

# The Equilibrium of an Age Structured Phytoplankton-Zooplankton Model

Xiuxiu Sun

Zhejiang Provincial Key Laboratory for Water Environment and Marine Biological Resources Protection,  
Wenzhou University, Wenzhou Zhejiang  
Email: sunxiuxiushuxue@163.com

Received: Oct. 28<sup>th</sup>, 2017; accepted: Nov. 10<sup>th</sup>, 2017; published: Nov. 17<sup>th</sup>, 2017

---

## Abstract

In this paper, we study an age-structured phytoplankton-zooplankton model to describe the dynamics between the two populations. The model is described by considering age-structured zooplankton, time delay and harvesting effect. The aim of this paper is to understand the effect of age structure on this model. Sufficient conditions are obtained for the existence of the equilibrium. It is shown that the equilibrium state of the model is related to the age of zooplankton.

## Keywords

Age-Structured, Phytoplankton-Zooplankton, Equilibrium

---

# 时滞年龄结构浮游生物模型的平衡点分析

孙秀秀

温州大学, 浙江省水环境与海洋生物资源保护重点实验室, 浙江 温州  
Email: sunxiuxiushuxue@163.com

收稿日期: 2017年10月28日; 录用日期: 2017年11月10日; 发布日期: 2017年11月17日

---

## 摘要

本文在一类具有时滞效应和收获效应的浮游植物-浮游动物模型基础上, 考虑了浮游动物的年龄结构特征, 从而得到了一类具有时滞效应, 收获效应和年龄结构的浮游植物和浮游动物模型。文章的主要目的是研究年龄结构对该模型动力学性质的影响。通过模型分析, 将其转化成一类抽象的柯西问题。在此基础上, 本文主要研究了该模型平衡点的动力学性质, 包括存在性和唯一性。

## 关键词

年龄结构, 浮游植物 - 浮游动物, 平衡点

Copyright © 2017 by author and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

## 1. 引言

浮游植物在海域生态系统中起着十分重要的作用,因为它们不仅为海洋生物提供了丰富的食物来源,而且浮游植物每年能固定空气中超过 20% 的二氧化碳[1]。但是浮游植物的大量爆发会对海域生态系统产生极大的危害和污染。因此,研究浮游植物的生长机理是至关重要的。

研究表明,浮游植物的生长受到许多生物环境因素的影响。例如: Martin [2]等人研究发现气候改变可以促进浮游植物生长; James [3]等人研究发现光照强度和光照时间的长短也可以控制浮游植物的生长; Qasim [4]等人发现海洋中低浓度的盐含量可以促进浮游植物的爆发;此外, Siegal 和 Doney 等人[5]研究发现上层水域中不同的水深可以导致浮游植物产生不同的生长率。

另一方面,浮游动物是影响浮游植物种群生长的另一种重要因素,因为浮游动物能够通过捕食来控制浮游植物的生长和种群数量。为了研究浮游动物对浮游植物的影响,研究者提出了大量的数学模型来描述浮游植物与浮游动物之间的关系。例如: Dominic [6]等人提出了一类浮游植物 - 浮游动物模型,并且首次将该模型应用在现实环境问题中;之后阮世贵等人[7]提出并讨论了伴有营养循环的浮游植物 - 浮游动物模型。根据动力学分析,他们发现在一些条件下,浮游植物和浮游动物可以达到共存并且这个系统是持久的,但是如果这些条件遭到破坏,系统将失去其持久性。

在现实生活中,浮游动物捕食浮游植物并将其能量转化为自身生长。但是由于消化作用,这些转化并非都是立刻发生的。所以时滞因素通常被考虑到模型中来表示实际情况[8] [9] [10]。通过研究发现,时滞因素可以促进浮游植物和浮游动物的共存。此外,戴传军等人[11]通过建立具有时滞效应的浮游植物 - 浮游生物模型,发现时滞因素还能促进浮游植物斑块的形成。

之前对浮游植物和浮游动物的研究主要集中在时滞,营养循环和反应扩散等因素上,然而,研究表明浮游动物还具有年龄结构。因此,在本文中,我们考虑了浮游动物的年龄结构来研究年龄结构对浮游植物和浮游动物的影响。

自从提出了年龄结构模型以来,许多研究者就针对该类模型进行了大量研究,一部分研究者证明了种群的持久性问题,另一部分研究者证明了模型解的全局稳定性问题。其中,李佳[12]研究了一类食饵具有年龄结构的捕食者 - 食饵模型,作者主要研究了该模型平衡点的存在稳定性问题。研究发现,捕食者和食饵这两个种群在一些充分条件下可以达到共存的状态。然后曹斌等人[13]提出了一类具有年龄结构的传染病模型,他们分析了平衡点的全局稳定性和系统的一致持久性问题。此外, Yang 等人[14]提出了一类具有年龄结构的 SIR 模型,他们证明了该模型平衡点的全局稳定性和系统的持久性。直到 1990 年, Thieme 发现年龄结构模型可以转化为一类抽象的柯西问题。接着 Magal 和阮世贵在此基础上建立了该类抽象柯西问题的中心流形定理[15] [16]。然后刘志华等人[17]提出并总结了该类模型的 Hopf 分支理论。在年龄结构模型中, Hopf 分支问题是一个很有趣的数学问题,因为人们推测,当系统存在 Hopf 分支时,系统会产生非平凡周期解。也就是说,此时种群的生长是周期震荡变化的。

现在虽然有许多对年龄结构模型的研究，但是对年龄结构的浮游植物 - 浮游动物模型的研究仍然是很少的。在本文中，我们提出了一类具有年龄结构，收获效应和时滞效应的浮游植物 - 浮游动物模型并研究了年龄结构对浮游植物和浮游动物的影响。

本文结构如下所示。在第二部分，我们首先提出本文要研究的模型和一些预备知识。第三部分主要描述了模型的转化过程，利用转化，我们将模型转为抽象的柯西问题，在此基础上我们来研究该模型的动力学性质。第四部分主要研究了该模型平衡点的存在情况。

## 2. 模型的提出和预备知识

### 2.1. 提出模型

模型(1.1)是一类具有收获效应和时滞效应的浮游植物 - 浮游动物模型：

$$\begin{cases} \frac{dP(t)}{dt} = rP(t)\left(1 - \frac{P(t)}{K}\right) - \alpha_1 P(t)Z(t) - c_1 EP(t) \\ \frac{dZ(t)}{dt} = \alpha_2 P(t - \tau_1)Z(t) - uZ(t) - c_2 EZ(t) \end{cases} \quad (1.1)$$

其中， $P(t)$  表示在  $t$  时刻浮游植物的生物量， $Z(t)$  表示在  $t$  时刻的浮游动物的生物量， $r$  表示浮游植物的增长率， $K$  表示浮游植物的环境容纳量， $\alpha_1, \alpha_2$  分别表示浮游动物对浮游植物的捕食率以及浮游植物向浮游动物的转化率， $u$  表示浮游动物的死亡率， $c_1, c_2$  分别表示对浮游植物和浮游动物的收获系数， $E$  表示收获程度。

基于上述分析，在模型(1.1)的基础上，我们提出了一类如下所示的具有年龄结构的浮游植物 - 浮游动物模型：

$$\begin{cases} \frac{dP(t)}{dt} = rP(t)\left(1 - \frac{P(t)}{K}\right) - \alpha_1 P(t) \int_0^{+\infty} Z(t, a) da - c_1 EP(t) \\ \frac{\partial Z(t, a)}{\partial t} + \frac{\partial Z(t, a)}{\partial a} = -(u + c_2 E)Z(t, a) \\ Z(t, 0) = \alpha_2 P(t - \tau_1) \int_0^{+\infty} \beta(a) Z(t, a) da \\ Z(0, a) = Z_0 \end{cases} \quad (1.2)$$

其中  $Z(t, a)$  表示  $t$  时刻，年龄为  $a$  的浮游动物，同时有  $r = b - d$  和  $\beta(a) = \begin{cases} \beta^* & \text{if } a \geq \tau_2 \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$ 。

### 2.2. 预备知识

我们首先提出一些基本假设：

(A1) 空间  $Z(t, a)$  的初值满足  $Z_0 \in L^1((0, +\infty), R)$ ；

(A2) 浮游动物的生育函数为  $\beta(a) = \begin{cases} \beta^* & \text{if } a \geq 1 \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$ ，其中  $\beta^* = M(u + c_2 E)e^{\tau_2(u + c_2 E)}$ ；

(A3) 空间  $P(t)$  的初值满足  $P(0) = P_0$  和  $P_0 \in C([-\tau_1, 0], R)$ ；

(A4) 空间  $X$  的定义为  $X = R^2 \times L^1((0, +\infty), R^2)$ ，其范数为  $\left\| \begin{pmatrix} \alpha \\ \varphi \end{pmatrix} \right\| = \|\alpha\|_{R^2} + \|\varphi\|_{L^1((0, +\infty), R^2)}$ ；

- (A5) 线性算子  $L$  的定义为  $L \begin{pmatrix} 0 \\ \varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\varphi(0) \\ -\varphi' - D\varphi \end{pmatrix}$ , 其中  $L: D(L) \rightarrow X$  和  $D(L) = \{0\} \times W^{1,1}((0, +\infty), R^2)$ ;
- (A6) 空间  $Y$  的定义为  $Y = \left\{ \begin{pmatrix} \zeta(\cdot) \\ \phi(\cdot) \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} \zeta(\cdot) \\ \phi(\cdot) \end{pmatrix} \in C \left[ \left[ -\frac{\tau_1}{\tau_2}, 0 \right], X \right], \zeta(0) = 0 \right\}$ ;
- (A7) 算子  $F: Y \rightarrow X$  的定义为  $F \left( \begin{pmatrix} \zeta(\cdot) \\ \phi(\cdot) \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} B(\phi(\cdot)) \\ 0 \end{pmatrix}$ ;
- (A8) 空间  $Z$  为  $Z = X \times S$ , 它的范数是  $\left( \alpha \right) = \|\alpha\|_X + \|\phi\|_S$ , 其中  $S = C \left[ \left[ -\frac{\tau_1}{\tau_2}, 0 \right], X \right]$ ;
- (A9) 线性算子  $A$  的定义为  $A \begin{pmatrix} 0_X \\ \varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\varphi'(0) + L\varphi(0) \\ \varphi' \end{pmatrix}$ , 其中  $A: D(A) \subset Z \rightarrow Z$  和  $D(A) = \{0_X\} \times \left\{ \varphi \in C^1 \left[ \left[ -\frac{\tau_1}{\tau_2}, 0 \right], X \right], \varphi(0) \in D(L) \right\}$ ;
- (A10) 算子  $H$  为  $H \begin{pmatrix} 0_Y \\ \varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F(\varphi) \\ 0_Y \end{pmatrix}$ ,  $H: \overline{D(A)} \rightarrow Z$  和  $\overline{D(A)} = \{0_Y\} \times Y$ ;

### 3. 模型转化

为了分析模型(1.2), 我们要把它转化成抽象的柯西问题。

$$\text{令 } \hat{t} = \frac{t}{\tau_2}, \quad \hat{a} = \frac{a}{\tau_2}.$$

则模型(1.2)变为

$$\begin{cases} \frac{dP(\tau_2 \hat{t})}{d\hat{t}} = \tau_2 \left( rP(\tau_2 \hat{t}) \left( 1 - \frac{P(\tau_2 \hat{t})}{K} \right) - \alpha_1 P(\tau_2 \hat{t}) \int_0^{+\infty} \tau_2 Z(\tau_2 \hat{t}, \tau_2 \hat{a}) d\hat{a} - c_1 EP(\tau_2 \hat{t}) \right) \\ \frac{\partial Z(\tau_2 \hat{t}, \tau_2 \hat{a})}{\partial \hat{t}} + \frac{\partial Z(\tau_2 \hat{t}, \tau_2 \hat{a})}{\partial \hat{a}} = -\tau_2 (u + c_2 E) Z(\tau_2 \hat{t}, \tau_2 \hat{a}) \\ Z(\tau_2 \hat{t}, 0) = \alpha_2 P(\tau_2 \hat{t} - \tau_1) \int_0^{+\infty} \beta(a) \tau_2 Z(\tau_2 \hat{t}, \tau_2 \hat{a}) d\hat{a} \\ Z(0, \tau_2 \hat{a}) = Z_0 \end{cases} \quad (2.1)$$

令  $\hat{P}(\hat{t}) = P(\tau_2 \hat{t})$  和  $\hat{Z}(\hat{t}, \hat{a}) = \tau_2 Z(\tau_2 \hat{t}, \tau_2 \hat{a})$ , 去掉尖角符号后我们得到下列模型(2.2):

$$\begin{cases} \frac{dP(t)}{dt} = \tau_2 \left( rP(t) \left( 1 - \frac{P(t)}{K} \right) - \alpha_1 P(t) \int_0^{+\infty} Z(t, a) da - c_1 EP(t) \right) \\ \frac{\partial Z(t, a)}{\partial t} + \frac{\partial Z(t, a)}{\partial a} = -\tau_2 (u + c_2 E) Z(t, a) \\ Z(t, 0) = \tau_2 \alpha_2 P \left( t - \frac{\tau_1}{\tau_2} \right) \int_0^{+\infty} \beta(a) Z(t, a) da \\ Z(0, a) = \tau_2 Z_0 \end{cases} \quad (2.2)$$

设浮游植物  $P(t)$  也存在年龄结构, 令  $P(t) = \int_0^{+\infty} p(t, a) da$ 。

则模型(2.2)的第一个方程可以表示成下列形式:

$$\begin{cases} \frac{\partial p(t,a)}{\partial t} + \frac{\partial p(t,a)}{\partial a} = -\tau_2(d+c_1E)p(t,a) \\ p(t,0) = G(p(t,a), Z(t,a)) \\ p(0,a) = p_0 \end{cases} \quad (2.3)$$

其中

$$G(p(t,a), Z(t,a)) = \tau_2 \left( b \int_0^{+\infty} p(t,a) da - \frac{r}{K} \left( \int_0^{+\infty} p(t,a) da \right)^2 - \alpha_1 \int_0^{+\infty} p(t,a) da \int_0^{+\infty} Z(t,a) da \right)$$

将  $Z(t,a)$  和  $p(t,a)$  定义成一个二维向量，也就是令  $w(t,a) = \begin{pmatrix} Z(t,a) \\ p(t,a) \end{pmatrix}$ 。

模型(2.2)可表示为下列形式：

$$\begin{cases} \frac{\partial w(t,a)}{\partial t} + \frac{\partial w(t,a)}{\partial a} = -Dw(t,a) \\ w(t,0) = \begin{pmatrix} \tau_2 \alpha_2 \int_0^{+\infty} p \left( t - \frac{\tau_1}{\tau_2}, a \right) da \int_0^{+\infty} \beta(a) Z(t,a) da \\ G(p(t,a), Z(t,a)) \end{pmatrix} \\ w(0,a) = \begin{pmatrix} p_0 \\ Z_0 \end{pmatrix} \end{cases} \quad (2.4)$$

其中  $D = \begin{pmatrix} \tau_2(u+c_2E) & 0 \\ 0 & \tau_2(d+c_1E) \end{pmatrix}$ 。

令  $x(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ w(t, \cdot) \end{pmatrix}$ ，则模型(2.4)将被转化成下列形式：

$$\begin{cases} \frac{dx(t)}{dt} = Lx(t) + F(x_t) \\ x(0) = x_0 \end{cases} \quad (2.5)$$

其中

$$B(\phi(\cdot)) = \begin{pmatrix} \tau_2 \alpha_2 \int_0^{+\infty} \phi_2 \left( -\frac{\tau_1}{\tau_2} \right) (a) da \int_0^{+\infty} \beta(a) \phi_1(0)(a) da \\ G(\phi_1(0)(\cdot), \phi_2(0)(\cdot)) \end{pmatrix} \quad (2.6)$$

基于上述变化，记  $x_t(\theta) = x(t+\theta)$ ，则  $x_t \in Y$ 。为了将模型(2.2)转化成抽象柯西问题，我们将模型(2.5)做进一步的转化。

取  $y(t, \theta) = x(t+\theta)$ ，其中  $y \in C \left( [0, +\infty) \times \left[ -\frac{\tau_1}{\tau_2}, 0 \right]; X \right)$ ， $t \geq 0$ ， $\theta \in \left[ -\frac{\tau_1}{\tau_2}, 0 \right]$ 。

若  $x \in C^1 \left( [0, +\infty) \times \left[ -\frac{\tau_1}{\tau_2}, 0 \right] \right)$ ，则  $\frac{\partial y(t, \theta)}{\partial t} = \frac{\partial y(t, \theta)}{\partial \theta} = x'(t+\theta)$ 。

因此有  $\frac{\partial y(t, \theta)}{\partial t} - \frac{\partial y(t, \theta)}{\partial \theta} = 0$ ， $t \geq 0$ ， $\theta \in \left[ -\frac{\tau_1}{\tau_2}, 0 \right]$ 。

通过上述分析, 我们可以得到当  $\theta = 0$  时

$$\frac{dx(t)}{dt} = \frac{\partial y(t, 0)}{\partial \theta} = Lx(t) + F(x_t) = Ly(t, 0) + F(y(t, \cdot)).$$

则  $y(t, \theta)$  满足

$$\begin{cases} \frac{\partial y(t, \theta)}{\partial t} - \frac{\partial y(t, \theta)}{\partial \theta} = 0 \\ \frac{\partial y(t, 0)}{\partial \theta} = Ly(t, 0) + F(y(t, \cdot)) \\ y(0, \cdot) \in Y \end{cases} \quad (2.7)$$

令  $z(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ y(t) \end{pmatrix}$ , 则模型(2.7)可以转化成下列抽象柯西问题:

$$\begin{cases} \frac{dz(t)}{dt} = Az(t) + H(z(t)) \\ z(0) \in \overline{D(A)} \end{cases} \quad (2.8)$$

#### 4. 主要结果

模型(2.2)的平凡平衡点  $E_0 = (0, 0)$  总是存在的, 接下来我们将研究模型(2.2)的其它类型平衡点。若模型(2.2)存在正平衡点, 浮游植物和浮游动物就可以达到共存的状态。

##### 定理 1

对于模型(2.2), 下列结论成立:

(1) 模型(2.2)总存在平凡平衡点  $E_0 = (0, 0)$ ;

(2) 若  $c_1 E = r \left( 1 - \frac{1}{\alpha_2 MK} \right)$ , 则模型(2.2)存在边界平衡点  $E_1 = \left( K \left( 1 - \frac{c_1 E}{r} \right), 0 \right)$ ;

(3) 若  $c_1 E < r \left( 1 - \frac{1}{\alpha_2 MK} \right)$ , 模型(2.2)存在唯一的正平衡点  $E^* = (P^*, Z^*(a))$ , 其中  $P^* = \frac{1}{\alpha_2 M}$ ,

$$Z^*(a) = \frac{\tau_2 (u + c_2 E)}{\alpha_1} \left( r \left( 1 - \frac{1}{\alpha_2 MK} \right) - c_1 E \right) e^{-\tau_2 (u + c_2 E) a}.$$

证明: 设  $z^* = \begin{pmatrix} 0 \\ y^* \end{pmatrix}$  是模型(2.8)的正平衡点, 其中  $y^* = \begin{pmatrix} \xi^*(\cdot) \\ \phi^*(\cdot) \end{pmatrix} \in C^1 \left( \left[ -\frac{\tau_1}{\tau_2}, 0 \right], X \right)$  以及  $\phi^*(\cdot) = \begin{pmatrix} \phi_1^*(\cdot) \\ \phi_2^*(\cdot) \end{pmatrix}$ .

则根据(2.8), 有  $Az^* + H(z^*) = 0$ , that is  $Ly^*(0) + F(y^*) = 0$ .

等价于

$$\begin{cases} (\phi^*)'(a) = -D\phi^*(a) \\ \phi^*(0) = B(\phi^*(\cdot)) \end{cases} \quad (3.1)$$

通过计算可得

$$\begin{pmatrix} \phi_1^*(a) \\ \phi_2^*(a) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-\tau_2 (u + c_2 E) a} & 0 \\ 0 & e^{-\tau_2 (d + c_1 E) a} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tau_2 \alpha_2 P^* \int_0^{+\infty} \beta(a) \phi_1^*(a) da \\ \tau_2 \left( bP^* - \frac{r}{K} (P^*)^2 - \alpha_1 P^* \int_0^{+\infty} \phi_1^*(a) da \right) \end{pmatrix} \quad (3.2)$$

由(3.2), 可得

$$\phi_1^*(a) = e^{-\tau_2(u+c_2E)a} \tau_2 \alpha_2 P^* \int_0^{+\infty} \beta(a) \phi_1^*(a) da \tag{3.3}$$

$$\phi_2^*(a) = e^{-\tau_2(d+c_1E)a} \tau_2 \left( bP^* - \frac{r}{K} (P^*)^2 - \alpha_1 P^* \int_0^{+\infty} \phi_1^*(a) da \right) \tag{3.4}$$

根据(3.3), 计算得到

$$1 = \tau_2 \alpha_2 P^* \int_0^{+\infty} \beta(a) e^{-\tau_2(u+c_2E)a} da \tag{3.5}$$

以及

$$Z^*(a) = \frac{\alpha_2 P^*}{u + c_2 E} \int_0^{+\infty} \beta(a) \phi_1^*(a) da \tag{3.6}$$

由(3.4), 可以算出

$$P^* = \frac{1}{d + c_1 E} \left( bP^* - \frac{r}{K} (P^*)^2 - \alpha_1 P^* \int_0^{+\infty} \phi_1^*(a) da \right) \tag{3.7}$$

再令  $\int_0^{+\infty} \beta(a) e^{-\tau_2(u+c_2E)a} da = \frac{M}{\tau_2}$ , 并且根据(3.5), 我们可得  $P^* = \frac{1}{\alpha_2 M}$ 。

由(3.7)计算得出

$$rP^* \left( 1 - \frac{P^*}{K} \right) - c_1 EP^* = \alpha_1 P^* \int_0^{+\infty} \phi_1^*(a) da \tag{3.8}$$

和

$$\left( rP^* \left( 1 - \frac{P^*}{K} \right) - c_1 EP^* \right) \frac{1}{P^*} = \frac{\alpha_1 \alpha_2 P^*}{u + c_2 E} \int_0^{+\infty} \beta(a) \phi_1^*(a) da \tag{3.9}$$

因此我们有

$$\int_0^{+\infty} \beta(a) \phi_1^*(a) da = \frac{(u + c_2 E) \left( r \left( 1 - \frac{P^*}{K} \right) - c_1 E \right)}{\alpha_1 \alpha_2 P^*} \tag{3.10}$$

如果  $\int_0^{+\infty} \beta(a) \phi_1^*(a) da \neq 0$ , 则

$$\phi_1^*(a) = \frac{\tau_2 (u + c_2 E)}{\alpha_1} \left( r \left( 1 - \frac{1}{\alpha_2 MK} \right) - c_1 E \right) e^{-\tau_2(u+c_2E)a} \tag{3.11}$$

$$\phi_2^*(a) = \frac{\tau_2 (d + c_1 E)}{\alpha_2 M} e^{-\tau_2(d+c_1E)a} \tag{3.12}$$

如果  $c_1 E < r \left( 1 - \frac{1}{\alpha_2 MK} \right)$ , 则  $Z^*(a) > 0$ 。

然而, 若  $c_1 E = r \left( 1 - \frac{1}{\alpha_2 MK} \right)$ , 则有

$$\begin{cases} \phi_1^*(a) = 0 \\ \phi_2^*(a) = 0 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} \phi_1^*(a) = 0 \\ \phi_2^*(a) = \tau_2 (d + c_1 E) K \left( 1 - \frac{c_1 E}{r} \right) e^{-\tau_2(d+c_1E)a} \end{cases}$$



从而模型(2.2)的平凡平衡点为  $E_0 = (0, 0)$ ；边界平衡点为  $E_1 = \left( K \left( 1 - \frac{c_1 E}{r} \right), 0 \right)$ ；

模型(2.2)的正平衡点为  $E^* = (P^*, Z^*(a))$ ，其中  $P^* = \frac{1}{\alpha_2 M}$  以及

$$Z^*(a) = \frac{\tau_2(u + c_2 E)}{\alpha_1} \left( r \left( 1 - \frac{1}{\alpha_2 M K} \right) - c_1 E \right) e^{-\tau_2(u + c_2 E)a}。$$

从定理 1 的结论可以看出，时滞并不能影响模型(2.2)的平衡态。而且在不同的收获条件下，浮游植物和浮游动物可以共存，或者同时灭亡，或者浮游植物幸存而浮游动物灭亡。也就是说如果收获条件满足  $c_1 E = r \left( 1 - \frac{1}{\alpha_2 M K} \right)$ ，则浮游植物趋向于平衡态而浮游动物灭亡，如果收获条件满足  $c_1 E < r \left( 1 - \frac{1}{\alpha_2 M K} \right)$ ，则浮游植物和浮游动物趋向于共存。

## 5. 结论

本文主要研究了一类具有时滞效应和年龄结构的浮游生物模型平衡点的动力学性质。通过将模型转化为一类抽象的柯西问题，我们研究了该模型边界平衡点和内平衡点存在性的条件。另外通过分析发现，该模型的内平衡点是一个与年龄有关的平衡态。

## 参考文献 (References)

- [1] Smetacek, V. and Klaas, C. (2012) Deep Carbon Export from a Southern Ocean Iron-Fertilized Diatom Bloom. *Nature*, **487**, 313-319. <https://doi.org/10.1038/nature11229>
- [2] Martin, M., Scott, C.D. and Hugh, W.D. (2009) Recent Changes in Phytoplankton Communities Associated with Rapid Regional Climate Change along the Western Antarctic Peninsula. *Science*, **13**, 1470-1473.
- [3] James, E.C. (1999) The Relative Importance of Light and Nutrient Limitation of Phytoplankton Growth: A Simple Index of Coastal Ecosystem Sensitivity to Nutrient. *Aquatic Ecology*, **33**, 3-16. <https://doi.org/10.1023/A:1009952125558>
- [4] Qasim, S.Z., Bhattathiri, P.M.A. and Devassy, V.P. (1972) The Influence of Salinity on the Rate of Photosynthesis and Abundance of Some Tropical Phytoplankton. *Marine Biology*, **12**, 200-206. <https://doi.org/10.1007/BF00346767>
- [5] Siegel, D.A., Doney, S.C. and Yoder, J.A. (2002) The North Atlantic Spring Phytoplankton Bloom and Sverdrup's Critical Depth Hypotheses. *Science*, **26**, 730-733. <https://doi.org/10.1126/science.1069174>
- [6] Dominic, M.D., Donald, J.O. and Robert, V.T. (1971) A Dynamic Model of the Phytoplankton Population in the Sacramento-San Joaquin Delta. *Advances in Chemistry*, **3**, 131-180.
- [7] Ruan, S.G. (1933) Persistence and Coexistence in Zooplankton-Phytoplankton-Nutrient Models with Instantaneous Nutrient Recycling. *Journal of Mathematical Biology*, **33**, 633-654.
- [8] Sarkar, R.R., Mukhopadhyay, B. and Bhattacharyya, R. (2007) Sandip Banerjee Time Lags Can Control Algal Bloom in Two Harmful Phytoplankton-Zooplankton Systems. *Applied Mathematics and Computation*, **186**, 445-459. <https://doi.org/10.1016/j.amc.2006.07.113>
- [9] Maiti, A., Pal, A.K. and Samanta, G.P. (2008) Effect of Time Delay on a Food Chain Model. *Applied Mathematics and Computation*, **200**, 189-203. <https://doi.org/10.1016/j.amc.2007.11.011>
- [10] Zhao, J.T. and Wei, J.J. (2009) Stability and Bifurcation in a Two Harmful Phytoplankton-Zooplankton System. *Chaos, Solitons and Fractals*, **39**, 1395-1409. <https://doi.org/10.1016/j.chaos.2007.05.019>
- [11] Dai, C.J., Zhao, M. and Yu, H.G. (2016) Dynamics Induced by Delay in a Nutrient-Phytoplankton Model with Diffusion. *Ecological Complexity*, **17**, 29-36. <https://doi.org/10.1016/j.ecocom.2016.03.001>
- [12] Li, J. (1990) Dynamics of Age Structured Predator-Prey Population Models. *Journal of Mathematical Analysis and Application*, **152**, 399-415. [https://doi.org/10.1016/0022-247X\(90\)90073-O](https://doi.org/10.1016/0022-247X(90)90073-O)
- [13] Cao, B., Huo, H.-F. and Xiang, H. (2017) Global Stability of an Age-Structure Epidemic Model with Imperfect Vaccination and Relapse. *Physica A*, **486**, 638-655. <https://doi.org/10.1016/j.physa.2017.05.056>
- [14] Yang, J.Y. and Chen, Y.M. (2017) Effect of Infection Age on an SIR Epidemic Model with Demography on Complex Network. *Physica A*, **23**, 527-541. <https://doi.org/10.1016/j.physa.2017.03.006>



- 
- [15] Liu, Z.H. and Li, N.W. (2015) Stability and Bifurcation in a Predator-Prey Model with Age Structure and Delays. *Journal of Nonlinear Science*, **25**, 937-957. <https://doi.org/10.1007/s00332-015-9245-x>
- [16] Thieme, H.R. (1990) Integrated Semigroups and Integrated Solutions to Abstract Cauchy Problems. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **152**, 416-447. [https://doi.org/10.1016/0022-247X\(90\)90074-P](https://doi.org/10.1016/0022-247X(90)90074-P)
- [17] Abia, L.M. and Lopez-Marcos, J.C. (1999) On the Numerical Integration of Non-Local Terms for Age-Structured Population Models. *Mathematical Biosciences*, **157**, 147-167. [https://doi.org/10.1016/S0025-5564\(98\)10080-9](https://doi.org/10.1016/S0025-5564(98)10080-9)

知网检索的两种方式:

1. 打开知网页面 <http://kns.cnki.net/kns/brief/result.aspx?dbPrefix=WWJD>  
下拉列表框选择: [ISSN], 输入期刊 ISSN: 2324-7991, 即可查询
2. 打开知网首页 <http://cnki.net/>  
左侧“国际文献总库”进入, 输入文章标题, 即可查询

投稿请点击: <http://www.hanspub.org/Submission.aspx>

期刊邮箱: [aam@hanspub.org](mailto:aam@hanspub.org)