

# Subdirect Sums of Nekrasov Matrices and Nekrasov Matrices

Jing Zhao, Dan Liu, Ruiyan Hu

School of Mathematics and Statistics, Yunnan University, Kunming Yunnan  
Email: 12014000854@mail.ynu.edu.cn

Received: Nov. 11<sup>th</sup>, 2016; accepted: Nov. 26<sup>th</sup>, 2016; published: Nov. 30<sup>th</sup>, 2016

Copyright © 2016 by authors and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

---

## Abstract

A sufficient condition ensuring that the subdirect sum of Nekrasov matrix and Nekrasov matrix is in the class of Nekrasov matrices is given. And the conclusion is illustrated by a numerical example.

## Keywords

Nekrasov Matrix, Subdirect Sum, Strictly Diagonally Dominant

---

# Nekrasov矩阵与Nekrasov矩阵的子直和

赵晶, 刘丹, 胡纳炎

云南大学数学与统计学院, 云南 昆明  
Email: 12014000854@mail.ynu.edu.cn

收稿日期: 2016年11月11日; 录用日期: 2016年11月26日; 发布日期: 2016年11月30日

---

## 摘要

本文给出了Nekrasov矩阵与Nekrasov矩阵的子直和为Nekrasov矩阵的充分条件, 并用数值例子对所给结论进行了说明。

## 关键词

Nekrasov矩阵, 子直和, 严格对角占优

## 1. 引言

矩阵在诸如概率统计, 微分方程, 最优化, 控制论与系统理论, 计算数学等数学分支都有着重要应用。1999年 Fallat 和 Johnson 引入方阵的  $k$ -子直和的概念[1]。由于矩阵的子直和在很多领域具有重要应用[1] [2] [3] [4], 之后对矩阵的子直和的研究相继取得许多重要结果。2005年 Pedroche 和 Szyld 等给出两个非奇异  $M$  矩阵的子直和是非奇异  $M$  矩阵的一些充分条件[2], 2006年他们再次给出  $S$  严格对角占优矩阵的  $k$ -子直和是  $S$  严格对角占优矩阵的充分条件[5]。2007年朱燕, 黄廷祝研究了双对角占优矩阵的子直和[6], 2010年 Bru, Cvetkovic, Kostic, Pedroche 对  $\Sigma$ -严格对角占优矩阵的子直和进行了研究[7], 2015年李朝迁, 李耀堂等对 Nekrasov 矩阵的子直和进行了研究[8]。2016年赵晶, 李耀堂等对严格对角占优矩阵与 Nekrasov 矩阵的子直和进行了研究[9]。

本文我们继续研究 Nekrasov 矩阵的子直和, 期望找到 Nekrasov 矩阵与 Nekrasov 矩阵的子直和仍为 Nekrasov 矩阵的条件。下面先给出本文中要用到的基本知识。

**定义 1.1 [1]:** 设  $A$  为  $n_1$  阶方阵,  $B$  为  $n_2$  阶方阵,  $k$  为正整数且  $1 \leq k \leq \min\{n_1, n_2\}$ ,  $A$  和  $B$  有如下  $2 \times 2$  分块形式:

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix} \quad (1)$$

其中  $A_{22}$  和  $B_{11}$  是  $k$  阶方阵。令

$$C = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 \\ A_{21} & A_{22} + B_{11} & B_{12} \\ 0 & B_{21} & B_{22} \end{bmatrix},$$

称  $C$  为  $A$  和  $B$  的  $n$  ( $n = n_1 + n_2 - k$ ) 阶  $k$ -子直和, 记为  $C = A \oplus_k B$ 。

**注 1 [5]:** 设  $A = [a_{ij}]$ ,  $B = [b_{ij}]$ ,  $C = A \oplus_k B = [c_{ij}]$ , 则由定义 1.1 易得:

$$c_{ij} = \begin{cases} a_{ij}, & i \in S_1, j \in S_1 \cup S_2, \\ 0, & i \in S_1, j \in S_3, \\ a_{ij}, & i \in S_2, j \in S_1, \\ a_{ij} + b_{i-n_1+k, j-n_1+k}, & i \in S_2, j \in S_2, \\ b_{i-n_1+k, j-n_1+k}, & i \in S_2, j \in S_3, \\ 0, & i \in S_3, j \in S_1, \\ b_{i-n_1+k, j-n_1+k}, & i \in S_3, j \in S_2 \cup S_3. \end{cases}$$

其中

$$S_1 = \{1, 2, \dots, n_1 - k\}, S_2 = \{n_1 - k + 1, n_1 - k + 2, \dots, n_1\}, S_3 = \{n_1 + 1, n_1 + 2, \dots, n\}. \quad (2)$$

$$S_1 \cup S_2 \cup S_3 = N := \{1, 2, \dots, n\}.$$

故  $C$  有可表示如下:

$$C = \begin{bmatrix} \overbrace{a_{11} \cdots a_{1,n_1-k}}^{S_1} & \overbrace{a_{1,n_1-k+1} \cdots a_{1,n_1}}^{S_2} & \overbrace{0 \cdots 0}^{S_3} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n_1-k+1,1} \cdots a_{n_1-k+1,n_1-k} & a_{n_1-k+1,n_1-k+1} + b_{11} \cdots a_{n_1-k+1,n_1} + b_{1,k} & b_{1,k+1} \cdots b_{1,n_2} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n_1,1} \cdots a_{n_1,n_1-k} & a_{n_1,n_1-k+1} + b_{k,1} \cdots a_{n_1,n_1} + b_{k,k} & b_{k,k+1} \cdots b_{k,n_2} \\ 0 \cdots 0 & b_{k+1,1} \cdots b_{k+1,k} & b_{k+1,k+1} \cdots b_{k+1,n_2} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 \cdots 0 & b_{n_2,1} \cdots b_{n_2,k} & b_{n_2,k+1} \cdots b_{n_2,n_2} \end{bmatrix}$$

**定义 1.2** [10] [11] [12]: 设矩阵  $A = [a_{ij}]$  是  $n$  阶矩阵, 若对任意一个  $i \in N$ ,  $|a_{ii}| > r_i(A)$  成立, 其中  $r_i(A) = \sum_{j=1}^{i-1} |a_{ij}| + \sum_{j=i+1}^n |a_{ij}|$ , 则称  $A$  为严格对角占优矩阵。

**定义 1.3** [13] [14]: 设矩阵  $A = [a_{ij}]$  是  $n$  阶矩阵, 令

$$h_1(A) = r_1(A), \quad \sum_{j=1}^{i-1} |a_{ij}| \frac{h_j(A)}{|a_{jj}|} + \sum_{j=i+1}^n |a_{ij}|, \quad i = 2, 3, \dots, n$$

若对任意一个  $i \in N$ ,  $|a_{ii}| > h_i(A)$  成立, 则  $A$  称是 Nekrasov 矩阵。

**注 2** [13]: 由严格对角占优矩阵与 Nekrasov 矩阵的定义得严格对角占优矩阵是 Nekrasov 矩阵的一个子类。

## 2. Nekrasov 矩阵与 Nekrasov 矩阵的子直和

首先我们用一个例子说明 Nekrasov 矩阵与 Nekrasov 矩阵的子直和不一定是 Nekrasov 矩阵。

例 2.1: 设

$$A = \begin{bmatrix} 1.51 & -0.40 & -0.50 & -0.60 \\ 0 & 1.65 & -0.80 & -0.80 \\ -0.50 & -0.10 & 2.00 & -0.90 \\ -0.50 & -0.80 & -0.30 & 1.50 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 7.90 & -0.50 & -0.50 & -0.50 \\ -9.00 & 12.00 & -5.00 & -5.00 \\ -4.00 & 0 & 9.60 & -3.00 \\ -4.90 & 0 & 0 & 6.00 \end{bmatrix}。$$

容易验证  $A$  是 Nekrasov 矩阵,  $B$  是 Nekrasov 矩阵。由定义得  $A$  与  $B$  的 3-子直和  $C = A \oplus_3 B$  为

$$C = \begin{bmatrix} 1.51 & -0.40 & -0.50 & -0.60 & 0 \\ 0 & 9.55 & -1.30 & -1.30 & -0.50 \\ -0.50 & -9.10 & 14.00 & -5.90 & -5.00 \\ -0.50 & -4.80 & -0.30 & 11.10 & -3.00 \\ 0 & -4.90 & 0 & 0 & 6.00 \end{bmatrix}。$$

直接计算得  $h_1(C) = 1.5000$ ,  $h_2(C) = 3.1000$ ,  $h_3(C) = 14.3506$ ,  $h_4(C) = 5.3623$ ,  $h_5(C) = 1.5906$ 。显然,  $|c_{33}| < h_3(C)$ , 因此  $C = A \oplus_3 B$  不是 Nekrasov 矩阵。

**注 3:** 例 2.1 表明任意给出的 Nekrasov 矩阵与 Nekrasov 矩阵的子直和不一定是 Nekrasov 矩阵。下面我们来寻找 Nekrasov 矩阵与 Nekrasov 矩阵的子直和是 Nekrasov 矩阵的条件。为此先给出下面引理。

**引理 2.1:** 设  $A = [a_{ij}]$  是  $n_1$  阶 Nekrasov 矩阵,  $B = [b_{ij}]$  是  $n_2$  阶的 Nekrasov 矩阵, 其分块如(1)所示, 若  $1 \leq k \leq \min\{n_1, n_2\}$ ,  $S_1, S_2, S_3$  如(2)所示, 其中  $n = n_1 + n_2 - k$ , 且  $A_{22}$ ,  $B_{11}$  的主对角线元素全正(或全负),

则对于  $k$ -子直和  $C = A \oplus_k B$  有: 对任意的  $i \in S_1$ ,  $h_i(C) = h_i(A)$ 。

**证明:** 该引理的结论可由注 1 直接得到。

**引理 2.2 [9]:** 设  $A = [a_{ij}]$  是  $n_1$  阶严格对角占优矩阵,  $B = [b_{ij}]$  是  $n_2$  阶的 Nekrasov 矩阵, 其分块如(1)所示, 若  $1 \leq k \leq \min\{n_1, n_2\}$ ,  $S_1, S_2, S_3$  分布如(2)所示, 其中  $n = n_1 + n_2 - k$ ,  $A_{22}$ ,  $B_{11}$  的主对角线元素全正(或全负), 则对于  $k$ -子直和  $C = A \oplus_k B$  和  $i \in S_2$  有:

$$1) h_{n_1-k+1}(C) = h_{n_1-k+1}(A) - \sum_{\substack{j=n_1-k+2 \\ j \in S_2}}^{n_1} |a_{n_1-k+1,j}| + h_1(B) - \sum_{j=2}^k |b_{1j}| + \sum_{\substack{j=n_1-k+2 \\ j \in S_2}}^{n_1} |a_{n_1-k+1,j} + b_{1,j-n_1+k}| \triangleq \tilde{h}_{n_1-k+1};$$

2) 当  $n_1 - k + 2 \leq i \leq n_1 - 1$  时:

$$h_i(C) = h_i(A) - \sum_{\substack{j=n_1-k+1 \\ j \in S_2}}^{i-1} |a_{ij}| \frac{h_j(A)}{|a_{jj}|} - \sum_{\substack{j=i+1 \\ j \in S_2}}^{n_1} |a_{ij}| + h_{i-n_1+k}(B) - \sum_{j=1}^{i-n_1+k-1} |b_{i-n_1+k,j}| \frac{h_j(B)}{|b_{jj}|} - \sum_{j=i-n_1+k+1}^k |b_{i-n_1+k,j}|$$

$$+ \sum_{\substack{j=n_1-k+1 \\ j \in S_2}}^{i-1} |a_{ij} + b_{i-n_1+k,j-n_1+k}| \frac{\tilde{h}_j}{|a_{jj} + b_{j-n_1+k,j-n_1+k}|} + \sum_{\substack{j=i+1 \\ j \in S_2}}^{n_1} |a_{ij} + b_{i-n_1+k,j-n_1+k}| \triangleq \tilde{h}_i;$$

$$3) h_{n_1}(C) = h_{n_1}(A) - \sum_{\substack{j=n_1-k+1 \\ j \in S_2}}^{n_1-1} |a_{n_1,j}| \frac{h_j(A)}{|a_{jj}|} + h_k(B) - \sum_{j=1}^{k-1} |b_{k,j}| \frac{h_j(B)}{|b_{jj}|}$$

$$+ \sum_{\substack{j=n_1-k+1 \\ j \in S_2}}^{n_1-1} |a_{n_1,j} + b_{k,j-n_1+k}| \frac{\tilde{h}_j}{|a_{jj} + b_{j-n_1+k,j-n_1+k}|} \triangleq \tilde{h}_{n_1}.$$

**引理 2.3 [9]:** 设  $A = [a_{ij}]$  是  $n_1$  阶严格对角占优矩阵,  $B = [b_{ij}]$  是  $n_2$  阶的 Nekrasov 矩阵, 其分块如(1)所示, 若  $1 \leq k \leq \min\{n_1, n_2\}$ ,  $S_1, S_2, S_3$  如(2)所示, 其中  $n = n_1 + n_2 - k$ ,  $A_{22}$  和  $B_{11}$  的主对角线元素全正(或全负), 且

$$\frac{\tilde{h}_{n_1-k+1}}{|a_{n_1-k+1,n_1-k+1} + b_{11}|} \leq \frac{h_1(B)}{|b_{11}|}, \frac{\tilde{h}_{n_1-k+2}}{|a_{n_1-k+2,n_1-k+2} + b_{22}|} \leq \frac{h_2(B)}{|b_{22}|}, \dots, \frac{\tilde{h}_{n_1}}{|a_{n_1,n_1} + b_{kk}|} \leq \frac{h_k(B)}{|b_{kk}|},$$

则在  $A$  与  $B$  的  $k$ -子直和  $C = A \oplus_k B$  中, 对任意的  $i \in S_3$ ,  $h_i(C) \leq h_{i-n_1+k}(B)$  成立。

首先说明文献[9]中引理 2.2, 即本文引理 2.2 [9]不完整。在此, 我们先将结论进行更正。其证明方法同本文引理 2.4。

**引理 2.2 [9]更正:** 设  $A = [a_{ij}]$  是  $n_1$  阶严格对角占优矩阵,  $B = [b_{ij}]$  是  $n_2$  阶的 Nekrasov 矩阵, 其分块如(1)所示, 若  $1 \leq k \leq \min\{n_1, n_2\}$ ,  $S_1, S_2, S_3$  分布如(2)所示, 其中  $n = n_1 + n_2 - k$ ,  $A_{22}$ ,  $B_{11}$ , 的主对角线元素全正(或全负), 则对于  $k$ -子直和  $C = A \oplus_k B$ ,  $i \in S_2$  分三种情形讨论:

1) 当  $k = 1$  时:  $\tilde{h}_{n_1} = h_{n_1}(A) + h_1(B)$ 。

2) 当  $k = 2$  时: 分下面 2 种情形讨论:

$$\textcircled{1} h_{n_1-1}(C) = h_{n_1-1}(A) - |a_{n_1-1,n_1}| + h_1(B) - |b_{12}| + |a_{n_1-1,n_1} + b_{12}| \triangleq \tilde{h}_{n_1-1};$$

$$\textcircled{2} h_{n_1}(C) = h_{n_1}(A) - |a_{n_1,n_1-1}| \frac{h_{n_1-1}(A)}{|a_{n_1-1,n_1-1}|} + h_2(B) - |b_{21}| \frac{h_2(B)}{|b_{11}|} + |a_{n_1,n_1-1} + b_{21}| \frac{\tilde{h}_{n_1-1}}{|a_{n_1-1,n_1-1} + b_{11}|} \triangleq \tilde{h}_{n_1}.$$

3) 当  $2 < k \leq \min\{n_1, n_2\}$  时: 分下面 3 种情形讨论:

$$\textcircled{1} h_{n_1-k+1}(C) = h_{n_1-k+1}(A) - \sum_{\substack{j=n_1-k+2 \\ j \in S_2}}^{n_1} |a_{n_1-k+1,j}| + h_1(B) - \sum_{j=2}^k |b_{1j}| + \sum_{\substack{j=n_1-k+2 \\ j \in S_2}}^{n_1} |a_{n_1-k+1,j} + b_{1,j-n_1+k}| \triangleq \tilde{h}_{n_1-k+1};$$

② 当  $n_1 - k + 2 \leq i \leq n_1 - 1$  时:

$$h_i(C) = h_i(A) - \sum_{\substack{j=n_1-k+1 \\ j \in S_2}}^{i-1} |a_{ij}| \frac{h_j(A)}{|a_{jj}|} - \sum_{\substack{j=i+1 \\ j \in S_2}}^{n_1} |a_{ij}| + h_{i-n_1+k}(B) - \sum_{j=1}^{i-n_1+k-1} |b_{i-n_1+k,j}| \frac{h_j(B)}{|b_{jj}|} \\ - \sum_{\substack{j=i-n_1+k+1 \\ j \in S_2}}^k |b_{i-n_1+k,j}| + \sum_{\substack{j=n_1-k+1 \\ j \in S_2}}^{i-1} |a_{ij} + b_{i-n_1+k,j-n_1+k}| \frac{\tilde{h}_j}{|a_{jj} + b_{j-n_1+k,j-n_1+k}|} + \sum_{\substack{j=i+1 \\ j \in S_2}}^{n_1} |a_{ij} + b_{i-n_1+k,j-n_1+k}| \triangleq \tilde{h}_i;$$

$$h_{n_1}(C) = h_{n_1}(A) - \sum_{\substack{j=n_1-k+1 \\ j \in S_2}}^{n_1-1} |a_{n_1,j}| \frac{h_j(A)}{|a_{jj}|} + h_k(B) - \sum_{j=1}^{k-1} |b_{k,j}| \frac{h_j(B)}{|b_{jj}|}$$

$$\textcircled{3} + \sum_{\substack{j=n_1-k+1 \\ j \in S_2}}^{n_1-1} |a_{n_1,j} + b_{k,j-n_1+k}| \frac{\tilde{h}_j}{|a_{jj} + b_{j-n_1+k,j-n_1+k}|} \triangleq \tilde{h}_{n_1}.$$

**引理 2.4:** 设  $A = [a_{ij}]$  是  $n_1$  阶 Nekrasov 矩阵,  $B = [b_{ij}]$  是  $n_2$  阶的 Nekrasov 矩阵, 其分块如(1)所示, 若  $1 \leq k \leq \min\{n_1, n_2\}$ ,  $S_1, S_2, S_3$  分布如(2)所示, 其中  $n = n_1 + n_2 - k$ ,  $A_{22}$ ,  $B_{11}$  的主对角线元素全正(或全负), 则对于  $k$ -子直和  $C = A \oplus_k B$ ,  $i \in S_2$  分三种情形讨论:

1) 当  $k = 1$  时:  $\tilde{h}_{n_1} = h_{n_1}(A) + h_1(B)$ .

2) 当  $k = 2$  时: 分下面 2 种情形讨论:

$$\textcircled{1} h_{n_1-1}(C) = h_{n_1-1}(A) - |a_{n_1-1,n_1}| + h_1(B) - |b_{12}| + |a_{n_1-1,n_1} + b_{12}| \triangleq \tilde{h}_{n_1-1};$$

$$\textcircled{2} h_{n_1}(C) = h_{n_1}(A) - |a_{n_1,n_1-1}| \frac{h_{n_1-1}(A)}{|a_{n_1-1,n_1-1}|} + h_2(B) - |b_{21}| \frac{h_1(B)}{|b_{11}|} + |a_{n_1,n_1-1} + b_{21}| \frac{\tilde{h}_{n_1-1}}{|a_{n_1-1,n_1-1} + b_{11}|} \triangleq \tilde{h}_{n_1}.$$

3) 当  $2 < k \leq \min\{n_1, n_2\}$  时: 分下面 3 种情形讨论:

$$\textcircled{1} h_{n_1-k+1}(C) = h_{n_1-k+1}(A) - \sum_{\substack{j=n_1-k+2 \\ j \in S_2}}^{n_1} |a_{n_1-k+1,j}| + h_1(B) - \sum_{j=2}^k |b_{1j}| + \sum_{\substack{j=n_1-k+2 \\ j \in S_2}}^{n_1} |a_{n_1-k+1,j} + b_{1,j-n_1+k}| \triangleq \tilde{h}_{n_1-k+1};$$

② 当  $n_1 - k + 2 \leq i \leq n_1 - 1$  时:

$$h_i(C) = h_i(A) - \sum_{\substack{j=n_1-k+1 \\ j \in S_2}}^{i-1} |a_{ij}| \frac{h_j(A)}{|a_{jj}|} - \sum_{\substack{j=i+1 \\ j \in S_2}}^{n_1} |a_{ij}| + h_{i-n_1+k}(B) - \sum_{j=1}^{i-n_1+k-1} |b_{i-n_1+k,j}| \frac{h_j(B)}{|b_{jj}|} \\ - \sum_{\substack{j=i-n_1+k+1 \\ j \in S_2}}^k |b_{i-n_1+k,j}| + \sum_{\substack{j=n_1-k+1 \\ j \in S_2}}^{i-1} |a_{ij} + b_{i-n_1+k,j-n_1+k}| \frac{\tilde{h}_j}{|a_{jj} + b_{j-n_1+k,j-n_1+k}|} + \sum_{\substack{j=i+1 \\ j \in S_2}}^{n_1} |a_{ij} + b_{i-n_1+k,j-n_1+k}| \triangleq \tilde{h}_i;$$

$$h_{n_1}(C) = h_{n_1}(A) - \sum_{\substack{j=n_1-k+1 \\ j \in S_2}}^{n_1-1} |a_{n_1,j}| \frac{h_j(A)}{|a_{jj}|} + h_k(B) - \sum_{j=1}^{k-1} |b_{k,j}| \frac{h_j(B)}{|b_{jj}|}$$

$$\textcircled{3} + \sum_{\substack{j=n_1-k+1 \\ j \in S_2}}^{n_1-1} |a_{n_1,j} + b_{k,j-n_1+k}| \frac{\tilde{h}_j}{|a_{jj} + b_{j-n_1+k,j-n_1+k}|} \triangleq \tilde{h}_{n_1}.$$

**证明:** 设  $A = [a_{ij}]$  是  $n_1$  阶 Nekrasov 矩阵,  $B = [b_{ij}]$  是  $n_2$  阶的 Nekrasov 矩阵。下面分三种情形讨论:

情形一: 当  $k = 1$  时:

$$h_{n_1}(C) = \sum_{\substack{j=1 \\ j \in S_1}}^{n_1-1} |c_{n_1,j}| \frac{h_j(C)}{|c_{jj}|} + \sum_{\substack{j=n_1+1 \\ j \in S_3}}^n |c_{n_1,j}| = \sum_{j=1}^{n_1-1} |a_{n_1,j}| \frac{h_j(A)}{|a_{jj}|} + \sum_{j=2}^{n_2} |b_{1j}| = h_{n_1}(A) + h_1(B) = \tilde{h}_{n_1}.$$

情形二：当  $k = 2$  时：

$$\begin{aligned}
 h_{n_1-1}(C) &= \sum_{\substack{j=1 \\ j \in S_1}}^{n_1-2} |c_{n_1-1,j}| \frac{h_j(C)}{|c_{jj}|} + \sum_{j=n_1}^n |c_{n_1-1,j}| \\
 &= \sum_{\substack{j=1 \\ j \in S_1}}^{n_1-2} |c_{n_1-1,j}| \frac{h_j(C)}{|c_{jj}|} + |c_{n_1-1,n_1}| + \sum_{\substack{j=n_1+1 \\ j \in S_3}}^n |c_{n_1-1,j}| \\
 &= \sum_{j=1}^{n_1-2} |a_{n_1-1,j}| \frac{h_j(A)}{|a_{jj}|} + |a_{n_1-1,n_1} + b_{12}| + \sum_{j=3}^{n_2} |b_{1j}| \\
 &= h_{n_1-1}(A) - |a_{n_1-1,n_1}| + h_1(B) - |b_{12}| + |a_{n_1-1,n_1} + b_{12}| \triangleq \tilde{h}_{n_1-1} \\
 \\
 h_{n_1}(C) &= \sum_{j=1}^{n_1-1} |c_{n_1,j}| \frac{h_j(C)}{|c_{jj}|} + \sum_{j=n_1+1}^n |c_{n_1,j}| \\
 &= \sum_{\substack{j=1 \\ j \in S_1}}^{n_1-2} |c_{n_1,j}| \frac{h_j(C)}{|c_{jj}|} + |c_{n_1,n_1-1}| \frac{h_{n_1-1}(C)}{|c_{n_1-1,n_1-1}|} + \sum_{\substack{j=n_1+1 \\ j \in S_3}}^n |c_{n_1,j}| \\
 &= \sum_{\substack{j=1 \\ j \in S_1}}^{n_1-2} |a_{n_1,j}| \frac{h_j(A)}{|a_{jj}|} + |a_{n_1,n_1-1} + b_{21}| \frac{h_{n_1-1}(C)}{|a_{n_1-1,n_1-1} + b_{11}|} + \sum_{j=3}^{n_2} |b_{2j}| \\
 &= h_{n_1}(A) - |a_{n_1,n_1-1}| \frac{h_{n_1-1}(A)}{|a_{n_1-1,n_1-1}|} + h_2(B) - |b_{21}| \frac{h_1(B)}{|b_{11}|} + |a_{n_1,n_1-1} + b_{21}| \frac{\tilde{h}_{n_1-1}}{|a_{n_1-1,n_1-1} + b_{11}|} \triangleq \tilde{h}_{n_1}
 \end{aligned}$$

情形三：当  $2 < k \leq \min\{n_1, n_2\}$  时：分下面 3 种情形讨论：

情形 1：当  $i = n_1 - k + 1$  时：

$$\begin{aligned}
 h_{n_1-k+1}(C) &= \sum_{\substack{j=1 \\ j \in S_1}}^{n_1-k} |c_{n_1-k+1,j}| \frac{h_j(C)}{|c_{jj}|} + \sum_{\substack{j=n_1-k+2 \\ j \in S_2}}^{n_1} |c_{n_1-k+1,j}| + \sum_{\substack{j=n_1+1 \\ j \in S_3}}^n |c_{n_1-k+1,j}| \\
 &= \sum_{\substack{j=1 \\ j \in S_1}}^{n_1-k} |a_{n_1-k+1,j}| \frac{h_j(A)}{|a_{jj}|} + \sum_{\substack{j=n_1-k+2 \\ j \in S_2}}^{n_1} |a_{n_1-k+1,j} + b_{1,j-n_1+k}| + \sum_{j=k+1}^{n_2} |b_{1j}| \\
 &= h_{n_1-k+1}(A) - \sum_{\substack{j=n_1-k+2 \\ j \in S_2}}^{n_1} |a_{n_1-k+1,j}| + h_1(B) - \sum_{j=2}^k |b_{1j}| + \sum_{\substack{j=n_1-k+2 \\ j \in S_2}}^{n_1} |a_{n_1-k+1,j} + b_{1,j-n_1+k}| \triangleq \tilde{h}_{n_1-k+1}
 \end{aligned}$$

情形 2：当  $i = n_1 - k + 2 \leq n_1 - 1$  时：

$$\begin{aligned}
 h_{n_1-k+2}(C) &= \sum_{\substack{j=1 \\ j \in S_1}}^{n_1-k+1} |c_{n_1-k+2,j}| \frac{h_j(C)}{|c_{jj}|} + \sum_{\substack{j=n_1-k+3 \\ j \in S_2}}^{n_1} |c_{n_1-k+2,j}| + \sum_{\substack{j=n_1+1 \\ j \in S_3}}^n |c_{n_1-k+2,j}| \\
 &= \sum_{\substack{j=1 \\ j \in S_1}}^{n_1-k} |a_{n_1-k+2,j}| \frac{h_j(A)}{|a_{jj}|} + |c_{n_1-k+2,n_1-k+1}| \frac{h_{n_1-k+1}(C)}{|c_{n_1-k+1,n_1-k+1}|} + \sum_{\substack{j=n_1-k+3 \\ j \in S_2}}^{n_1} |a_{n_1-k+2,j} + b_{2,j-n_1+k}| + \sum_{j=k+1}^{n_2} |b_{2j}| \\
 &= h_{n_1-k+2}(A) - |a_{n_1-k+2,n_1-k+1}| \frac{h_{n_1-k+1}(A)}{|a_{n_1-k+1,n_1-k+1}|} - \sum_{\substack{j=n_1-k+3 \\ j \in S_2}}^{n_1} |a_{n_1-k+2,j}| + h_2(B) - |b_{21}| \frac{h_1(B)}{|b_{11}|} - \sum_{j=3}^k |b_{2j}| \\
 &\quad + |a_{n_1-k+2,n_1-k+1} + b_{21}| \frac{\tilde{h}_{n_1-k+1}}{|a_{n_1-k+1,n_1-k+1} + b_{11}|} + \sum_{\substack{j=n_1-k+3 \\ j \in S_2}}^{n_1} |a_{n_1-k+2,j} + b_{2,j-n_1+k}| \triangleq \tilde{h}_{n_1-k+2}
 \end{aligned}$$

当  $i = n_1 - k + 3 \leq n_1 - 1$  时:

$$\begin{aligned}
h_{n_1-k+3}(C) &= \sum_{j=1}^{n_1-k+2} |c_{n_1-k+3,j}| \frac{h_j(C)}{|c_{jj}|} + \sum_{\substack{j=n_1-k+4 \\ j \in S_2}}^{n_1} |c_{n_1-k+3,j}| + \sum_{\substack{j=n_1+1 \\ j \in S_3}}^n |c_{n_1-k+3,j}| \\
&= \sum_{j=1}^{n_1-k} |a_{n_1-k+3,j}| \frac{h_j(A)}{|a_{jj}|} + \sum_{j=n_1-k+1}^{n_1-k+2} |c_{n_1-k+3,j}| \frac{h_j(C)}{|c_{jj}|} + \sum_{\substack{j=n_1-k+4 \\ j \in S_2}}^{n_1} |a_{n_1-k+3,j} + b_{3,j-n_1+k}| + \sum_{j=k+1}^{n_2} |b_{3j}| \\
&= h_{n_1-k+3}(A) - \sum_{j=n_1-k+1}^{n_1-k+2} |a_{n_1-k+3,j}| \frac{h_j(A)}{|a_{jj}|} - \sum_{\substack{j=n_1-k+4 \\ j \in S_2}}^{n_1} |a_{n_1-k+3,j}| + h_3(B) - \sum_{j=1}^2 |b_{3j}| \frac{h_j(B)}{|b_{jj}|} - \sum_{j=4}^k |b_{3j}| \\
&\quad + \sum_{j=n_1-k+1}^{n_1-k+2} |a_{n_1-k+3,j} + b_{n_1-k+3-n_1+k,j-n_1+k}| \frac{\tilde{h}_j}{|a_{jj} + b_{j-n_1+k,j-n_1+k}|} + \sum_{\substack{j=n_1-k+4 \\ j \in S_2}}^{n_1} |a_{n_1-k+3,j} + b_{3,j-n_1+k}| \triangleq \tilde{h}_{n_1-k+3}
\end{aligned}$$

现假设  $i = n_1 - k + s - 1 \leq n_1 - 1$ , 其中  $(2 < s \leq k - 1)$ ,

$$\begin{aligned}
h_{n_1-k+s-1}(C) &= h_{n_1-k+s-1}(A) - \sum_{\substack{j=n_1-k+1 \\ j \in S_2}}^{n_1-k+s-2} |a_{n_1-k+s-1,j}| \frac{h_j(A)}{|a_{jj}|} - \sum_{\substack{j=n_1-k+s \\ j \in S_2}}^{n_1} |a_{n_1-k+s-1,j}| + h_{n_1-k+s-1-n_1+k}(B) \\
&\quad - \sum_{j=1}^{n_1-k+s-n_1+k-2} |b_{n_1-k+s-1-n_1+k,j}| \frac{h_j(B)}{|b_{jj}|} - \sum_{j=n_1-k+s-n_1+k}^k |b_{n_1-k+s-1-n_1+k,j}| \\
&\quad + \sum_{\substack{j=n_1-k+1 \\ j \in S_2}}^{n_1-k+s-2} |a_{n_1-k+s-1,j} + b_{n_1-k+s-1-n_1+k,j-n_1+k}| \frac{\tilde{h}_j}{|a_{jj} + b_{j-n_1+k,j-n_1+k}|} \\
&\quad + \sum_{\substack{j=n_1-k+s \\ j \in S_2}}^{n_1} |a_{n_1-k+s-1,j} + b_{n_1-k+s-1-n_1+k,j-n_1+k}| \triangleq \tilde{h}_{n_1-k+s-1}
\end{aligned}$$

成立。

则

$$\begin{aligned}
h_{n_1-k+s}(C) &= \sum_{j=1}^{n_1-k+s-1} |c_{n_1-k+s,j}| \frac{h_j(C)}{|c_{jj}|} + \sum_{j=n_1-k+s+1}^n |c_{n_1-k+s,j}| \\
&= \sum_{j=1}^{n_1-k} |a_{n_1-k+s,j}| \frac{h_j(A)}{|a_{jj}|} + \sum_{\substack{j=n_1-k+1 \\ j \in S_2}}^{n_1-k+s-1} |a_{n_1-k+s,j} + b_{n_1-k+s-n_1+k,j-n_1+k}| \frac{h_j(C)}{|c_{jj}|} \\
&\quad + \sum_{\substack{j=n_1-k+s+1 \\ j \in S_2}}^{n_1} |a_{n_1-k+s,j} + b_{n_1-k+s-n_1+k,j-n_1+k}| + \sum_{j=k+1}^{n_2} |b_{n_1-k+s-n_1+k,j}| \\
&= h_{n_1-k+s}(A) - \sum_{\substack{j=n_1-k+1 \\ j \in S_2}}^{n_1-k+s-1} |a_{n_1-k+s,j}| \frac{h_j(A)}{|a_{jj}|} - \sum_{\substack{j=n_1-k+s+1 \\ j \in S_2}}^{n_1} |a_{n_1-k+s,j}| + h_{n_1-k+s-n_1+k}(B) \\
&\quad - \sum_{j=1}^{n_1-k+s-n_1+k-1} |b_{n_1-k+s-n_1+k,j}| \frac{h_j(B)}{|b_{jj}|} - \sum_{j=n_1-k+s-n_1+k+1}^k |b_{n_1-k+s-n_1+k,j}| \\
&\quad + \sum_{\substack{j=n_1-k+1 \\ j \in S_2}}^{n_1-k+s-1} |a_{n_1-k+s,j} + b_{n_1-k+s-n_1+k,j-n_1+k}| \frac{\tilde{h}_j}{|a_{jj} + b_{j-n_1+k,j-n_1+k}|} \\
&\quad + \sum_{\substack{j=n_1-k+s+1 \\ j \in S_2}}^{n_1} |a_{n_1-k+s,j} + b_{n_1-k+s-n_1+k,j-n_1+k}| \triangleq \tilde{h}_{n_1-k+s}
\end{aligned}$$

。

情形 3: 当  $i = n_1$  时:

$$h_{n_1}(C) = h_{n_1}(A) - \sum_{\substack{j=n_1-k+1 \\ j \in S_2}}^{n_1-1} |a_{n_1,j}| \frac{h_j(A)}{|a_{jj}|} + h_k(B) - \sum_{j=1}^{k-1} |b_{k,j}| \frac{h_j(B)}{|b_{jj}|} + \sum_{\substack{j=n_1-k+1 \\ j \in S_2}}^{n_1-1} |a_{n_1,j} + b_{k,j-n_1+k}| \frac{\tilde{h}_j}{|a_{jj} + b_{j-n_1+k,j-n_1+k}|} \triangleq \tilde{h}_{n_1}. \quad \square$$

类似引理 2.3 [9] 证明下证引理 2.5。

**引理 2.5:** 设  $A = [a_{ij}]$  是  $n_1$  阶 Nekrasov 矩阵,  $B = [b_{ij}]$  是  $n_2$  阶的 Nekrasov 矩阵, 其分块如(1)所示, 若  $1 \leq k \leq \min\{n_1, n_2\}$ ,  $S_1, S_2, S_3$  如(2)所示, 其中  $n = n_1 + n_2 - k$ ,  $A_{22}$  和  $B_{11}$  的主对角线元素全正(或全负), 且

$$\begin{aligned} \frac{\tilde{h}_{n_1-k+1}}{|a_{n_1-k+1,n_1-k+1} + b_{11}|} &\leq \frac{h_1(B)}{|b_{11}|} \leq \frac{h_{n_1-k+1}(A)}{|a_{n_1-k+1,n_1-k+1}|}, \frac{\tilde{h}_{n_1-k+2}}{|a_{n_1-k+2,n_1-k+2} + b_{22}|} \leq \frac{h_2(B)}{|b_{22}|} \leq \frac{h_{n_1-k+2}(A)}{|a_{n_1-k+2,n_1-k+2}|}, \dots, \\ \frac{\tilde{h}_{n_1}}{|a_{n_1,n_1} + b_{kk}|} &\leq \frac{h_k(B)}{|b_{kk}|} \leq \frac{h_{n_1}(A)}{|a_{n_1,n_1}|}, \end{aligned}$$

则在  $A$  与  $B$  的  $k$ -子直和  $C = A \oplus_k B$  中, 对任意的  $i \in S_3$ ,  $h_i(C) \leq h_{i-n_1+k}(B)$  成立。

**证明:** 我们用数学归纳法证明。设  $A$  是  $n_1$  阶 Nekrasov 矩阵,  $B$  是  $n_2$  阶的 Nekrasov 矩阵。任取  $i \in S_3$ , 当  $i = n_1 + 1 \in S_3$  时:

$$\begin{aligned} h_i(C) &= h_{n_1+1}(C) = \sum_{j=1}^{n_1} |c_{n_1+1,j}| \frac{h_j(C)}{|c_{jj}|} + \sum_{j=n_1+2}^n |c_{n_1+1,j}| \\ &= \sum_{\substack{j=1 \\ j \in S_1}}^{n_1-k} |c_{n_1+1,j}| \frac{h_j(C)}{|c_{jj}|} + \sum_{\substack{j=n_1-k+1 \\ j \in S_2}}^{n_1} |c_{n_1+1,j}| \frac{h_j(C)}{|c_{jj}|} + \sum_{\substack{j=n_1+2 \\ j \in S_3}}^n |c_{n_1+1,j}| \\ &= |b_{k+1,1}| \frac{h_{n_1-k+1}(C)}{|c_{n_1-k+1,n_1-k+1}|} + \dots + |b_{k+1,k}| \frac{h_{n_1}(C)}{|c_{n_1,n_1}|} + \sum_{j=k+2}^{n_2} |b_{k+1,j}| \\ &= |b_{k+1,1}| \frac{\tilde{h}_{n_1-k+1}}{|a_{n_1-k+1,n_1-k+1} + b_{11}|} + \dots + |b_{k+1,k}| \frac{\tilde{h}_{n_1}}{|a_{n_1,n_1} + b_{kk}|} + \sum_{j=k+2}^{n_2} |b_{k+1,j}| \end{aligned} \quad (3)$$

由

$$h_{k+1}(B) = \sum_{j=1}^k |b_{k+1,j}| \frac{h_j(B)}{|b_{jj}|} + \sum_{j=k+2}^{n_2} |b_{k+1,j}| = |b_{k+1,1}| \frac{h_1(B)}{|b_{11}|} + \dots + |b_{k+1,k}| \frac{h_k(B)}{|b_{kk}|} + \sum_{j=k+2}^{n_2} |b_{k+1,j}|. \quad (4)$$

和条件

$$\begin{aligned} \frac{\tilde{h}_{n_1-k+1}}{|a_{n_1-k+1,n_1-k+1} + b_{11}|} &\leq \frac{h_1(B)}{|b_{11}|} \leq \frac{h_{n_1-k+1}(A)}{|a_{n_1-k+1,n_1-k+1}|}, \frac{\tilde{h}_{n_1-k+2}}{|a_{n_1-k+2,n_1-k+2} + b_{22}|} \leq \frac{h_2(B)}{|b_{22}|} \leq \frac{h_{n_1-k+2}(A)}{|a_{n_1-k+2,n_1-k+2}|}, \dots, \\ \frac{\tilde{h}_{n_1}}{|a_{n_1,n_1} + b_{kk}|} &\leq \frac{h_k(B)}{|b_{kk}|} \leq \frac{h_{n_1}(A)}{|a_{n_1,n_1}|} \end{aligned}$$

得

$$h_{n_1+1}(C) \leq h_{k+1}(B). \quad (5)$$

当  $i = n_1 + 2 \in S_3$  时:



$$\begin{aligned}
 h_i(C) &= h_{n_1+2}(C) = \sum_{\substack{j=1 \\ j \in S_1}}^{n_1-k} |c_{n_1+2,j}| \frac{h_j(C)}{|c_{jj}|} + \sum_{\substack{j=n_1-k+1 \\ j \in S_2}}^{n_1} |c_{n_1+2,j}| \frac{h_j(C)}{|c_{jj}|} + |c_{n_1+2,n_1+1}| \frac{h_{n_1+1}(C)}{|c_{n_1+1,n_1+1}|} + \sum_{\substack{j=n_1+3 \\ j \in S_3}}^n |c_{n_1+2,j}| \\
 &= |c_{n_1+2,n_1-k+1}| \frac{h_{n_1-k+1}(C)}{|c_{n_1-k+1,n_1-k+1}|} + \cdots + |c_{n_1+2,n_1}| \frac{h_{n_1}(C)}{|c_{n_1,n_1}|} + |c_{n_1+2,n_1+1}| \frac{h_{n_1+1}(C)}{|c_{n_1+1,n_1+1}|} + \sum_{\substack{j=n_1+3 \\ j \in S_3}}^n |c_{n_1+2,j}| \\
 &= |b_{k+2,1}| \frac{\tilde{h}_{n_1-k+1}}{|a_{n_1-k+1,n_1-k+1} + b_{11}|} + \cdots + |b_{k+2,k}| \frac{\tilde{h}_{n_1}}{|a_{n_1,n_1} + b_{kk}|} + |b_{k+2,k+1}| \frac{h_{n_1+1}(C)}{|b_{k+1,k+1}|} + \sum_{j=k+3}^{n_2} |b_{k+2,j}|
 \end{aligned} \quad (6)$$

由

$$h_{k+2}(B) = \sum_{j=1}^{k+1} |b_{k+2,j}| \frac{h_j(B)}{|b_{jj}|} + \sum_{j=k+3}^{n_2} |b_{k+2,j}| = |b_{k+2,1}| \frac{h_1(B)}{|b_{11}|} + \cdots + |b_{k+2,k+1}| \frac{h_{k+1}(B)}{|b_{k+1,k+1}|} + \sum_{j=k+3}^{n_2} |b_{k+2,j}|. \quad (7)$$

和条件

$$\begin{aligned}
 \frac{\tilde{h}_{n_1-k+1}}{|a_{n_1-k+1,n_1-k+1} + b_{11}|} &\leq \frac{h_1(B)}{|b_{11}|} \leq \frac{h_{n_1-k+1}(A)}{|a_{n_1-k+1,n_1-k+1}|}, \quad \frac{\tilde{h}_{n_1-k+2}}{|a_{n_1-k+2,n_1-k+2} + b_{22}|} \leq \frac{h_2(B)}{|b_{22}|} \leq \frac{h_{n_1-k+2}(A)}{|a_{n_1-k+2,n_1-k+2}|}, \cdots, \\
 \frac{\tilde{h}_{n_1}}{|a_{n_1,n_1} + b_{kk}|} &\leq \frac{h_k(B)}{|b_{kk}|} \leq \frac{h_{n_1}(A)}{|a_{n_1,n_1}|}
 \end{aligned}$$

及(5)得

$$h_{n_1+2}(C) \leq h_{k+2}(B). \quad (8)$$

现假设任取  $i = n_1 + 1, n_1 + 2, \dots, p$ ,  $h_i(C) \leq h_{i-n_1+k}(B)$  成立, 下证  $h_{p+1}(C) \leq h_{p+1-n_1+k}(B)$  成立, 其中  $n_1 + 1 \leq p < n$ .

当  $i = p + 1 \in S_3$  时:

$$\begin{aligned}
 h_{p+1}(C) &= \sum_{\substack{j=1 \\ j \in S_1}}^{n_1-k} |c_{p+1,j}| \frac{h_j(C)}{|c_{jj}|} + \sum_{\substack{j=n_1-k+1 \\ j \in S_2}}^{n_1} |c_{p+1,j}| \frac{h_j(C)}{|c_{jj}|} + \sum_{\substack{j=n_1+1 \\ j \in S_3}}^p |c_{p+1,j}| \frac{h_j(C)}{|c_{jj}|} + \sum_{\substack{j=p+2 \\ j \in S_3}}^n |c_{p+1,j}| \\
 &= \sum_{\substack{j=n_1-k+1 \\ j \in S_2}}^{n_1} |c_{p+1,j}| \frac{h_j(C)}{|c_{jj}|} + \sum_{\substack{j=n_1+1 \\ j \in S_3}}^p |c_{p+1,j}| \frac{h_j(C)}{|c_{jj}|} + \sum_{j=p-n_1+k+2}^{n_2} |b_{p-n_1+k+1,j}| \\
 &= |c_{p+1,n_1-k+1}| \frac{h_{n_1-k+1}(C)}{|c_{n_1-k+1,n_1-k+1}|} + \cdots + |c_{p+1,n_1}| \frac{h_{n_1}(C)}{|c_{n_1,n_1}|} + |b_{p-n_1+k+1,k+1}| \frac{h_{n_1+1}(C)}{|b_{k+1,k+1}|} \\
 &\quad + \cdots + |b_{p-n_1+k+1,p-n_1+k}| \frac{h_p(C)}{|b_{p-n_1+k,p-n_1+k}|} + \sum_{j=p-n_1+k+2}^{n_2} |b_{p-n_1+k+1,j}| \\
 &= |b_{p-n_1+k+1,1}| \frac{\tilde{h}_{n_1-k+1}}{|a_{n_1-k+1,n_1-k+1} + b_{11}|} + \cdots + |b_{p-n_1+k+1,k}| \frac{\tilde{h}_{n_1}}{|a_{n_1,n_1} + b_{kk}|} + |b_{p-n_1+k+1,k+1}| \frac{h_{n_1+1}(C)}{|b_{k+1,k+1}|} \\
 &\quad + \cdots + |b_{p-n_1+k+1,p-n_1+k}| \frac{h_p(C)}{|b_{p-n_1+k,p-n_1+k}|} + \sum_{j=p-n_1+k+2}^{n_2} |b_{p-n_1+k+1,j}|
 \end{aligned} \quad (9)$$

由

$$\begin{aligned}
h_{p+1-n_1+k}(B) &= \sum_{j=1}^{p-n_1+k} |b_{p-n_1+k+1,j}| \frac{h_j(B)}{|b_{jj}|} + \sum_{j=p-n_1+k+2}^{n_2} |b_{p-n_1+k+1,j}| \\
&= |b_{p-n_1+k+1,1}| \frac{h_1(B)}{|b_{11}|} + \cdots + |b_{p-n_1+k+1,p-n_1+k}| \frac{h_{p-n_1+k}(B)}{|b_{p-n_1+k,p-n_1+k}|} + \sum_{j=p-n_1+k+2}^{n_2} |b_{p-n_1+k+1,j}|. \quad (10)
\end{aligned}$$

和条件

$$\begin{aligned}
\frac{\tilde{h}_{n_1-k+1}}{|a_{n_1-k+1,n_1-k+1} + b_{11}|} &\leq \frac{h_1(B)}{|b_{11}|} \leq \frac{h_{n_1-k+1}(A)}{|a_{n_1-k+1,n_1-k+1}|}, \quad \frac{\tilde{h}_{n_1-k+2}}{|a_{n_1-k+2,n_1-k+2} + b_{22}|} \leq \frac{h_2(B)}{|b_{22}|} \leq \frac{h_{n_1-k+2}(A)}{|a_{n_1-k+2,n_1-k+2}|}, \cdots, \\
\frac{\tilde{h}_{n_1}}{|a_{n_1,n_1} + b_{kk}|} &\leq \frac{h_k(B)}{|b_{kk}|} \leq \frac{h_{n_1}(A)}{|a_{n_1,n_1}|}
\end{aligned}$$

及假设条件当  $i = n_1 + 1, n_1 + 2, \dots, p$  时  $h_i(C) \leq h_{i-n_1+k}(B)$  得

$$\begin{aligned}
\frac{\tilde{h}_{n_1-k+1}}{|a_{n_1-k+1,n_1-k+1} + b_{11}|} &\leq \frac{h_1(B)}{|b_{11}|} \leq \frac{h_{n_1-k+1}(A)}{|a_{n_1-k+1,n_1-k+1}|}, \quad \frac{\tilde{h}_{n_1-k+2}}{|a_{n_1-k+2,n_1-k+2} + b_{22}|} \leq \frac{h_2(B)}{|b_{22}|} \leq \frac{h_{n_1-k+2}(A)}{|a_{n_1-k+2,n_1-k+2}|}, \cdots, \\
\frac{\tilde{h}_{n_1}}{|a_{n_1,n_1} + b_{kk}|} &\leq \frac{h_k(B)}{|b_{kk}|} \leq \frac{h_{n_1}(A)}{|a_{n_1,n_1}|}
\end{aligned}$$

由此得  $C = A \oplus_k B$  中任取  $i \in S_3$ ,  $h_i(C) \leq h_{i-n_1+k}(B)$  成立。  $\square$

下面我们给出 Nekrasov 矩阵与 Nekrasov 矩阵的子直和是 Nekrasov 矩阵的一个充分条件。

**定理 2.6:** 设  $A = [a_{ij}]$  是  $n_1$  阶 Nekrasov 矩阵,  $B = [b_{ij}]$  是  $n_2$  阶的 Nekrasov 矩阵, 其分块如(1)所示, 若  $1 \leq k \leq \min\{n_1, n_2\}$ ,  $S_1, S_2, S_3$  如(2)所示, 其中  $n = n_1 + n_2 - k$ ,  $A_{22}$ ,  $B_{11}$  的主对角线元素全正(或全负), 且

$$\begin{aligned}
\frac{\tilde{h}_{n_1-k+1}}{|a_{n_1-k+1,n_1-k+1} + b_{11}|} &\leq \frac{h_1(B)}{|b_{11}|} \leq \frac{h_{n_1-k+1}(A)}{|a_{n_1-k+1,n_1-k+1}|}, \quad \frac{\tilde{h}_{n_1-k+2}}{|a_{n_1-k+2,n_1-k+2} + b_{22}|} \leq \frac{h_2(B)}{|b_{22}|} \leq \frac{h_{n_1-k+2}(A)}{|a_{n_1-k+2,n_1-k+2}|}, \cdots, \\
\frac{\tilde{h}_{n_1}}{|a_{n_1,n_1} + b_{kk}|} &\leq \frac{h_k(B)}{|b_{kk}|} \leq \frac{h_{n_1}(A)}{|a_{n_1,n_1}|}
\end{aligned}$$

则  $A$  与  $B$  的  $k$ -子直和  $C = A \oplus_k B$  是 Nekrasov 矩阵。

**证明:** 设  $A = [a_{ij}]$  是  $n_1$  阶 Nekrasov 矩阵,  $B = [b_{ij}]$  是  $n_2$  阶的 Nekrasov 矩阵, 下面分三种情形讨论。

情形 1: 当  $i \in S_1$  时:

$$|c_{ii}| = |a_{ii}| > h_i(A) \geq \sum_{j=1}^{i-1} |a_{ij}| \frac{h_j(A)}{|a_{jj}|} + \sum_{j=i+1}^{n_1} |a_{ij}| = \sum_{j=1}^{i-1} |c_{ij}| \frac{h_j(C)}{|c_{jj}|} + \sum_{j=i+1}^{n_1} |c_{ij}| = h_i(C).$$

情形 2: 当  $i = n_1 - k + 1 \in S_2$  时: 分 2 种情形讨论:

(1) 当  $k = 1$  时,  $i = n_1 - k + 1 \in S_2$ :

$$\begin{aligned}
|c_{n_1,n_1}| &= |a_{n_1,n_1}| + |b_{11}| > h_{n_1}(A) + h_1(B) = \sum_{j=1}^{n_1-1} |a_{n_1,j}| \frac{h_j(A)}{|a_{jj}|} + \sum_{j=2}^k |b_{1j}| + \sum_{j=k+1}^{n_2} |b_{1j}| \\
&= \sum_{\substack{j=1 \\ j \in S_1}}^{n_1-1} |c_{n_1-1+1,j}| \frac{h_j(C)}{|c_{jj}|} + \sum_{\substack{j=n_1-1+2 \\ j \in S_3}}^n |c_{n_1-1+1,j}| = h_{n_1-1+1}(C) \triangleq \tilde{h}_{n_1-1+1}
\end{aligned}$$

(2) 当  $2 \leq k \leq \min\{n_1, n_2\}$  时,  $i = n_1 - k + 1 \in S_2$  时:

$$\begin{aligned} |c_{n_1-k+1, n_1-k+1}| &= |a_{n_1-k+1, n_1-k+1}| + |b_{11}| \\ &> h_{n_1-k+1}(A) + h_1(B) = \sum_{j=1}^{n_1-k} |a_{n_1-k+1, j}| \frac{h_j(A)}{|a_{jj}|} + \sum_{j=n_1-k+2}^{n_1} |a_{n_1-k+1, j}| + \sum_{j=2}^k |b_{1j}| + \sum_{j=k+1}^{n_2} |b_{1j}| \\ &\geq \sum_{\substack{j=1 \\ j \in S_1}}^{n_1-k} |c_{n_1-k+1, j}| \frac{h_j(C)}{|c_{jj}|} + \sum_{\substack{j=n_1-k+2 \\ j \in S_2 \cup S_3}}^n |c_{n_1-k+1, j}| = h_{n_1-k+1}(C) \triangleq \tilde{h}_{n_1-k+1} \end{aligned}$$

现假设  $i < n_1 - k + q$  时,  $h_i(C) < |c_{ii}|$  成立, 则当  $i = n_1 - k + q \in S_2$  时:

$$\begin{aligned} |c_{n_1-k+q, n_1-k+q}| &= |a_{n_1-k+q, n_1-k+q}| + |b_{qq}| \\ &> h_{n_1-k+q}(A) + h_q(B) = \sum_{j=1}^{n_1-k+q-1} |a_{n_1-k+q, j}| \frac{h_j(A)}{|a_{jj}|} + \sum_{j=n_1-k+q+1}^{n_1} |a_{n_1-k+q, j}| + \sum_{j=1}^{q-1} |b_{qj}| \frac{h_j(B)}{|b_{jj}|} + \sum_{j=q+1}^{n_2} |b_{qj}| \\ &= \sum_{j=1}^{n_1-k} |a_{n_1-k+q, j}| \frac{h_j(A)}{|a_{jj}|} + \sum_{j=n_1-k+1}^{n_1-k+q-1} |a_{n_1-k+q, j}| \frac{h_j(A)}{|a_{jj}|} + \sum_{j=n_1-k+q+1}^{n_1} |a_{n_1-k+q, j}| + \sum_{j=1}^{q-1} |b_{qj}| \frac{h_j(B)}{|b_{jj}|} + \sum_{j=q+1}^{n_2} |b_{qj}| \end{aligned}$$

由条件

$$\begin{aligned} \frac{\tilde{h}_{n_1-k+1}}{|a_{n_1-k+1, n_1-k+1} + b_{11}|} &\leq \frac{h_1(B)}{|b_{11}|} \leq \frac{h_{n_1-k+1}(A)}{|a_{n_1-k+1, n_1-k+1}|}, \frac{\tilde{h}_{n_1-k+2}}{|a_{n_1-k+2, n_1-k+2} + b_{22}|} \leq \frac{h_2(B)}{|b_{22}|} \leq \frac{h_{n_1-k+2}(A)}{|a_{n_1-k+2, n_1-k+2}|}, \dots, \\ \frac{\tilde{h}_{n_1}}{|a_{n_1, n_1} + b_{kk}|} &\leq \frac{h_k(B)}{|b_{kk}|} \leq \frac{h_{n_1}(A)}{|a_{n_1, n_1}|} \end{aligned}$$

得

$$\begin{aligned} |c_{n_1-k+q, n_1-k+q}| &= |a_{n_1-k+q, n_1-k+q}| + |b_{qq}| \\ &> h_{n_1-k+q}(A) + h_q(B) = \sum_{\substack{j=1 \\ j \in S_1}}^{n_1-k} |c_{n_1-k+q, j}| \frac{h_j(C)}{|c_{jj}|} \\ &\quad + \left( \sum_{j=n_1-k+1}^{n_1-k+q-1} |a_{n_1-k+q, j}| \frac{h_j(A)}{|a_{jj}|} + \sum_{j=1}^{q-1} |b_{qj}| \frac{h_j(B)}{|b_{jj}|} \right) + \sum_{j=n_1-k+q+1}^{n_1} |a_{n_1-k+q, j}| + \sum_{j=q+1}^{n_2} |b_{qj}| \\ &\geq \sum_{\substack{j=1 \\ j \in S_1}}^{n_1-k} |c_{n_1-k+q, j}| \frac{h_j(C)}{|c_{jj}|} + \left( |a_{n_1-k+q, n_1-k+1}| + |b_{q1}| \right) \frac{h_1(B)}{|b_{11}|} \\ &\quad + \dots + \left( |a_{n_1-k+q, n_1-k+q-1}| + |b_{q, q-1}| \right) \frac{h_{q-1}(B)}{|b_{q-1, q-1}|} + \sum_{j=n_1-k+q+1}^n |c_{n_1-k+q, j}| \\ &\geq \sum_{\substack{j=1 \\ j \in S_1}}^{n_1-k} |c_{n_1-k+q, j}| \frac{h_j(C)}{|c_{jj}|} + |c_{n_1-k+q, n_1-k+1}| \frac{h_1(B)}{|b_{11}|} + \dots + |c_{n_1-k+q, n_1-k+q-1}| \frac{h_{q-1}(B)}{|b_{q-1, q-1}|} + \sum_{j=n_1-k+q+1}^n |c_{n_1-k+q, j}| \\ &= \sum_{\substack{j=1 \\ j \in S_1}}^{n_1-k} |c_{n_1-k+q, j}| \frac{h_j(C)}{|c_{jj}|} + \sum_{j=n_1-k+1}^{n_1-k+q-1} |c_{n_1-k+q, j}| \frac{h_{j-n_1+k}(B)}{|b_{j-n_1+k, j-n_1+k}|} + \sum_{j=n_1-k+q+1}^n |c_{n_1-k+q, j}| \end{aligned} \quad \circ \quad (11)$$

$$\begin{aligned}
h_{n_1-k+q}(C) &= \sum_{j=1}^{n_1-k+q-1} |c_{n_1-k+q,j}| \frac{h_j(C)}{|c_{jj}|} + \sum_{j=n_1-k+q+1}^n |c_{n_1-k+q,j}| \\
&= \sum_{\substack{j=1 \\ j \in S_1}}^{n_1-k} |c_{n_1-k+q,j}| \frac{h_j(C)}{|c_{jj}|} + \sum_{j=n_1-k+1}^{n_1-k+q-1} |c_{n_1-k+q,j}| \frac{h_j(C)}{|c_{jj}|} + \sum_{j=n_1-k+q+1}^n |c_{n_1-k+q,j}| \\
&= \sum_{\substack{j=1 \\ j \in S_1}}^{n_1-k} |c_{n_1-k+q,j}| \frac{h_j(C)}{|c_{jj}|} + \sum_{j=n_1-k+1}^{n_1-k+q-1} |a_{n_1-k+q,j} + b_{q,j-n_1+k}| \frac{\tilde{h}_j}{|a_{jj} + b_{j-n_1+k,j-n_1+k}|} + \sum_{j=n_1-k+q+1}^n |c_{n_1-k+q,j}|
\end{aligned} \quad (12)$$

于是由条件

$$\begin{aligned}
\frac{\tilde{h}_{n_1-k+1}}{|a_{n_1-k+1,n_1-k+1} + b_{11}|} &\leq \frac{h_1(B)}{|b_{11}|} \leq \frac{h_{n_1-k+1}(A)}{|a_{n_1-k+1,n_1-k+1}|}, \frac{\tilde{h}_{n_1-k+2}}{|a_{n_1-k+2,n_1-k+2} + b_{22}|} \leq \frac{h_2(B)}{|b_{22}|} \leq \frac{h_{n_1-k+2}(A)}{|a_{n_1-k+2,n_1-k+2}|}, \dots, \\
\frac{\tilde{h}_{n_1}}{|a_{n_1,n_1} + b_{kk}|} &\leq \frac{h_k(B)}{|b_{kk}|} \leq \frac{h_{n_1}(A)}{|a_{n_1,n_1}|}
\end{aligned}$$

及(11)、(12)得

$$h_{n_1-k+q}(C) \leq h_{n_1-k+q}(A) + h_q(B) < |c_{n_1-k+q,n_1-k+q}|.$$

因此对任意的  $i \in S_2$ ,  $h_i(C) < |c_{ii}|$  成立。

情形 3: 当  $i = n_1 + 1 \in S_3$  时:

$$\begin{aligned}
|c_{n_1+1,n_1+1}| &= |b_{k+1,k+1}| > h_{k+1}(B) \\
&= \sum_{j=1}^k |b_{k+1,j}| \frac{h_j(B)}{|b_{jj}|} + \sum_{j=k+2}^{n_2} |b_{k+1,j}| \\
&= |b_{k+1,1}| \frac{h_1(B)}{|b_{11}|} + \dots + |b_{k+1,k}| \frac{h_k(B)}{|b_{kk}|} + \sum_{j=k+2}^{n_2} |b_{k+1,j}|
\end{aligned} \quad (13)$$

$$\begin{aligned}
h_{n_1+1}(C) &= \sum_{j=1}^{n_1} |c_{n_1+1,j}| \frac{h_j(C)}{|c_{jj}|} + \sum_{j=n_1+2}^n |c_{n_1+1,j}| \\
&= \sum_{\substack{j=1 \\ j \in S_1}}^{n_1-k} |c_{n_1+1,j}| \frac{h_j(C)}{|c_{jj}|} + \sum_{\substack{j=n_1-k+1 \\ j \in S_2}}^{n_1} |c_{n_1+1,j}| \frac{h_j(C)}{|c_{jj}|} + \sum_{\substack{j=n_1+2 \\ j \in S_3}}^n |c_{n_1+1,j}| \\
&= |b_{k+1,1}| \frac{\tilde{h}_{n_1-k+1}}{|a_{n_1-k+1,n_1-k+1} + b_{11}|} + \dots + |b_{k+1,k}| \frac{\tilde{h}_{n_1}}{|a_{n_1,n_1} + b_{kk}|} + \sum_{j=k+2}^{n_2} |b_{k+1,j}|
\end{aligned} \quad (14)$$

由条件

$$\begin{aligned}
\frac{\tilde{h}_{n_1-k+1}}{|a_{n_1-k+1,n_1-k+1} + b_{11}|} &\leq \frac{h_1(B)}{|b_{11}|} \leq \frac{h_{n_1-k+1}(A)}{|a_{n_1-k+1,n_1-k+1}|}, \frac{\tilde{h}_{n_1-k+2}}{|a_{n_1-k+2,n_1-k+2} + b_{22}|} \leq \frac{h_2(B)}{|b_{22}|} \leq \frac{h_{n_1-k+2}(A)}{|a_{n_1-k+2,n_1-k+2}|}, \dots, \\
\frac{\tilde{h}_{n_1}}{|a_{n_1,n_1} + b_{kk}|} &\leq \frac{h_k(B)}{|b_{kk}|} \leq \frac{h_{n_1}(A)}{|a_{n_1,n_1}|}
\end{aligned}$$

及(13)、(14)得

$$h_{n_1+1}(C) \leq h_{k+1}(B) < |c_{n_1+1,n_1+1}|.$$

现设对任意  $n_1 < i < n_1 + r$ ,  $h_i(C) < |c_{ii}|$  成立, 则当  $i = n_1 + r \in S_3$  时:

$$|c_{n_1+r, n_1+r}| = |b_{r+k, r+k}| > h_{r+k}(B)。$$

由引理 2.5 知对任意的  $n_1 < i \leq n$ ,  $h_i(C) \leq h_{i-n_1+k}(B)$ 。由此得

$$h_{n_1+r}(C) < |c_{n_1+r, n_1+r}|。$$

因此对任意  $i \in S_1 \cup S_2 \cup S_3$ ,  $h_i(C) < |c_{ii}|$  成立, 从而  $C = A \oplus_k B$  是 Nekrasov 矩阵。 □

例 2.2: 设

$$A = \begin{bmatrix} 1.51 & -0.40 & -0.50 & -0.60 \\ 0 & 8.00 & 1.50 & -0.80 \\ -0.50 & -0.10 & 1.00 & -0.90 \\ -0.50 & -0.80 & -0.20 & 1.10 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 7.90 & -0.50 & -0.50 & -0.50 \\ -9.00 & 12.00 & -5.00 & -5.00 \\ -4.00 & -7.00 & 11.60 & -3.00 \\ -4.90 & -0.90 & -4.76 & 6.00 \end{bmatrix}。$$

容易验证  $A$  是 Nekrasov 矩阵,  $B$  是 Nekrasov 矩阵, 于是

$$C = A \oplus_3 B = \begin{bmatrix} 1.51 & -0.40 & -0.50 & -0.60 & 0 \\ 0 & 15.90 & 1.00 & -1.30 & -0.50 \\ -0.50 & -9.10 & 13.00 & -4.10 & -5.00 \\ -0.50 & -4.80 & -7.20 & 12.70 & -3.00 \\ 0 & -4.90 & -0.90 & -4.76 & 6.00 \end{bmatrix}。$$

通过计算可得:

$$\begin{aligned} h_2(A) &= 2.3000, \quad h_3(A) = 1.42548742, \quad h_4(A) = 1.01178623, \\ \frac{h_2(A)}{|a_{22}|} &= 0.2875, \quad \frac{h_3(A)}{|a_{33}|} = 1.42548742, \quad \frac{h_4(A)}{|a_{44}|} = 0.919856664, \\ h_1(B) &= 1.5000, \quad h_2(B) = 11.70886076, \quad h_3(B) = 10.58966245, \\ \frac{h_1(B)}{|b_{11}|} &= 0.18987342, \quad \frac{h_2(B)}{|b_{22}|} = 0.97573840, \quad \frac{h_3(B)}{|b_{33}|} = 0.91290194, \\ \tilde{h}_2 &= 2.800, \quad \tilde{h}_3 = 11.19920446, \quad \tilde{h}_4 = 10.54460808, \\ \frac{\tilde{h}_2}{|a_{22} + b_{11}|} &= 0.17610063, \quad \frac{\tilde{h}_3}{|a_{33} + b_{22}|} = 0.86147727, \quad \frac{\tilde{h}_4}{|a_{44} + b_{33}|} = 0.83028410, \\ \frac{\tilde{h}_2}{|a_{22} + b_{11}|} &\leq \frac{h_1(B)}{|b_{11}|} \leq \frac{h_2(A)}{|a_{22}|}, \quad \frac{\tilde{h}_3}{|a_{33} + b_{22}|} \leq \frac{h_2(B)}{|b_{22}|} \leq \frac{h_3(A)}{|a_{33}|}, \quad \frac{\tilde{h}_4}{|a_{44} + b_{33}|} \leq \frac{h_3(B)}{|b_{33}|} \leq \frac{h_4(A)}{|a_{44}|}。 \end{aligned}$$

于是由定理 2.6 知  $C = A \oplus_3 B$  是 Nekrasov 矩阵。事实上, 直接计算得:

$$h_1(C) = 1.5000, \quad h_2(C) = 2.8000, \quad h_3(C) = 11.19920446, \quad h_4(C) = 10.54460808, \quad h_5(C) = 5.59037494。$$

显然, 当  $i = 1, 2, 3, 4, 5$  时成立, 因此  $C = A \oplus_3 B$  是 Nekrasov 矩阵。

在定理 2.6 中, 当  $k$  分别取 1 和 2 时得如下两个推论。

**推论 2.7:** 设  $A = [a_{ij}]$  是  $n_1$  阶 Nekrasov 矩阵,  $B = [b_{ij}]$  是  $n_2$  阶的 Nekrasov 矩阵, 其分块如(1)所示, 若  $k = 1$ ,  $S_1 = \{1, 2, \dots, n_1 - 1\}$ ,  $S_2 = \{n_1\}$ ,  $S_3 = \{n_1 + 1, n_1 + 2, \dots, n\}$ , 其中  $n = n_1 + n_2 - 1$ , 且  $A_{22}$ ,  $B_{11}$  的主

对角线元素全正(或全负),  $\frac{h_{n_1}(A) + h_1(B)}{|a_{n_1, n_1} + b_{11}|} = \frac{h_1(B)}{|b_{11}|} = \frac{h_{n_1}(A)}{|a_{n_1, n_1}|}$ , 则  $C = A \oplus_1 B$  是 Nekrasov 矩阵。

**推论 2.8:** 设  $A = [a_{ij}]$  是  $n_1$  阶 Nekrasov 矩阵,  $B = [b_{ij}]$  是  $n_2$  阶的 Nekrasov 矩阵, 其分块如(1)所示, 若  $k = 2$ ,  $S_1 = \{1, 2, \dots, n_1 - 2\}$ ,  $S_2 = \{n_1 - 1, n_1\}$ ,  $S_3 = \{n_1 + 1, \dots, n\}$ , 其中  $n = n_1 + n_2 - 2$ , 且  $A_{22}$ ,  $B_{11}$  的主对角线元素全正(或全负),

$$\frac{h_{n_1-1}(A) - |a_{n_1-1, n_1}| + h_1(B) - |b_{12}| + |a_{n_1-1, n_1} + b_{12}|}{|a_{n_1-1, n_1-1} + b_{11}|} \leq \frac{h_1(B)}{|b_{11}|} \leq \frac{h_{n_1-1}(A)}{|a_{n_1-1, n_1-1}|},$$

$$\frac{h_{n_1}(A) - |a_{n_1, n_1-1}| \frac{h_{n_1-1}(A)}{|a_{n_1-1, n_1-1}|} + h_2(B) - |b_{21}| \frac{h_1(B)}{|b_{11}|} + |a_{n_1, n_1-1} + b_{21}| \frac{h_{n_1-1}(A) - |a_{n_1-1, n_1}| + h_1(B) - |b_{12}| + |a_{n_1-1, n_1} + b_{12}|}{|a_{n_1-1, n_1-1} + b_{11}|}}{|a_{n_1, n_1} + b_{22}|} \leq \frac{h_2(B)}{|b_{22}|} \leq \frac{h_{n_1}(A)}{|a_{n_1, n_1}|}.$$

则  $C = A \oplus_2 B$  是 Nekrasov 矩阵。

### 3. 结论

本文给出的定理能够判定在满足定理的条件下 Nekrasov 矩阵与 Nekrasov 矩阵的子直和仍为 Nekrasov 矩阵, 且只用到矩阵自身元素, 便于计算。

### 参考文献 (References)

- [1] Fallat, S.M. and Johnson, C.R. (1999) Sub-Direct Sums and Positivity Classes of Matrices. *Linear Algebra and Its Applications*, **288**, 149-173. [https://doi.org/10.1016/S0024-3795\(98\)10194-5](https://doi.org/10.1016/S0024-3795(98)10194-5)
- [2] Bru, R., Pedroche, F. and Szyld, D.B. (2005) Subdirect Sums of Nonsingular M-Matrices and of Their Inverse. *Electronic Journal of Linear Algebra*, **13**, 162-174. <https://doi.org/10.13001/1081-3810.1159>
- [3] Frommer, A. and Szyld, D.B. (1999) Weighted Max Norms, Splittings, and Overlapping Additive Schwarz Iterations. *Numerische Mathematik*, **83**, 259-278. <https://doi.org/10.1007/s002110050449>
- [4] Bru, R., Pedroche, F. and Szyld, D.B. (2005) Additive Schwarz Iterations for Markov Chains. *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications*, **27**, 445-458. <https://doi.org/10.1137/040616541>
- [5] Bru, R., Pedroche, F. and Szyld, D.B. (2006) Subdirect Sums of S-Strictly Diagonally Dominant Matrices. *Electronic Journal of Linear Algebra*, **15**, 201-209. <https://doi.org/10.13001/1081-3810.1230>
- [6] Zhu, Y. and Huang, T.Z. (2007) Subdirect Sum of Doubly Diagonally Dominant Matrices. *Electronic Journal of Linear Algebra*, **16**, 171-182. <https://doi.org/10.13001/1081-3810.1192>
- [7] Bru, R., Cvetkovic, L., Kostic, V. and Pedroche, F. (2010) Sums of Strictly Diagonally Dominant Matrices. *Linear and Multilinear Algebra*, **58**, 75-78. <https://doi.org/10.1080/03081080802379725>
- [8] Li, C.Q., Liu, Q.L., Gao, L. and Li, Y.T. (2016) Subdirect Sums of Nekrasov Matrices. *Linear and Multilinear Algebra*, **64**, 208-218. <https://doi.org/10.1080/03081087.2015.1032198>
- [9] 赵晶, 胡纳炎, 李耀堂. 严格对角占优矩阵与 Nekrasov 矩阵的子直和[J]. *应用数学进展*. 2016;5(3):505-515.
- [10] Cvetkovic, L. (2006) H-Matrix Theory vs. Eigenvalue Location. *Numerical Algorithms*, **42**, 229-245. <https://doi.org/10.1007/s11075-006-9029-3>
- [11] Horn, R.A. and Johnson, C.R. (1985) *Matrix Analysis*. Cambridge University Press, Cambridge. <https://doi.org/10.1017/CBO9780511810817>
- [12] Berman, A. and Plemmons, R.J. (1979) *Nonnegative Matrices in the Mathematical Sciences*. Academic Press, New York.
- [13] Li, W. (1998) On Nekrasov Matrices. *Linear Algebra and Its Applications*, **281**, 87-96. [https://doi.org/10.1016/S0024-3795\(98\)10031-9](https://doi.org/10.1016/S0024-3795(98)10031-9)

- 
- [14] Cvetkovic, L., Dai, P.F., Doroslovackic, K. and Li, Y.T. (2013) Infinity Norm Bounds for the Inverse of Nekrasov Matrices. *Applied Mathematics and Computation*, **219**, 5020-5024. <https://doi.org/10.1016/j.amc.2012.11.056>

期刊投稿者将享受如下服务：

1. 投稿前咨询服务 (QQ、微信、邮箱皆可)
2. 为您匹配最合适的期刊
3. 24 小时以内解答您的所有疑问
4. 友好的在线投稿界面
5. 专业的同行评审
6. 知网检索
7. 全网络覆盖式推广您的研究

投稿请点击：<http://www.hanspub.org/Submission.aspx>

期刊邮箱：[aam@hanspub.org](mailto:aam@hanspub.org)