

Multivariate Lagrange Interpolation Defined on Parabolic Cylinder

Fu Liu, Nan Zhao, Lihong Cui

Liaoning Normal University, Dalian Liaoning
Email: 376418602@qq.com, 17614280640@163.com, 2458416309@qq.com

Received: Nov. 14th, 2017; accepted: Dec. 1st, 2017; published: Dec. 8th, 2017

Abstract

Based on the results of two-element function Lagrange interpolation, the only solvable problem of ternary function Lagrange interpolation node group is studied. This paper presents the basic concept of the Lagrange interpolation unique solvable node group, which is defined on the parabolic cylinder surface, and studies some basic theory and topological structure of the Lagrange interpolation unique solvable node group defined on the parabolic cylinder. The method of adding conic surface for constructing the Lagrange interpolating solvable node group which is defined on the parabolic cylindrical surface is obtained. All of these methods are constructed by means of superposition, so it is very convenient for compiling computer algorithm program and then automatically completing interpolation in the computer to solve the structure of node group and get interpolation format. Finally, an example is given to illustrate the effectiveness of the proposed algorithm.

Keywords

Parabolic Cylinder, Multivariate Lagrange Interpolation, The Only Solution Node Group, Superposition Interpolation Method

定义于抛物柱面上的多元Lagrange插值问题

刘 孚, 赵 楠, 崔利宏

辽宁师范大学, 辽宁 大连
Email: 376418602@qq.com, 17614280640@163.com, 2458416309@qq.com

收稿日期: 2017年11月14日; 录用日期: 2017年12月1日; 发布日期: 2017年12月8日

摘 要

以二元函数Lagrange插值研究结果为基础,对三元函数Lagrange插值结点组的唯一可解问题进行了研究。

提出了定义于抛物柱面上的Lagrange插值唯一可解结点组的基本概念,研究了定义于抛物柱面上的Lagrange插值唯一可解结点组的某些基本理论和拓扑结构,得到了构造定义于抛物柱面上的Lagrange插值可解结点组的添加圆锥曲面法。这些方法都是以迭加方式构造完成的,因而对于编译计算机算法程序,进而在计算机上自动完成插值可解结点组的构造并得到插值格式创造了十分便利的条件。最后给出了实例验证算法的有效性。

关键词

抛物柱面,多元Lagrange插值,唯一可解结点组,迭加插值法

Copyright © 2017 by authors and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

熟知,多元函数插值长期以来一直是计算数学研究领域的一个主要研究内容(详见文献[1]),有关多元函数插值基本理论和方法研究中一个基本问题是多元插值函数的唯一存在性问题,也就是插值的唯一可解性问题。由文献[1]可知,国内外学者对这一问题的研究主要有两个判别,一种是给定插值空间,去构造相应唯一正解结点组;另一种是给定结点组,去构造相应正则插值空间,而且要求空间的次数尽可能低[2][3][4],对于某一类问题,目前,有关在整个空间进行插值以及关于定义于空间中一般代数流形插值的研究结果相对完备[5],而关于有着重要实用价值的流形上的插值结果并不多见。梁学章等人[6][7]讨论了单位球面上的纬线组选取插值唯一正解结点组的方法。Castell等人[8]利用球面上偶数条纬线上等距点组构造了球面上的唯一正解结点组。

抛物柱面是除球面外的另一类主要的二次代数曲面,其在军事上,天文方面上以及生活上均有广泛应用。例如,在电子对抗微波毫米波系统中,往往需要把大功率的定向电磁辐射波束辐射到作战空间中,传递己方的有用信息或者干扰同频的敌方信息,抛物柱面天线就是通常采用多个天线组成的线来进行空间功率的合成,用抛物柱面作为反射面来增加天线的口径,合成高功率的尖锐波束。星载抛物柱面天线是各类型星载天线的一种,由于其具有方向性强、增益高、易于光束自动扫描等特点,星载抛物柱面天线已经成为星载天线新的发展方向。抛物柱面聚光器,这种新型的太阳能聚光器,它生产工艺简单,生产成本低。因此,对抛物柱面上的插值问题研究意义重大。

2. 基本定义和基本定理

本文主要研究沿三维欧式空间 R^3 中的抛物柱面 $F = \{(x, y, z) \in R^3 \mid y^2 = 2pz (p > 0)\}$ 上进行 Lagrange 插值的唯一可解性问题,为此本文首先引入若干基本概念。

设 n 为非负整数,令 $P_n^{(3)}$ 表示所有全次数为 n 的三元代数多项式构成的集,即

$$P_n^{(3)} = \left\{ \sum_{0 \leq i+j+k \leq n} a_{ijk} x^i y^j z^k \mid a_{ijk} \in R \right\}, \text{ 而且有 } \dim P_n^{(3)} = \binom{n+3}{3}.$$

定义 1: ($P_n^{(3)}$ 的插值唯一可解结点组) 设 $m = \binom{n+3}{3}$, 令 $A = \{Q_i\}_{i=1}^m$ 为 R^3 中 m 个互异点构成的点集, 如果对于任意给定的数组 $\{f_i \in R \mid i = 1, \dots, m\}$, 恒存在唯一多项式 $p(x, y, z) \in P_n^{(3)}$, 满足: $p(Q_i) = f_i, i = 1, \dots, m$,

则称 A 为 $P_n^{(3)}$ 的一个唯一可解结点组。

定义 2: (F 上的插值唯一可解结点组) 设 F 为如上所定义的旋转抛物面, $P_n^{(3)}(F)$ 为 $P_n^{(3)}$ 在 F 上的限制, $m = \dim P_n^{(3)}(F) = \binom{n+3}{3} - \binom{n+3-2}{3}$, 称 $A = \{Q_i\}_{i=1}^m \subset F$ 为定义于 F 上的一个 n 次插值唯一可解结点组, 如果对于任意给定的数组 $\{f_i \in \mathbb{R} | i=1, \dots, m\}$, 恒存在多项式 $p(x, y, z) \in P_n^{(3)}$, 满足 $p(Q_i) = f_i, i=1, \dots, m$ 。

本文所获得研究结果如下:

定理 1: (构造 $P_n^{(3)}$ 插值唯一可解结点组的添加旋转抛物面法)

设 m 为如上所定义, $r = \binom{n+5}{3}$, 结点组 $A = \{Q_i\}_{i=1}^m \subset F$ 关于 $P_n^{(3)}$ 的一个唯一可解结点组, 而 $B = \{Q_i\}_{i=m+1}^r$ 是定义于 F 的一个 $n+2$ 次唯一可解结点组, 则 $\{Q_i\}_{i=1}^r = A \cup B$ 必定构成 $P_{n+2}^{(3)}$ 的唯一可解结点组。

由定理 1 和文献[2]、[3]、[4]中的结果, 我们得到如下推论:

推论 1: (构造 F 上插值正则结点组添加圆锥曲线法)

设 $A = \{Q_i\}_{i=1}^{(n+1)^2}$ 为 F 上的 n 次插值唯一可解结点组, 平面 $p(x, y, z) \cap A = \emptyset$ 与 F 横截相交于圆锥曲线 $C(x, y, z)$, B 是定义于圆锥曲线 $C(x, y, z)$ 上的一个 $n+1$ 次唯一可解结点组, 则 $A \cup B$ 必定构成定义于 F 上的一个 $n+1$ 次唯一可解结点组。

定理 2: (判定定理)

由抛物柱面 F 上的 $m = (n+1)^2$ 个互异点构成的点组 $A = \{Q_i\}_{i=1}^m$ 能够做成该抛物柱面 F 上的 n 次插值唯一可解结点组的充分必要条件是, 若 $p(x, y, z) \in P_n^{(3)}$, 满足 $p(Q_i) = 0, i=1, \dots, m$, 蕴含着如此的 $p(x, y, z)$ 沿抛物柱面 F 恒为零。

3. 定理的证明

定理 1 的证明:

证明: 设 $Q_i = (x_i, y_i, z_i), i=1, \dots, r$ 。因为 B 为定义于 F 上的 $n+2$ 次唯一可解结点组, 由定义 2, 对任意给定数组 $\{f_i | i=m+1, \dots, r\}$ 恒存在多项式 $p_1(x, y, z) \in P_{n+2}^{(3)}$ 使得 $p_1(Q_i) = f_i, i=m+1, \dots, r$ 。

又因为 $A = \{Q_i\}_{i=1}^m \subset F$ 关于 $P_n^{(3)}$ 的一个唯一可解结点组, 由定义 1 知, 对任意的数组 $\{f_i | i=1, \dots, m\}$, 恒存在多项式 $p_2(x, y, z) \in P_n^{(3)}$, 使得 $p_2(Q_i) = \frac{f_i - p_1(Q_i)}{y^2 - 2pz}, i=1, \dots, m$ 成立, 其中 (x_i, y_i, z_i) 为 $Q_i, i=1, \dots, m$ 的三维坐标。构造一个多项式 $p(x, y, z) = p_1(x, y, z) + (y^2 - 2pz)p_2(x, y, z) (p > 0)$

显然有 $p(x, y, z) \in P_{n+2}^{(3)}$, 且满足: $p(Q_i) = p_1(Q_i) + (y^2 - 2pz)p_2(Q_i) = f_i, i=1, \dots, r$

则由定义 1 知, $A \cup B$ 为 $P_{n+2}^{(3)}$ 的唯一可解结点组。

定理 2 的证明:

证明: 首先证明充分性。只需证明命题“若有多项式 $p(x, y, z) \in P_n^{(3)}$, 满足 $p(Q_i) = 0, i=1, \dots, m$, $\forall Q_i \in A \cup B$, 则必有 $p(x, y, z) \equiv 0$ 。”成立即可。设 $p(x, y, z) \in P_n^{(3)}$ 满足 $p(Q_i) = 0, i=1, \dots, m, \forall Q_i \in A \cup B$, 由条件可知, $p(Q_i) = 0, \forall Q_i \in F$ 。从而, 对于定义于抛物面 F 的一个 n 次唯一可解结点组 $\tilde{A} \subset F$, 亦有, $\forall Q_i \in \tilde{A}$, 即, $\forall Q_i \in \tilde{A} \cup B$ 。又因为 $\tilde{A} \cup B$ 为 $P_n^{(3)}$ 的唯一可解结点组, 故此有 $p(x, y, z) \equiv 0$ 。

必要性: 令 $r = \binom{n+3}{3}$, 取 $B = \{Q_i\}_{i=m+1}^r \subset F$ 为关于 $P_{n-2}^{(3)}$ 的唯一可解结点组, 可以断言: $\{Q_i\}_{i=1}^r$ 构成了 $P_n^{(3)}$ 的唯一可解结点组. 事实上, 对于任意给定的实数 $\{f_i\}_{i=1}^r$, 由于 $A = \{Q_i\}_{i=1}^m$ 为抛物柱面 F 上的 n 次唯一可解结点组, 故存在多项式 $p_1(x, y, z) \in P_n^{(3)}$ 满足

$$p_1(Q_i) = f_i, i = 1, \dots, m$$

又因为 $B \notin F$ 且为 $P_{n-2}^{(3)}$ 的唯一可解结点组, 则存在多项式 $p_2(x, y, z) \in P_{n-2}^{(3)}$ 满足条件

$$p_2(Q_i) = \frac{f_i - p_1(Q_i)}{y_i^2 - 2pz_i} (p > 0), i = m+1, \dots, r$$

其中 (x_i, y_i, z_i) 为 $Q_i, i = m+1, \dots, r$ 的三维坐标. 则多项式

$$\tilde{p}(x, y, z) = p_1(x, y, z) + (y^2 - 2pz)p_2(x, y, z) (p > 0) \tag{2.1}$$

满足 $\tilde{p}(Q_i) = f_i, i = 1, \dots, r$, 即 $\{Q_i\}_{i=1}^r$ 是 $P_n^{(3)}$ 的唯一可解结点组. 此外, 在上述证明过程中特别取 $f_1 = 0, i = 1, \dots, m$, 则(2.1)式中的 $p_1(x, y, z) \equiv 0$, 此时

$$\tilde{p}(x, y, z) = (y^2 - 2pz)p_2(x, y, z) \in P_n^{(3)} (p > 0)$$

为满足定理中的插值条件的多项式, 故由 $P_n^{(3)}$ 空间中满足相同插值条件的多项式的唯一存在性, 有

$$p(x, y, z) = \tilde{p}(x, y, z) = (y^2 - 2pz)p_2(x, y, z) \in P_n^{(3)} (p > 0)$$

即 $p(x, y, z)$ 在抛物柱面 F 上恒取值为零。

4. 实验算例

设被插值函数为 $f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, 抛物柱面方程: $y^2 = z$, 取该抛物柱面外的一点 $Q_0(0, 0, 1)$ 并且在此抛物柱面上取互异的 9 个点 $Q_1(3, -2, 4), Q_2(-3, 2, 4), Q_3(-2, -2, 4), Q_4(-1, -3, 9), Q_5(-1, 3, 9), Q_6(1, 4, 16), Q_7(1, -4, 16), Q_8(-4, 3, 9), Q_9(-4, -3, 9)$ 由上述定理 2 知, 点组 $\{Q_0 \cdots Q_9\}$ 构成定义于抛物柱面 $y^2 = z$ 上的 2 次插值唯一可解结点组, 如图 1 所示. 设被插值函数在这些点上的二次插值多项式为

$$p(x, y, z) = a_1x^2 + a_2y^2 + a_3z^2 + a_4xy + a_5xz + a_6yz + a_7x + a_8y + a_9z + a_{10}$$

将插值条件带入 $p(Q_i) = f(Q_i), i = 0, 1, \dots, 9$, 得到方程组为 $A * X = B$, 其中

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 9 & 4 & 16 & -6 & 12 & -8 & 3 & -2 & 4 & 1 \\ 9 & 4 & 16 & -6 & -12 & 8 & -3 & 2 & 4 & 1 \\ 4 & 4 & 16 & 4 & -8 & -8 & -2 & -2 & 4 & 1 \\ 1 & 9 & 81 & 3 & -9 & -27 & -1 & -3 & 9 & 1 \\ 1 & 9 & 81 & -3 & -9 & 27 & -1 & 3 & 9 & 1 \\ 1 & 16 & 256 & 4 & 16 & 64 & 1 & 4 & 16 & 1 \\ 1 & 16 & 256 & -4 & 16 & -64 & 1 & -4 & 16 & 1 \\ 16 & 9 & 81 & -12 & -36 & 27 & -4 & 3 & 9 & 1 \\ 16 & 9 & 81 & 12 & -36 & -27 & -4 & -3 & 9 & 1 \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \\ a_6 \\ a_7 \\ a_8 \\ a_9 \\ a_{10} \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 \\ \sqrt{29} \\ \sqrt{29} \\ 2\sqrt{6} \\ \sqrt{91} \\ \sqrt{91} \\ \sqrt{273} \\ \sqrt{273} \\ \sqrt{106} \\ \sqrt{106} \end{bmatrix}$$

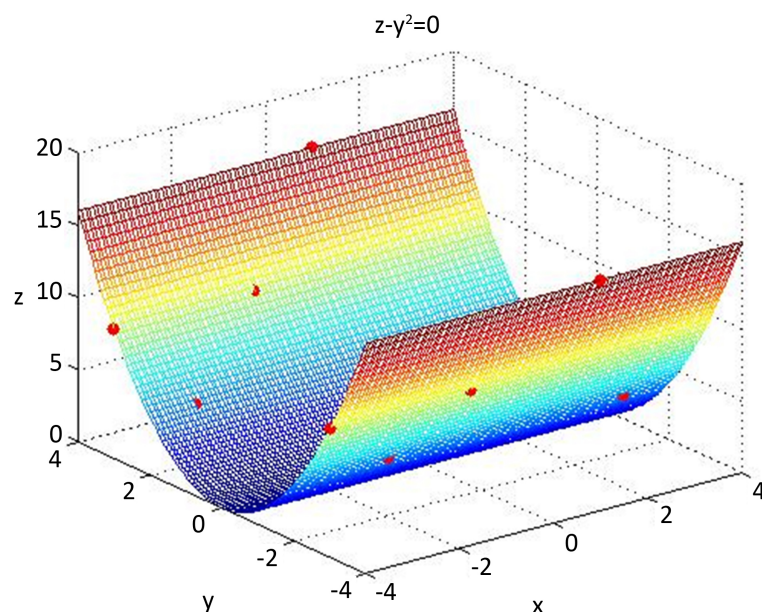


Figure 1. Parabolic cylinder point taking
图 1. 旋转抛物面取点图

解方程组得到：

$$\begin{cases} a_1 = 0.0972 \\ a_2 = 0.1116 \\ a_3 = -0.0124 \\ a_4 = 0 \\ a_5 = 0.0468 \\ a_6 = 0 \\ a_7 = -0.1873 \\ a_8 = 0 \\ a_9 = 1.0834 \\ a_{10} = -0.0710 \end{cases}$$

代入得到插值多项式为：

$$f(x, y, z) = 0.0972x^2 + 0.1116y^2 - 0.0124z^2 + 0.0468xz \\ - 0.1873x + 1.0834z - 0.0710$$

被插值多项式在 $(-2, -2, 4)$, $(-1, 3, 9)$ 的插值结果分别为 4.7996, 9.5429, 而插值函数在这两点处的精确值分别为 $2\sqrt{6}$, $\sqrt{91}$, 误差分别为 $t_1 = |2\sqrt{6} - 4.7996| \approx 0.099$, $t_2 = |\sqrt{91} - 9.5429| \approx 0.0035$ 。

参考文献 (References)

- [1] De Boor, C. and Ron, A. (1990) On Multivariate Polynomial Interpolation. *Constructive Approximation*, **6**, 287-302. <https://doi.org/10.1007/BF01890412>
- [2] 梁学章. 关于多元函数的插值与逼近[J]. 高等学校计算数学学报, 1979(1): 123-124.
- [3] 梁学章. 二元插值的适定结点组与迭加插值法[J]. 吉林大学自然科学学报, 1979(1): 27-32.
- [4] 梁学章, 张洁琳, 崔利宏. 多元 Lagrange 插值与 Cayley-Bacharach 定理[J]. 高等数学计算数学学报, 2005(27): 276-281.
- [5] 梁学章, 张明, 张慧杰, 等. 关于球面上的 Lagrange 插值[J]. 高等学校计算数学学报, 2011(33): 169-177.

-
- [6] Liang, X.Z., Wang, R.H., Cui, L.H., *et al.* (2006) Some Researches on Trivariate Lagrange Interpolation. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, **195**, 192-205. <https://doi.org/10.1016/j.cam.2005.03.083>
- [7] 梁学章, 李强. 多元逼近[M]. 北京: 国防工业出版社, 2005.
- [8] Castell, W.Z., Fernandez, N.L. and Xu, Y. (2007) Polynomial Interpolation on the Unit Sphere II. *Advances in Computational Mathematics*, **26**, 155-171 <https://doi.org/10.1007/s10444-005-7510-5>

知网检索的两种方式:

1. 打开知网页面 <http://kns.cnki.net/kns/brief/result.aspx?dbPrefix=WWJD>
下拉列表框选择: [ISSN], 输入期刊 ISSN: 2324-7991, 即可查询
2. 打开知网首页 <http://cnki.net/>
左侧“国际文献总库”进入, 输入文章标题, 即可查询

投稿请点击: <http://www.hanspub.org/Submission.aspx>

期刊邮箱: aam@hanspub.org