl, J. (1971) The accuracy of normal approximation for minimum contrast estimates. *Zeitschrift fur Wahrscheinlichkeitstheorie und Verwandte Gebiete*, **18**, 73-84.

[8] Petrov, V.V. (1975) Sums of independent random variables. Springer, Berlin.

汉斯出版社为全球科研工作者搭建开放的网络学术中文交流平台。自2011年创办以来，汉斯一直保持着稳健快速发展。随着国内外知名高校学者的陆续加入，汉斯电子期刊已被450多所大中华地区高校图书馆的电子资源采用，并被中国知网全文收录，被学术界广为认同。

汉斯出版社是国内开源（Open Access）电子期刊模式的先行者，其创办的所有期刊全部开放阅读，即读者可以通过互联网免费获取期刊内容，在非商业性使用的前提下，读者不支付任何费用就可引用、复制、传播期刊的部分或全部内容。