

The Time Setting Optimization Problem of Signal Lights of π Type Intersection

Lu Wang^{1,2}, Liyuan Zhang³, Nana Zhang¹

¹School of Mathematics and Statistics, Linyi University, Linyi Shandong

²Cui Jiayu Center Middle School, Yishui Shandong

³Linyi No. 1 High School, Linyi Shandong

Email: 15865961716@163.com, zhangliyuan612@163.com, zhangnana01@sina.com

Received: Jun. 22nd, 2017; accepted: Jul. 15th, 2017; published: Jul. 18th, 2017

Abstract

Based on the “average flow of traffic”, “minimum time required for safe crossing the road” and other factors, through data collection and mathematical analysis, we establish a reasonable mathematical model of the π type intersection. Through the mathematical model, the time setting of the traffic lights of the π type intersection is analyzed to calculate the optimal time setting of the signal lights and to propose the improvement plan, so as to reduce the vehicle and pedestrian waiting time to the maximum extent, and then, alleviate the congestion situation of the vehicle.

Keywords

Traffic Flow, Minimum Time, Time Optimization, Mathematical Model Template, π Type Intersection

兀型路口信号灯时间设置优化问题

王璐^{1,2}, 张沥元³, 张娜娜¹

¹临沂大学数学与统计学院, 山东 临沂

²沂水县崔家峪镇中心初中, 山东 沂水

³临沂一中, 山东 临沂

Email: 15865961716@163.com, zhangliyuan612@163.com, zhangnana01@sina.com

收稿日期: 2017年6月22日; 录用日期: 2017年7月15日; 发布日期: 2017年7月18日

摘要

本文依据“车流平均流量”、“安全过马路需要的最低限度时间”等因素, 通过数据收集和数学分析,

建立合理的兀型路口数学模型。通过数学模型，对兀型路口红绿灯时间设置进行分析，从而计算出信号灯的最优时间设置，提出改善方案，以此在最大程度上减少车辆等待时间，从而缓解车辆拥堵状况。

关键词

车流量，最低限度时间，时间优化，数学模型，兀型路口

Copyright © 2017 by authors and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

随着经济社会的迅速发展，机动车数量日益增加，道路拥堵成为一种必然现象。目前，不仅北京上海这样的大城市道路拥堵，而且省会一级的甚至地市一级的城市也出现相当严重的拥堵现象。为了缓解交通堵塞的问题，一些国家控制交通拥堵现象一般分为以下三种类型[1]：1) 美国实施公交优先。美国试图提高公交服务质量，提高总线速度和舒适度，让人尽可能多的乘坐公共汽车，以减少私家车数量。2) 伦敦征收税收制度，即进入城市中心交通拥挤税。2003年来，在伦敦进入城市的8平方英里的汽车，从早上七点到下午六点半，要交5英镑的“拥堵费”，并提高燃油税。另外，为缓解每天早晨上班高峰期交通阻塞的情况，英国政府准备采取措施，限制家长每天用私家车接送孩子上学。3) 英国因地制宜根据自己国家道路的特点、交通流量和车辆特征，利用周期短，信号配时的多阶段分布，使道路上的车辆川流不息，同时可以快速通过路口。在交通工程系统协调方面，英国市政当局根据道路承载能力和汽车流量情况，设计出符合当地特殊情况的控制方案，并在实施过程中不断调整交通流量和信号灯变换频率，使信号控制系统总是能与路面情况相近。

2. 问题与设计

由于地理原因，历史原因等因素，城市道路分布中大量存在着类似“兀”、“大”、“不”、“木”等形状的路口，著名的莫过于上海的“五角场”了(图1)。而这样的路口往往又是车辆行人经过较多、交通状况复杂、交通繁忙的枢纽。虽然路口设置红绿灯，但是由于红绿灯设计方面的某些不足，导致该路段上车辆的等待时间过长，有时甚至形成新的交通堵塞，给人们的通行带来不便。通过观察，在对众多类似“兀”、“大”、“木”等形状的路口红绿灯时间设置进行分析的基础上，我们发现产生这些问题的原因主要是由于交通信号灯设置不合理，导致等待时间过长造成道路拥堵。本文我们以“兀”型路口为例，通过数学模型的建立，研究红绿灯时间设置的最优化方案，从而改善这些类似路口的通行状况。

影响红绿灯时间设置的因素有很多，虽然看上去有些复杂，但是当我们用行人的眼光来看待红绿灯时间设置问题时，一切都豁然开朗。红绿灯时间的设置最重要的不是看周边的环境因素，而是需要适应在这个路口过马路的行人。当我们作为一个过马路的行人时，我们最关心的因素有：

(1) 过马路时路口的车流量大小。

在路口，依据各条路上的车流量，来设置信号灯的时间。主要观察上下班车流量高峰时期。此时的信号灯周期要尽可能长，方便车辆通行。

(2) 过马路时可以安全过马路的两车之间的时间间隔的大小。

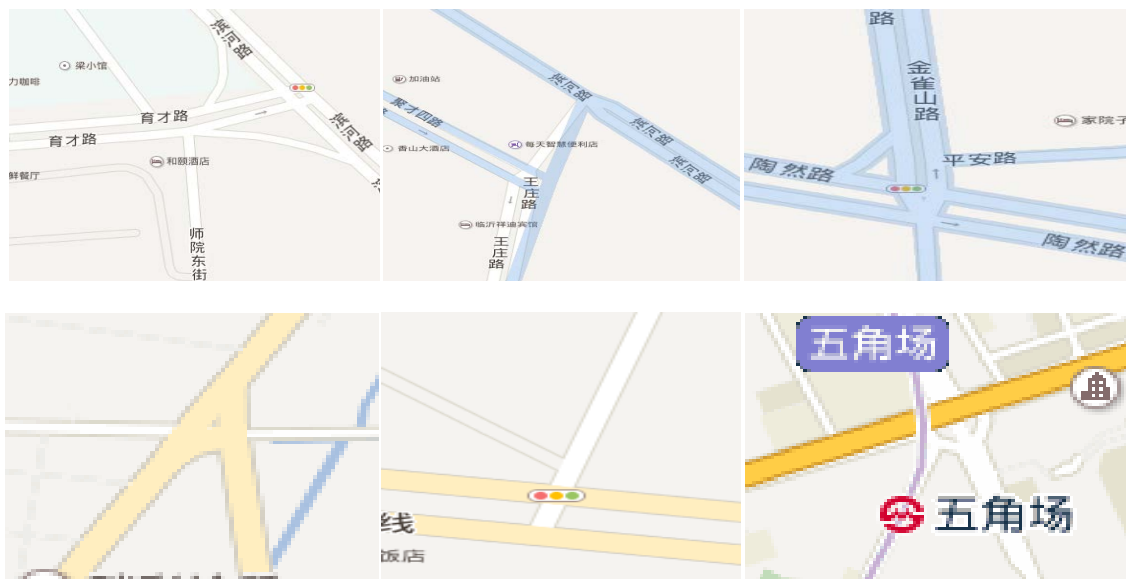


Figure 1. Intersection distribution

图 1. 路口实况

根据上述优化条件，建立模型，我们就可确定出不同方向及其走向的红灯的最优时间，再根据红灯时间及车流量大小，即可求出绿灯的最优时间。

3. 数据采集

我们以图中第一个图为例。首先选定路口的观察位置，在这可以清楚地观察到路口的情况。记录下目前在一个转换周期内红绿灯的设置。因为育才路与滨河大道交汇处以和育才路与师院东街交汇处的红绿灯转换周期是一样的，所以育才路与滨河大道的交汇处、育才路与师院东街交汇处和师院东街可以近似的看成一条道路。这个两个丁字型组合路口的红绿灯时间设置优化问题可以近似的看成是“兀”型路口的红绿灯时间设置优化问题。

- (1) 滨河大道由北向南方向左转弯红绿灯转换时间为 125 秒。
- (2) 滨河大道南北方向红绿灯的转换时间为 125 秒。
- (3) 育才路方向红绿灯转换时间为 135 秒。
- (4) 师院东街方向红绿灯的转换时间为 125 秒。

路口车流量的数据采集，我们观察了一下路口各个方向的车流量，有以下结果：

- (1) 滨河大道路、育才路和师院东街都为双向车道，但是都有转弯车道。
- (2) 早晚两个高峰期时段是堵车比较严重的时段，早高峰时段和晚高峰时段这两个时间段中车流量有所不同。

记录的数据为：

- (1) 在早上 7 点到 8 点以及下午 5 点半到 6 点半这两个时间段的车流量。
- (2) 在每个时间段记录滨河大道、育才路、师院东街每个红绿灯转换周期内的车流量。

数据见附录表 A1 和表 A2，表中所有数据表示每个路口红绿灯一个转换周期内的车流量。

- (3) 对安全过马路最低限度时间调查。

因为同学是我能接触的最多的人群，虽然有一定的局限性，但是调查起来方便，所以在 40 位同学中对安全过马路最低限度时间以口头询问形式进行调查，然后得到相关数据。数据见附录表 A3。

4. 数据分析

根据附录表 A1、表 A2 和表 A3 数据可以得到以下图 2~4。

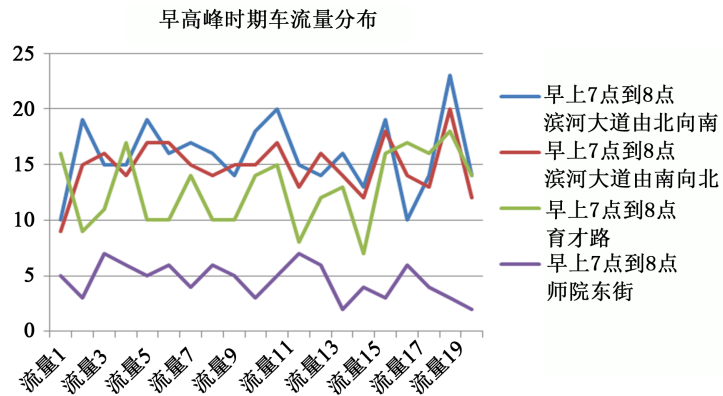


Figure 2. Traffic flow distribution of each intersection during the morning peak
图 2. 早高峰期的各路口的车流量分布图

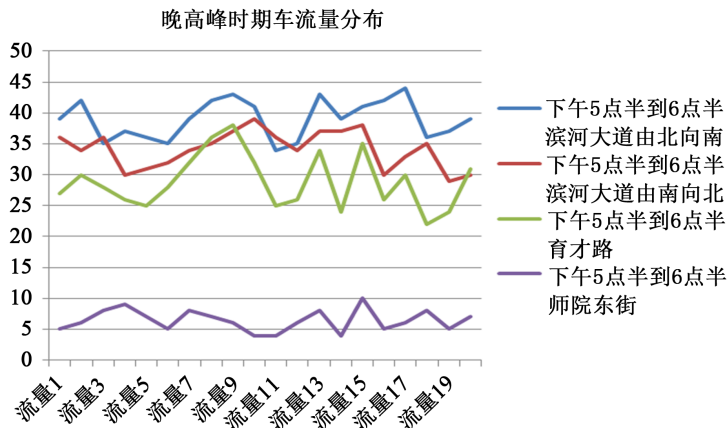


Figure 3. Traffic flow distribution of each intersection during the evening peak
图 3. 晚高峰期的各路口车流量分布图

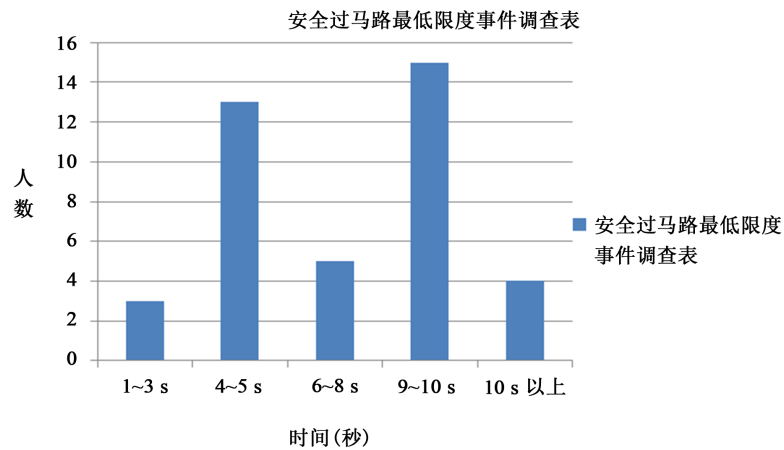


Figure 4. A event questionnaire that students crossed the street safely at least time
图 4. 安全过马路最低限度事件调查表

从图中可以看出:

(1) 晚高峰期的车流量比早高峰期的车流量显著提高。

(2) 师院东街车流量较少, 数量分布比较集中。滨河大道和育才路车流量较大, 数量都集中在某个区域, 从上表可以看出分布符合某种概率分布。

(3) 从图 4 中可以看出, 大部分同学选择的安全过马路最低限度时间主要分布在 4~5 秒和 9~10 秒这两个时间段。通过对图 4 的分析, 可以选择用取平均值法或者是众数法来计算安全过马路最低限度时间。

5. 建立模型

通过对上述数据的分析找出车流量与忍耐红灯的限度时间之间的关系, 两者之间的关系不是简单地初等函数, 利用软件也没有得到相应的关系, 通过阅读相关交通模型的书籍, 参考书中的一些交通流模型和交通管理的数学模型, 找到了一个符合兀型路口的模型[2] [3] [4]。

(1) 车辆间隙的概率分布

设车流的平均流量为 λ , 此概率分布为泊松分布。设 $P(k)$ 表示单位时间有 K 辆车到达该位置的概率, 则

$$P(k) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{k!}, \quad k \in N^*$$

两车到达时间间隙 t 是指数分布

$$f(t) = \lambda e^{-\lambda t}, \quad t > 0$$

(2) 立即穿越的概率

设两车到达的时间间隙为随机变量 t , 设某一行人安全穿越马路的最低限度时间为 T , 则其遇到的两车间隙超过 T 的概率为

$$P\{t > T\} = \int_T^{\infty} \lambda e^{-\lambda t} dt = e^{-\lambda T}$$

由于车身长度不能为 0, 设最小时间间隔为 a , 则对应指数分布修正为

$$\psi(t) = \lambda e^{-\lambda(t-a)}, \quad t > a$$

(3) 行人在路口的等待时间

设行人在路口遇到的车流的车辆到达路口的时间间隙依次为 $t_1, t_2, \dots, t_j < T (j \in N^*)$, 时间总和为 $\sum_{j=1}^n t_j$ 。已知时间间隙服从指数分布, 分布函数为

$$F(t) = \int_0^t f(t) dt = 1 - e^{-\lambda t}$$

因为 $t_j < T$, 所以概率密度是 $\frac{f(t)}{F(T)} = \frac{\lambda e^{-\lambda t}}{1 - e^{-\lambda T}}$, $0 < t < T$

设总等待时间 t 为一随机变量, 它的概率密度为 $\omega(t)$, 注意到等待时间为 τ , 即 $\{t < \tau\}$, 意味着存在一个 n , 满足 $t_j < T (j=1, 2, \dots, n), t_{n+1} > T$, 而 $\sum_{j=1}^n t_j < \tau$ 。

$P\{t_j < T\} = F(T)$, $P\{t_{n+1} > T\} = 1 - F(T)$, 就有

$$P\{t < \tau\} = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\tau} \left\{ \frac{f(t)}{F(T)} \right\}^{n*} d\tau \cdot (1 - F(T)) \cdot [F(T)]^n + (1 - F(T)) = (1 - F(T)) \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\tau} \{f(t)\}^{n*} dt + (1 - f(T))$$

从而随机变量 t 的概率密度函数为 $\omega(t) = (1 - F(T)) \sum_{n=1}^{\infty} \{f(t)\}^n$ 。

得其拉普拉斯变换为 $\omega^*(s) = (1 - F(T)) \frac{\int_0^T e^{-st} f(t) dt}{1 - \int_0^T e^{-st} f(t) dt}$ 。

由指数分布代入，可得 $\omega^*(s) = \frac{\lambda e^{-\lambda T} [1 - e^{-(s+\lambda)T}]}{S + \lambda e^{-(s+\lambda)T}}$ 。

可得其平均值 $-\frac{d}{ds} \omega^*(s) \Big|_{s=0} = \frac{e^{\lambda T} - 1 - \lambda T}{\lambda}$ 。

这个模型为下一步拓展应用提供了理论支持，并且这个模型所讨论的变量与所采集的车流量及调查的忍耐红灯限度时间相吻合，为下一步数据的处理提供了方向。

6. 模型应用

因为上述模型只能适用于单向车道行驶，而我们所研究的兀型路口是双向车道，所以为了能运用在兀型路口上，必须对一些变量进行改变。

(1) 对车辆间隙的概率分布进行修正

在本模型中给出了车辆到达时间间隙 t 是指数分布 $f(t) = \lambda e^{-\lambda t}$ ， $t > 0$ 。

车流的平均流量为 λ 在模型中是单向车道的，兀型路口模型应为相向双车道。

两个车道上两车到达时间间隙是两个独立的随机变量。因此，设两车道的均匀车流量为 λ_1 、 λ_2 ，则联合分布是 $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2$ 。

(2) 对车流量的数据进行处理

对于每个路口来说车流量都比较集中，每个路口的数据都集中在某个区域中，适合利用算术平均法计算每个路口的车流量 λ ，因为算术平均法求得的平均数包含了长期趋势变动，适合在数据变动幅度不大的情况中使用。

(3) 对安全过马路最低限度时间的数据进行处理

在对安全过马路最低限度时间的数据处理中，发现数据大多集中在两个区域，而且每组数据都占有一定的比例。因为此次数据的调查人数有限，难免会存在误差，所以，为了减小误差，可以选择使用加权平均法计算平均值。

上面对数据进行了处理选择了计算方法，下面进行计算

(1) 车流量平均值 $\lambda_i = (\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_{20}) / 20 \times t_i$ ，其中 t_i 为各个路口的红绿灯转换时间(表 1 和表 2)。

(2) 安全过马路最低限度时间 $T = \beta_1 f_1 + \beta_2 f_2 + \beta_3 f_3 + \beta_4 f_4 + \beta_5 f_5$ ，其中， β_i 为每个项的值， f_i 为每项所占的权。所以计算得 $T = 7.05(s)$ 。

(3) 等待时间的期望值(表 3)

两反向车道为了平衡两车道各自需求在各自平均值的基础上进行再取一次平均值为等待时间的数学期望值

Table 1. The average traffic volumes during the morning peak

表 1. 早高峰时期车流量平均流量

早上 7 点到 8 点各路口的车流量平均流量依次为				
	滨河大道由北向南	滨河大道由南向北	育才路	师院东街
平均车流量	0.145 辆/s	0.108 辆/s	0.102 辆/s	0.063 辆/s

Table 2. The average traffic volumes during the evening peak**表 2.** 晚高峰时期车流量平均流量

下午 5 点半到 6 点半各路口的车流量平均流量依次为				
	滨河大道由北向南	滨河大道由南向北	育才路	师院东街
平均车流量	0.302 辆/s	0.258 辆/s	0.148 辆/s	0.073 辆/s

Table 3. Mathematical expectation of the waiting time**表 3.** 等待时间的数学期望值

等待时间的数学期望值				
	滨河大道由北向南	滨河大道由南向北	育才路	师院东街
早上 7 点到 8 点	5.314	3.674	3.434	2.317
下午 5 点半到 6 点半	17.812	13.056	13.125	9.765
平均值	11.563	8.865	8.2795	5.554

$$T = \frac{11.563 + 8.865 + 8.2795 + 5.554}{4} = 9.057(\text{s})$$

7. 结论

通过本文建立的模型以及运用此模型对收集到的数据进行处理分析，得到以下结论：

(1) 滨河大道和育才路上的红绿灯设置不合理，超出了行人等待时间的期望值。

(2) 应该将双向行道的红绿灯转换周期适当的减少。

(3) 对于参考的模型，通过对采集的数据的处理研究、变量的分析对其进行修正，使其符合两个丁字型组合路口的模型。

数据处理是数学建模的关键，找到该函数的变量之间的关系进行分析。通过本文的研究，发现对道路交通系统的影响并不局限于此交汇，它和周围的交通状况有着密切的联系，几个路口构成一个动态的系统，相互影响。这应该是对这个问题的未来研究的方向，使模型更加完善，适用于更广泛的范围内。

参考文献 (References)

- [1] 朱晓超. 世界发达城市交通治理经验[J]. 财经, 2004(1): 48-49.
- [2] 姜启源, 谢金星, 叶俊. 数学模型[M]. 第三版. 北京: 高等教育出版社, 2003.
- [3] 严士健, 刘秀芳. 测度与概率[M]. 第二版. 北京: 北京师范大学出版社, 2003.
- [4] 陈丹, 高孝洪, 张本. 城市道路交叉口交通信号控制系统的发展及现状[J]. 交通科技学报, 2005(6): 76-78.

附录

Table A1. The traffic volumes during the morning peak

表 A1. 早高峰车流量

时间段 车流量(辆/次)	早上 7 点到 8 点			
	滨河大道由北向南	滨河大道由南向北	育才路	师院东街
车流量 1	10	9	16	5
车流量 2	19	15	9	3
车流量 3	15	16	11	7
车流量 4	15	14	17	6
车流量 5	19	17	10	5
车流量 6	16	17	10	6
车流量 7	17	15	14	4
车流量 8	16	14	10	6
车流量 9	14	15	10	5
车流量 10	18	15	14	3
车流量 11	20	17	15	5
车流量 12	15	13	8	7
车流量 13	14	16	12	6
车流量 14	16	14	13	2
车流量 15	13	12	7	4
车流量 16	19	18	16	3
车流量 17	10	14	17	6
车流量 18	14	13	16	4
车流量 19	23	20	18	3
车流量 20	14	12	14	2

Table A2. The traffic volumes during the evening peak

表 A2. 晚高峰车流量

时间段 车流量(辆/次)	下午 5 点半到 6 点半			
	滨河大道由北向南	滨河大道由南向北	育才路	师院东街
车流量 1	39	36	27	5
车流量 2	42	34	30	6
车流量 3	35	36	28	8
车流量 4	37	30	26	9
车流量 5	36	31	25	7
车流量 6	35	32	28	5
车流量 7	39	34	32	8
车流量 8	42	35	36	7

Continued

车流量 9	43	37	38	6
车流量 10	41	39	32	4
车流量 11	34	36	25	4
车流量 12	35	34	26	6
车流量 13	43	37	34	8
车流量 14	39	37	24	4
车流量 15	41	38	35	10
车流量 16	42	30	26	5
车流量 17	44	33	30	6
车流量 18	36	35	22	8
车流量 19	37	29	24	5
车流量 20	39	30	31	7

Table A3. A event questionnaire that students crossed the street safely at least time
表 A3. 安全过马路最低时间限度调查表

安全过马路最低时间限度调查表			
调查对象	时间限度	调查对象	时间限度
同学 1	6~8 s	同学 21	9~10 s
同学 2	4~5 s	同学 22	4~5 s
同学 3	4~5 s	同学 23	9~10 s
同学 4	1~3 s	同学 24	1~3 s
同学 5	4~5 s	同学 25	9~10 s
同学 6	9~10 s	同学 26	6~8 s
同学 7	4~5 s	同学 27	9~10 s
同学 8	9~10 s	同学 28	4~5 s
同学 9	4~5 s	同学 29	4~5 s
同学 10	6~8 s	同学 30	9~10 s
同学 11	4~5 s	同学 31	10 s 以上
同学 12	9~10 s	同学 32	6~8 s
同学 13	9~10 s	同学 33	1~3 s
同学 14	4~5 s	同学 34	9~10 s
同学 15	9~10 s	同学 35	4~5 s
同学 16	10 s 以上	同学 36	10 s 以上
同学 17	6~8 s	同学 37	4~5 s
同学 18	9~10 s	同学 38	9~10 s
同学 19	4~5 s	同学 39	10 s 以上
同学 20	9~10 s	同学 40	9~10 s

期刊投稿者将享受如下服务：

1. 投稿前咨询服务 (QQ、微信、邮箱皆可)
2. 为您匹配最合适的期刊
3. 24 小时以内解答您的所有疑问
4. 友好的在线投稿界面
5. 专业的同行评审
6. 知网检索
7. 全网络覆盖式推广您的研究

投稿请点击：<http://www.hanspub.org/Submission.aspx>

期刊邮箱：aam@hanspub.org