Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, 2017, 6(2), 212-217
Published Online March 2017 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2017.62024

Hans汉斯

Application of (G'/G^2) Expansion Method for Solving Schrödinger's Equation with Three-Order Dispersion

Yanni Zhang[1], Liping Zhang[2], Jing Pang[1*]

[1]College of Sciences, Inner Mongolia University of Technology, Hohhot Inner Mongolia
[2]The Institute of Products Quality Inspection and Research Inner Mongolia, Hohhot Inner Mongolia
Email: 641992269@qq.com, *pang_j@imut.edu.cn

Received: Mar. 9th, 2017; accepted: Mar. 27th, 2017; published: Mar. 30th, 2017

Abstract

In today's information society, information is growing exponentially; the traditional communication technology has been unable to meet the needs of society, so the high speed optical fiber communication speed, a new generation of large transmission capacity has become the most ideal solution. But it has more practical significance on ultrashort pulse transmission research in the field of optical communication [1]. By theoretical analysis, high order dispersion effect on the propagation of ultrashort pulse cannot be ignored, with three or five times with high order nonlinear term Schrodinger equations to describe the transmission rule. This paper applies the analytical method for solving nonlinear Schrodinger equations of the three order dispersion term expansion, by solving many new equations are obtained for different parameters in the condition of equation. To understand equations and parameters influence on soliton solutions and the future study on optical soliton, this physical meaning has reference value.

Keywords

Optical Soliton, (G'/G^2) Expansion Method, Three Order Dispersion Terms, Analytical Solutions

应用(G'/G^2)展开法求解含三阶色散项的薛定谔方程

张艳妮[1]，张丽萍[2]，庞　晶[1*]

[1]内蒙古工业大学理学院，内蒙古 呼和浩特

*通讯作者。

文章引用: 张艳妮, 张丽萍, 庞晶. 应用(G'/G^2)展开法求解含三阶色散项的薛定谔方程[J]. 应用数学进展, 2017, 6(2): 212-217. https://doi.org/10.12677/aam.2017.62024

[2]内蒙古自治区产品质量检验研究院，内蒙古 呼和浩特
Email: 641992269@qq.com, *pang_j@imut.edu.cn

收稿日期：2017年3月9日；录用日期：2017年3月27日；发布日期：2017年3月30日

摘 要

在当今的信息社会中，信息量以指数级增长，传统的通信技术已经不能满足社会需要，所以新一代的高速率、大传输容量的高速光纤通信便成为了最理想方案。而在光纤通信领域中对超短脉冲传输的研究更有其实际的意义[1]。经理论分析，光纤色散的高阶效应对超短脉冲传输的影响不可忽略，需用含三次或五次高阶非线性项的薛定谔方程来描述其传输规律。本文将应用(G'/G^2)展开法求解含三阶色散项的非线性薛定谔方程的解析解，通过求解方程得到了方程的在取不同参数条件时的许多新解。相信本文对理解方程的物理意义及参数条件对孤子解的影响，对未来光纤孤子通信的研究具有参考价值。

关键词

光孤子通信，(G'/G^2)展开法，三阶色散项，解析解

1. 引言

随着科学技术的不断发展，非线性发展方程应用的领域的和其作用已经变得越来越广泛。非线性薛定谔方程(NLSE)

$$iu_t+\frac{1}{2}u_{xx}+|u|^2u=0.$$

是一种描述光波在弱非线性色散介质中传播的方程，近年来被广泛的应用到通信、非线性的光学现象以及固体中热脉冲传播等[2]领域。但NLSE是一个理想化的方程，它忽略了高阶的色散效应和自频移效应等，不能很好地处理非零边界的问题，当我们必须考虑这些效应的时候，NLSE方程的可积性就被破坏了。

最近已有多篇文献对其进行研究，在探讨波长远离零色散波长的暗孤子脉冲的传输特性中，一般认为在零色散波长附近产生暗孤子所需要的功率可大大降低，在零色散波长附近，即使二阶色散不为零，对三阶色散的研究也是十分重要的[3] [4]。但采用的方法大多数是数值计算。为此，科研工作者们提出了许多有效的解析方法，例如F-展开法[5]，齐次平衡法[6] [7]，雅可比椭圆函数法[8]和(G'/G)展开法[9] [10] [11]等。本文利用(G'/G^2)解析展开法求解了含三阶色散的非线性薛定谔方程，得到孤子精确行波解.

2. 方法的引入

非线性偏微分方程如下:

$$P\left(u+u_x+u_t+u_{xx}+u_{xt}+u_{tt}+\cdots\right)=0. \tag{1}$$

其中，$u=u(x,t)$ 是未知函数。

步骤 1 通过行波变换将变量 x，t 转化为行波变量 ξ，假设

$$u(\xi)=\varphi(\xi)\mathrm{e}^{i(kx-\omega t)}, \tag{2}$$

其中，$\xi=x-ct$。

这样(1)就可以转化为只含有行波变量 ξ 的常微分方程

$$P(\varphi,\varphi',\varphi'',\cdots)=0, \tag{3}$$

步骤 2 设 $\varphi(\xi)$ 可以表示为 G'/G^2 的多项式

$$\varphi(\xi)=\sum_{i=0}^{n}a_i\left(G'/G^2\right), \tag{4}$$

其中 $G=G(\xi)$ 满足 Riccati 方程：

$$\left(G'/G^2\right)'=\mu+\lambda\left(G'/G^2\right)^2, \tag{5}$$

方程(4)和(5)中 $a_i\ (i,2,\cdots,n)$ 及 μ，λ 都是待定常数，正整数 n 由齐次平衡法确定。由方程(5)可得[12]：

当 $\lambda\mu>0$ 时，

$$\frac{G'}{G^2}=\sqrt{\frac{\mu}{\lambda}}\frac{c_1\cos\left(\sqrt{\mu\lambda}\xi\right)+c_2\sin\left(\sqrt{\mu\lambda}\xi\right)}{c_1\sin\left(\sqrt{\mu\lambda}\xi\right)-c_2\sin\left(\sqrt{\mu\lambda}\xi\right)}, \tag{6}$$

当 $\lambda\mu<0$ 时

$$\frac{G'}{G^2}=-\frac{\sqrt{|\mu\lambda|}}{\lambda}+\frac{\sqrt{|\mu\lambda|}}{2}\cdot\frac{c_1\sinh\left(\sqrt{\mu\lambda}\xi\right)+c_2\cosh\left(\sqrt{\mu\lambda}\xi\right)}{c_1\cosh\left(\sqrt{\mu\lambda}\xi\right)+c_2\sinh\left(\sqrt{\mu\lambda}\xi\right)}, \tag{7}$$

当 $\lambda\neq0,\mu=0$ 时，

$$\frac{G'}{G^2}=-\frac{c_1}{\lambda\left(c_1\xi+c_2\right)}. \tag{8}$$

其中 c_1 和 c_2 是任意常数。

步骤 3 把(4)式代入(3)式并且利用(5)式，可以得到一些关于(G'/G^2)的多项式，令各项系数为零，得到关于系数 $a_i\ (i,2,\cdots,n)$，λ，μ 的代数方程组。

步骤 4 借助数学软件求解上述代数方程组，得出系数 a_i，代入(4)式，最终确定方程解。

3. 含三阶色散项的非线性薛定谔方程的解析解

描述在考虑三阶色散项的情况下，超短光脉冲在光纤中的传播，其方程为如下非线性薛定谔方程[13]：

$$iu_t+u_{xx}+\alpha|u|^2u+i\left[\gamma_1u_{xxx}+\gamma_2|u|^2u_x+\gamma_3\left(|u|^2\right)_xu\right]=0. \tag{9}$$

其中：u 是关于 x,t 的复函数；参数 $\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3$ 为色散项，γ_1 为三阶色散项，α 为光纤损耗。这个方程是不具有Painleve’性质。

引入变换

$$u(\xi)=\varphi(\xi)\mathrm{e}^{i(kx-\omega t)},\ \xi=x-ct \tag{10}$$

其中 k,ω 分别表述波速和相速度，c 是包络速度。

将方程(9)转化成如下形式：

$$i\left(\gamma_1\varphi''' - 3\gamma_1 k^2\varphi' + \gamma_2\varphi^2\varphi' + 2\gamma_3\varphi^2\varphi' - c\varphi' + 2k\varphi'\right) + \left(\omega\varphi + \varphi'' - k^2\varphi + \alpha\varphi^3 - 3\gamma_1 k\varphi'' + \gamma_1 k^3\varphi - \gamma_2 k\varphi^3\right) = 0.$$

令实部和虚部分别为零，得到两个关于ξ的方程

$$\gamma_1\varphi''' + \left(2k - c - 3\gamma_1 k^2\right)\varphi' + \left(\gamma_2 + 2\gamma_3\right)\varphi^2\varphi' = 0, \tag{11}$$

$$\varphi''\left(1 - 3\gamma_1 k\right) + \left(\omega - k^2 + \gamma_1 k^3\right)\varphi + \left(\alpha - \gamma_2 k\right)\varphi^3 = 0. \tag{12}$$

对方程(11)进行积分并令积分系数为零，得

$$\gamma_1\varphi'' + \left(2k - c - 3\gamma_1 k^2\right)\varphi + \left(\frac{1}{3}\gamma_2 + \frac{2}{3}\gamma_3\right)\varphi^3 = 0, \tag{13}$$

比较方程(12)和方程(13)有相同的解，故

$$k = \frac{\gamma_2 + 2\gamma_3 - 3\gamma_1\alpha}{6\gamma_1\gamma_3}, \omega = \frac{\left(1 - 3\gamma_1 k\right)\left(2k - c - 3\gamma_1 k^2\right)}{\gamma_1} + k^2 - \gamma_1 k^3. \tag{14}$$

若k和ω满足方程(14)，我们只需求解方程(13)。通过(G'/G^2)展开法和齐次平衡原则，得到方程(13)的解的形式为(2)式，其中

$$\varphi(\xi) = a_0 + a_1\left(G'/G^2\right), \tag{15}$$

而$G = G(\xi)$满足(5)式。

将(15)式代入(13)式，并利用(5)式化简得到关于$\varphi(\xi)$的多项式，合并同类项，令各项系数为零，则得到如下代数方程组：

$$\left(\frac{1}{3}\gamma_2 + \frac{2}{3}\gamma_3\right)a_0^3 + \left(2k - c - 3\gamma_1 k^2\right)a_0 = 0,$$

$$2r_1\lambda\mu a_1 + \left(2k - c - 3r_1 k^2\right)a_1 + 3\left(\frac{1}{3}r_2 + \frac{2}{3}r_3\right)a_0^2 a_1 = 0,\ 3\left(\frac{1}{3}\gamma_2 + \frac{2}{3}\gamma_3\right)a_0 a_1^2 = 0,$$

$$2\gamma_1\lambda^2 a_1 + \left(\frac{1}{3}\gamma_3 + \frac{2}{3}\gamma_3\right)a_1^3 = 0.$$

$a_i \neq 0$应用软件 Mathematic 求解，可得如下四组解

$$a_0 = \frac{\pm\sqrt{-\left(2k - c - 3\gamma_1 k^2\right) - 2\lambda\mu\gamma_1}}{\sqrt{\gamma_2 + 2\gamma_3}},\quad a_1 = \frac{\pm i\sqrt{2\gamma_1}\lambda}{\sqrt{\frac{1}{3}\gamma_2 + \frac{2}{3}\gamma_3}}. \tag{16}$$

把(15)式和(16)式代回(10)式，可得方程(9)的解析解，如下：

当$\lambda\mu > 0$时，

$$u_1(\xi) = \left(\frac{\pm\sqrt{-\left(2k - c - 3\gamma_1 k^2\right) - 2\lambda\mu\gamma_1}}{\sqrt{\gamma_2 + 2\gamma_3}} \pm \frac{i\sqrt{2\gamma_1}\lambda}{\sqrt{\frac{1}{3}\gamma_2 + \frac{2}{3}\gamma_3}} \cdot \frac{c_1\cos\left(\sqrt{\lambda\mu}\xi\right) + c_2\sin\left(\sqrt{\lambda\mu}\xi\right)}{c_1\sin\left(\sqrt{\lambda\mu}\xi\right) - c_2\sin\left(\sqrt{\lambda\mu}\xi\right)}\right)e^{i(kx - \omega t)},$$

当$\lambda\mu < 0$时，

$$u_2(\xi)=\left(\frac{\pm\sqrt{-\left(2k-c-3\gamma_3k^2\right)-2\lambda\mu\gamma_1}}{\sqrt{\gamma_2+2\gamma_3}}\mp\frac{i\sqrt{2\gamma_1}\lambda}{\sqrt{\frac{1}{3}\gamma_2+\frac{2}{3}\gamma_3}}\right.$$
$$\left.\cdot\left(\frac{\sqrt{|\lambda\mu|}}{\lambda}-\frac{\sqrt{|\lambda\mu|}}{2}\cdot\frac{c_1\sinh\left(\sqrt{\lambda\mu}\xi\right)+c_2\cosh\left(\sqrt{\lambda\mu}\xi\right)}{c_1\cosh\left(\sqrt{\lambda\mu}\xi\right)+c_2\sinh\left(\sqrt{\lambda\mu}\xi\right)}\right)\right)\mathrm{e}^{i(kx-\omega t)},$$

当 $\lambda\neq0,\mu=0$ 时，

$$u_3(\xi)=\left(\frac{\pm\sqrt{-\left(2k-c-3\gamma_1k^2\right)-2\lambda\mu\gamma_1}}{\sqrt{\gamma_2+2\gamma_3}}\pm\frac{i\sqrt{2\gamma_1}\lambda}{\sqrt{\frac{1}{3}\gamma_2+\frac{2}{3}\gamma_3}}\cdot\frac{c_1}{(c_1\xi+c_2)\lambda}\right)\mathrm{e}^{i(kx-\omega t)}.$$

其中 c,c_1 和 c_2 是任意常数。

4. 结束语

在实际情况下，光纤色散的高阶效应对超短脉冲传输的影响不可忽略，它除导致光脉冲展宽，引起脉冲的畸变外，还将引起脉冲边缘的振荡。对于光通信来说，脉冲的展宽以及脉冲的边缘振荡意味着误码率的提高，导致通信质量下降[14] [15]。超短脉冲传输过程中即使二阶色散项不为零，也需要考虑三阶色散项的影响，本文通过应用新近提到的(G'/G^2)展开法，以广义的非线性薛定谔方程为例，尝试着对的含三阶色散项的非线性薛定谔方程进行求解，基本思想是利用行波变换把非线性薛定谔方程化成常微分方程，再应用(G'/G^2)展开法构造出非线性薛定谔方程的解析解。在计算过程中还借助计算机更为快捷简便的进行求解。因此该方法可以应用到其他更多的非线性偏微分方程，求得它们的精确解，为工程计算、光学、计算科学等学科的研究工作，提供理论依据。

基金项目

国家自然科学基金项目(10561151)；内蒙古高等学校重点研究项目(NJZZ14053)。

参考文献 (References)

[1] 李玉权，崔敏. 光波导理论与技术[M]. 北京：人民邮电出版社, 2002.

[2] 郭玉翠. 非线性偏微分方程引论[M]. 北京：清华大学出版社, 2008.

[3] 曹晓亮，林机. 含三阶色散项的非线性薛定谔方程的微扰对称和近似解[J]. 浙江师范大学学报(自然科学版), 2010, 33(1): 56-62.

[4] 陈宗蕴，黄念宁. 光纤中暗孤子传输理论[J]. 物理学进展, 1994(4).

[5] Zhang, J.-F., Dai, C.-Q., Yang, Q. and Zhu, J.-M. (2005) Variable Coefficient F-Expansion Method and Its Application to Nonlinear Schrodinger Equation. *Optics Communications*, **252**, 408-421. https://doi.org/10.1016/j.optcom.2005.04.043

[6] 范恩贵，张鸿庆. 非线性孤子方程的齐次平衡法[J]. 物理学报, 1998, 47(3): 353-361.

[7] 王明亮，李志斌，周宇斌. 齐次平衡原则及其应用[J]. 兰州大学学报(自然科学版), 1999, 35(3): 8-15.

[8] 刘式达，傅遵涛，刘式适，等. 非线性波动方程的 Jacobi 椭圆函数包络周期解[J]. 物理学报，2002，51(4): 718-721.

[9] Wang, M., Li, X. and Zhang, J. (2008) The (G'/G)-Expansion Method and Travelling Wave Solutions of Nonlinear Evolution Equations in Mathematical Physics. *Physics Letters A*, **372**, 417-423.

https://doi.org/10.1016/j.physleta.2007.07.051

[10] 庞晶，靳玲花，应孝梅. 利用(G'/G)展开法求解广义变系数 Burgers 方程[J]. 量子电子学报，2011，28(6)：674-681.

[11] 庞晶，靳玲花，赵强. 变系数非线性发展方程的 G'/G 展开解[J]. 物理学报, 2012, 61(14): 1-5.

[12] 陈继培，陈浩. (G'/G^2)展开法及其在耦合非线性 Klein-Gordon 方程中的应用[J]. 华南师范大学学报(自然科学版), 2012, 44(2): 63-66.

[13] 李志斌. 非线性数学物理方程的行波解[M]. 北京：科学出版社, 2007.

[14] 张山彪，王文军，毕军，等. 超短激光脉冲技术及其研究进展[J]. 激光杂志, 2003, 24(4): 11-13.

[15] 钱士雄，王恭明. 非线性光学[M]. 上海：复旦大学出版社, 2001.