**Advances in Applied Mathematics** 应用数学进展, 2018, 7(12), 1600-1606
Published Online December 2018 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2018.712187

Hans汉斯

# Analysis of Bogdanov-Takens Bifurcation in Chua's System

**Caixian Su**

School of Computer Science, Guangdong Polytechnic Normal University, Guangzhou Guangdong
Email: 522061295@qq.com

Received: Nov. 23rd, 2018; accepted: Dec. 17th, 2018; published: Dec. 24th, 2018

## Abstract

**We present explicit formulae for normal form and universal unfolding of the Bogdanov-Takens bifurcation in Chua's system by a homological method, and plot the corresponding bifurcation diagram.**

## Keywords

**Bogdanov-Takens Bifurcation, Normal Form, Universal Unfolding, Chua's System**

# Chua's系统的Bogdanov-Takens分岔分析

**苏彩娴**

广东技术师范学院计算机科学学院，广东 广州
Email: 522061295@qq.com

收稿日期：2018年11月23日；录用日期：2018年12月17日；发布日期：2018年12月24日

## 摘　要

应用同调方法显式计算Chua's系统Bogdanov-Takens分岔的规范型和普适开折，并画出对应的分岔图。

## 关键词

**Bogdanov-Takens分岔，规范型，普适开折，Chua's系统**

文章引用: 苏彩娴. Chua's 系统的 Bogdanov-Takens 分岔分析[J]. 应用数学进展, 2018, 7(12): 1600-1606.
DOI: 10.12677/aam.2018.712187

## 1. 引言

1983 年，蔡少棠教授首次提出蔡氏电路[1]，这个系统拥有复杂的动力学行为，广泛应用于电子学方面[2]。本文主要基于参数依赖的中心流形，利用参数依赖的归一化方法[3] [4]来分析 Chua’s 系统的 Bogdanov-Takens 分岔。文章第二和第三部分分别介绍了对称系统 Bogdanov-Takens (BT)分岔规范型和普适开折的计算公式，第四部分计算 Chua’s 系统相应分岔的规范型和普适开折，并画出它的分岔图。

## 2. 规范型计算公式

考虑以下 $Z_2$ 对称系统

$$\dot{x} = f(x,\alpha), \tag{1}$$

其中 $x \in R^n\ (n \geq 2)$，$\alpha \in R^2$，$f: R^n \times R^2 \to R^n$ 充分光滑。向量场(1)在变换 $x \to -x$ 下保持不变，当 $\alpha = \alpha^*$ 时，有平衡点 $x = x^* = 0$，系统的雅可比矩阵 $J(x,\alpha)$ 在 $(x^*,\alpha^*)$ 处非零并且有二重零特征值，由向量场(1)的对称性，其可展开为如下形式：

$$\dot{x} = Ax + \frac{1}{6}C(x,x,x) + \cdots, \tag{2}$$

其中 $A = J(0,\alpha^*)$，$C(x,z,w) = \sum_{i,j,k=1}^{n} \frac{\partial^3 f(x^*,\alpha^*)}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k} y_i z_j w_k$，其余类似。设(1)的规范型和普适开折分别[5] [6] [7] [8]：

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = c_{30}x_1^3 + c_{21}x_1^2 x_2, \end{cases} \tag{3}$$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = \eta_1 x_1 + \eta_2 x_2 + c_{30}x_1^3 + c_{21}x_1^2 x_2. \end{cases} \tag{4}$$

**定理 1**：根据临界中心流形不变性和 Fredholm 择一性定理，向量场(1)相应于 BT 分岔规范型(3)，其系数计算公式如下[9]：

$$c_{30} = \frac{1}{6} p_2^{\mathrm{T}} C(q_1,q_1,q_1), \tag{5}$$

$$c_{21} = \frac{1}{2} p_2^{\mathrm{T}} C(q_1,q_1,q_2) + \frac{1}{2} p_1^{\mathrm{T}} C(q_1,q_1,q_1), \tag{6}$$

其中 $q_1, q_2$ 和 $p_1, p_2$ 分别为 $A$ 和 $A^{\mathrm{T}}$ 的广义特征向量，且满足：

$$Aq_1 = 0,\ Aq_2 = q_1,\ A^{\mathrm{T}} p_2 = 0,\ A^{\mathrm{T}} p_1 = p_2, \tag{7}$$

$$p_1^{\mathrm{T}} q_1 = p_2^{\mathrm{T}} q_2 = 1,\ p_1^{\mathrm{T}} q_2 = p_2^{\mathrm{T}} q_1 = 0. \tag{8}$$

## 3. 普适开折的计算公式

考虑参数 $\alpha$ 在 $\alpha^*$ 附近扰动，扰动量为 $\Delta = \alpha - \alpha^*$，此时(1)式可展开为如下形式：

$$\dot{x} = Ax + \frac{1}{6}C(x,x,x) + A_1(x,\Delta) + \frac{1}{6}C_1(x,x,x,\Delta) + \frac{1}{2}A_2(x,\Delta,\Delta) + \cdots, \tag{9}$$

其中 $A,C$ 如前所述，$A_1(y,\Delta) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{2}\frac{\partial^2 f(0,\alpha^*)}{\partial x_i \partial \alpha_j} y_i \Delta_j$，$C_1, A_2, \cdots$ 类似。

将原始参数和开折参数的关系表示为 $\Delta = V(\eta)$，进一步采用如下平方逼近：

$$\Delta_i = V_i(\eta) = a_i\eta_1 + b_i\eta_2 + c_i\eta_1^2 + d_i\eta_1\eta_2 + e_i\eta_2^2 + \mathrm{O}\left(\|\eta\|^3\right),\ i = 1,2. \tag{10}$$

**定理 2**：设(1)的 BT 分岔是非退化的，相应于普适开折(4)，根据 Fredholm 择一定理，比较同调代数方程中 $\omega_1^i\omega_2^j\eta_3^k\eta_4^l(i+j=1,k+l=1,2)$ 项的系数得到如下线性代数方程[10]：

$$p_2^{\mathrm{T}} A_1(q_1,a) = 1, \tag{11}$$

$$p_2^{\mathrm{T}} A_1(q_1,b) = 0, \tag{12}$$

$$p_1^{\mathrm{T}} A_1(q_1,a) + p_2^{\mathrm{T}} A_1(q_2,a) = 0, \tag{13}$$

$$p_1^{\mathrm{T}} A_1(q_1,b) + q_2^{\mathrm{T}} A_1(q_2,b) = 1. \tag{14}$$

由(11)~(14)可解得 $a$，$b$，以下方程可以求得 $c$，$d$ 和 $e$：

$$p_2^{\mathrm{T}} A_1(q_1,c) = p_2^{\mathrm{T}}\left(h_{0110} - A_1(h_{1010},a) - \frac{1}{2}A_2(q_1,a,a)\right), \tag{15}$$

$$p_2^{\mathrm{T}} A_1(q_1,d) = p_2^{\mathrm{T}}\left(h_{0101} - A_1(h_{1001},a) - A_1(h_{1010},b) - A_2(q_1,a,b)\right), \tag{16}$$

$$p_2^{\mathrm{T}} A_1(q_1,e) = -p_2^{\mathrm{T}}\left(A_1(h_{1001},b) + \frac{1}{2}A_2(q_1,b,b)\right), \tag{17}$$

$$\left(p_1^{\mathrm{T}}, p_2^{\mathrm{T}}\right)\begin{pmatrix} A_1(q_1,c) \\ A_1(q_2,c) \end{pmatrix} = p_1^{\mathrm{T}} h_{0110} - \left(p_1^{\mathrm{T}}, p_2^{\mathrm{T}}\right)\begin{pmatrix} A_1(h_{1010},a) \\ A_1(h_{0110},a) \end{pmatrix} - \frac{1}{2}\left(p_1^{\mathrm{T}}, p_2^{\mathrm{T}}\right)\begin{pmatrix} A_2(q_1,a,a) \\ A_2(q_2,a,a) \end{pmatrix}, \tag{18}$$

$$\left(p_1^{\mathrm{T}}, p_2^{\mathrm{T}}\right)\begin{pmatrix} A_1(q_1,d) \\ A_1(q_2,d) \end{pmatrix} = \left(p_1^{\mathrm{T}}, p_2^{\mathrm{T}}\right)\begin{pmatrix} h_{0101} \\ h_{0110} \end{pmatrix} - \left(p_1^{\mathrm{T}}, p_2^{\mathrm{T}}\right)\begin{pmatrix} A_1(h_{1001},a) + A_1(h_{1010},b) \\ A_1(h_{0101},a) + A_1(h_{0110},b) \end{pmatrix} - \left(p_1^{\mathrm{T}}, p_2^{\mathrm{T}}\right)\begin{pmatrix} A_2(q_1,a,b) \\ A_2(q_2,a,b) \end{pmatrix}, \tag{19}$$

$$\left(p_1^{\mathrm{T}}, p_2^{\mathrm{T}}\right)\begin{pmatrix} A_1(q_1,e) \\ A_1(q_2,e) \end{pmatrix} = p_2^{\mathrm{T}} h_{0101} - \left(p_1^{\mathrm{T}}, p_2^{\mathrm{T}}\right)\begin{pmatrix} A_1(h_{1001},b) \\ A_1(h_{0101},b) \end{pmatrix} - \frac{1}{2}\left(p_1^{\mathrm{T}}, p_2^{\mathrm{T}}\right)\begin{pmatrix} A_2(q_1,b,b) \\ A_2(q_2,b,b) \end{pmatrix}, \tag{20}$$

其中 $h_{ijkl}(i+j=1,k+l=1)$ 是如下奇异线性代数方程的任意解：

$$p_2^{\mathrm{T}}(h_{1010},h_{1001}) = -p_1^{\mathrm{T}}\left(A_1(q_1,a), A_1(q_1,b)\right), \tag{21}$$

$$p_2^{\mathrm{T}}(h_{0110},h_{0101}) = p_1^{\mathrm{T}}(h_{1010},h_{1001}) - p_1^{\mathrm{T}}\left(A_1(q_2,a), A_1(q_2,b)\right). \tag{22}$$

通过以上方程计算，并消去 $h_{10kl}(k+l=2)$，可以确定参数变换 $\Delta = V(\eta)$，从而求得开折参数 $\eta = V^{-1}(\Delta)$，且分岔的横截性条件为：

$$\left|\frac{\partial(\eta_1,\eta_2)}{\partial(\alpha_1,\alpha_2)}\right|_{\alpha=\alpha^*} = \left|\frac{\partial(\eta_1,\eta_2)}{\partial(\Delta_1,\Delta_2)}\right|_{\Delta} = \frac{1}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} \neq 0.$$

如果(1)的双零分岔满足非退化和横截性条件，则当 $\alpha$ 在 $\alpha^*$ 附近扰动，普适开折(4)对不同的 $c_{30}(\Delta)$ 和

$c_{21}(\Delta)$，其分岔图和相图的拓扑结构与 $c_{30}=c_{30}(0)$ 和 $c_{21}=c_{21}(0)$ 时相同[13]。

## 4. Chua's 系统 Bogdanov-Takens 分岔分析

以下为本文研究的立方非线性 Chua's 系统[11]。

$$\begin{cases} \dot{x}_1=\beta\left(x_2-\gamma x_1-\delta x_1^3\right), \\ \dot{x}_2=x_1-x_2+x_3, \\ \dot{x}_3=-hx_2. \end{cases} \tag{23}$$

容易验证：当 $\alpha^*=(\beta,0,\delta,\beta)$ 时，系统(23)有平衡点 $x^*=0$，它的 Jacobi 矩阵在平衡点处为 $A=\begin{pmatrix}0 & \beta & 0\\ 1 & -1 & 1\\ 0 & -\beta & 0\end{pmatrix}$。令 $|A-\lambda I|=0$，解得特征值 $\lambda_{1,2}=0$，$\lambda_3=-1$，根据(7)和(8)得到广义特征向量为：

$$q_1=\begin{pmatrix}-v\\ 0\\ v\end{pmatrix},\ q_2=\begin{pmatrix}-u-\dfrac{v}{\beta}\\ -\dfrac{v}{\beta}\\ u\end{pmatrix},\ p_1=\begin{pmatrix}\dfrac{u\beta}{v^2}+\dfrac{\beta}{v}\\ -\dfrac{\beta}{v}\\ \dfrac{u\beta}{v^2}+\dfrac{\beta}{v}+\dfrac{1}{v}\end{pmatrix},\ p_2=\begin{pmatrix}-\dfrac{\beta}{v}\\ 0\\ -\dfrac{\beta}{v}\end{pmatrix},$$

其中 $u,v\neq 0$ 为任意非零实数，计算 $C,A_1,C_1,A_2$ 为：

$$C(y,z,\omega)=\begin{pmatrix}-6\beta\delta y_1z_1\omega_1\\ 0\\ 0\end{pmatrix},\ A_1(y,u)=\begin{pmatrix}-\beta y_1u_2+y_2u_1\\ 0\\ 0\end{pmatrix},$$

$$C_1(y,z,w,u)=\begin{pmatrix}-6\delta y_1z_1w_1u_1\\ 0\\ 0\end{pmatrix},\ A_2(y,u,v)=\begin{pmatrix}-y_1u_1v_2-y_1u_2v_1\\ 0\\ 0\end{pmatrix}.$$

由(5)和(6)得到(23)的系数规范型

$$\begin{cases} c_{30}=\dfrac{1}{6}p_2^{\mathrm{T}}(q_1,q_1,q_1)=-v^2\beta^2\delta, \\ c_{21}=\dfrac{1}{2}p_2^{\mathrm{T}}(q_1,q_1,q_2)=3v^2\beta\delta(\beta-1). \end{cases} \tag{24}$$

系统(23)满足 BT 分岔非退化条件 $c_{30}c_{21}\neq 0$，从而 $\beta\delta\neq 0$ 和 $\beta\neq 1$ 时，然后扰动参数向量 $(\beta,\gamma,\delta,h)$，由临界值 $(\beta,0,\delta,\beta)$ 变成 $(\beta+\Delta_1,\Delta_2,\delta,\beta)$ 由(11)~(14)得到线性项的系数如下：

$$a_1=1-\frac{1}{\beta},\ b_1=1,\ a_2=-\frac{1}{\beta^2},\ b_2=0,$$

将以上系数代入(21)和(22)得

$$h_{1010}=\begin{pmatrix}\dfrac{-u-v+\left(C_4-C_5+C_6-C_8\right)\beta^2}{\beta}\\ -\dfrac{u}{\beta}\\ -\left(C_4-C_3+C_6-C_8\right)\beta\end{pmatrix},$$

$$h_{1001}=\begin{pmatrix} u+(C_7-C_8)\beta+\left(\frac{1}{2}C_1-\frac{1}{2}C_2+\frac{1}{2}C_3-C_5\right)\beta^2 \\ -u-(C_7-C_8)\beta+\left(\frac{1}{2}C_1-\frac{1}{2}C_2+\frac{1}{2}C_3-C_5\right)\beta^2 \end{pmatrix},$$

$$h_{0110}=\begin{pmatrix} \frac{-2u+2(C_4-C_5+C_6-C_8)\beta+(C_1-C_2+C_3)\beta^2}{2\beta} \\ C_4-C_5+C_6-C_8 \\ -(C_4-C_5+C_6-C_8)\beta \end{pmatrix},$$

$$h_{0101}=\begin{pmatrix} \frac{-2v+2(C_7-C_8)\beta+(C_1-C_2+C_3-2C_5+2C_8)\beta^2}{2\beta} \\ \left(\frac{1}{2}C_1-\frac{1}{2}C_2+\frac{1}{2}C_3-C_5\right)\beta \\ -u-(C_7-C_8)\beta-\left(\frac{1}{2}C_1-\frac{1}{2}C_2+\frac{1}{2}C_3-C_5\right)\beta^2 \end{pmatrix}.$$

这里 $u,v$ 和 $C_i\,(i=1,2,\cdots,8)$ 为任意实数，由上面(15)~(20)，得到二次项系数为：

$$c_1=\frac{1}{\beta^2},\ d_1=-\frac{2}{\beta},\ e_1=1,\ c_2=\frac{2}{\beta^3}-\frac{1}{\beta^4},\ d_2=\frac{1}{\beta^2}+\frac{1}{\beta^3},\ e_2=0.$$

令 $\eta_i=f_i\Delta_1+g_i\Delta_2+h_i\Delta_1^2+j_1\Delta_1\Delta_2+k_i\Delta_2^2+O\left(\|\Delta\|^3\right),i=1,2$，并代入 $\Delta=V(\eta)$，将以上两式代入(10)式，比较两端系数可以得到开折参数如下：

$$\begin{cases} \eta_1=-\beta^2\Delta_2+\beta^4\Delta_2^2-\left(\beta-\beta^2\right)\Delta_1\Delta_2+O\left(\|\Delta\|^3\right), \\ \eta_2=\Delta_1-\left(\beta-\beta^2\right)\Delta_2-\Delta_1^2-\left(1-2\beta+3\beta^2\right)\Delta_1\Delta_2 \\ \qquad +\left(\beta^3-2\beta^4\right)\Delta_2^2+O\left(\|\Delta\|^3\right). \end{cases} \tag{25}$$

由于 $\frac{1}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}=\frac{1}{\beta^2}\neq 0$，故横截性满足，从而当 $\beta\delta\neq 0$ 和 $\beta\neq 1$ 时，$\beta$ 和 $\gamma$ 可以作为系统(23)的分岔参数使系统发生完整双零分岔，本文可以计算 2 次精确度的开折参数，而文献[12]中计算的分岔参数仅是我们计算的线性部分。

最后，取 $\beta=2$，$\delta=1$，则系统参数变成 $(\beta,\gamma,\delta,h)=(2+\Delta_1,\Delta_2,1,2)$，由上面(24)和(25)得相应系数 $c_{30}=4v^2$，$c_{21}=-6v^2$，$\eta_1=-4\Delta_2+2\Delta_1\Delta_2+16\Delta_2^2+O\left(\|\Delta\|^3\right)$，$\eta_2=\Delta_1+2\Delta_2-\Delta_1^2-9\Delta_1\Delta_2-24\Delta_2^2+O\left(\|\Delta\|^3\right)$. 根据文献[13]，可得分岔曲线如下：

$$R=\left\{(\eta_1(\Delta),\eta_2(\Delta))\middle|\eta_1=0,\eta_2\neq 0\right\}=\left\{(\Delta_1,\Delta_2)\middle|\Delta_2=0,\Delta_1\neq 0\right\},$$

$$H=\left\{(\eta_1(\Delta),\eta_2(\Delta))\middle|\eta_1=0,\eta_2<0\right\}=\left\{(\Delta_1,\Delta_2)\middle|\Delta_2=-\frac{1}{2}\Delta_1+\frac{5\Delta_1^2}{4}+O\left(\Delta_1^3\right),\Delta_1<0\right\},$$

$$HL=\left\{(\eta_1(\Delta),\eta_2(\Delta))\middle|\eta_2=\frac{c_{21}}{5|c_{30}|}\eta_1+O\left(\eta_1^{3/2}\right),\eta_1<0\right\}=\left\{(\Delta_1,\Delta_2)\middle|\Delta_2=-\frac{5}{4}\Delta_1+\frac{205\Delta_1^2}{8}+O\left(\Delta_1^3\right),\Delta_1<0\right\}.$$

其分岔图见图 1。

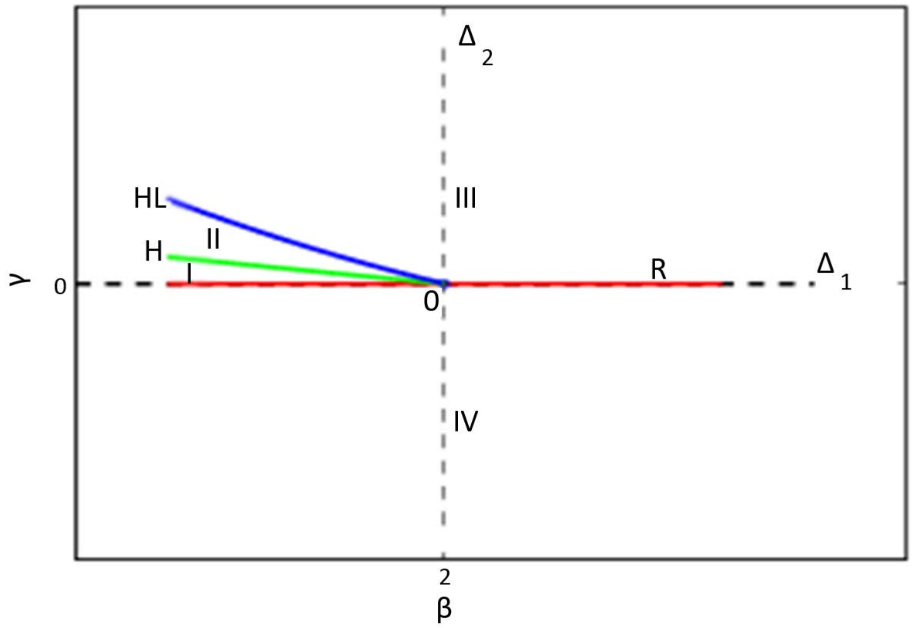


**Figure 1.** Bifurcation curves of system (23) at $\alpha^*=(\beta,\gamma,\delta,h)=(\beta,0,\delta,\beta)=(2,0,1,2)$ with bifurcation parameter $(\delta,\beta)$

**图 1.** 系统(23)在临界参数 $\alpha^*=(\beta,\gamma,\delta,h)=(\beta,0,\delta,\beta)=(2,0,1,2)$ 附近以 $(\delta,\beta)$ 为分岔参数的分岔图

## 5. 结束语

本文利用同调代数方法计算 Chua's 系统的规范型和普适开折，计算出来的开折参数精确到 2 次项，相对于其他研究的计算精确度更高，计算方法也更加简便。最后利用开折参数来分析 Chua's 系统的分岔，并画出它的分岔图。

## 参考文献


[1] Chua, L.O., Itoh, M., Kocarev, L., *et al*. (1993) Chaos Synchronization in Chua's Circuit. *International Journal of Bifurcation & Chaos*, **3**, 309-324. https://doi.org/10.1142/9789812798855_0013

[2] Kahan, S. and Sicardi-Schifino, A.C. (1999) Homoclinic Bifurcations in Chua's Circuit. *Physica A*: *Statistical Mechanics and Its Applications*, **262**, 144-152. https://doi.org/10.1016/S0378-4371(98)00389-6

[3] Beyn, W.J., Champneys, A., Doedel, E., *et al*. (2002) Numerical Continuation, and Computation of Normal Forms. *Handbook of Dynamical Systems*, **2**, 149-219. https://doi.org/10.1016/S1874-575X(02)80025-X

[4] Kuznetsov, Y.A., Meijer, H.G.E., Govaerts, W., *et al*. (2017) Switching to Nonhyperbolic Cycles from Codim 2 Bifurcations of Equilibria in ODEs. *Physica D Nonlinear Phenomena*, **237**, 3061-3068. https://doi.org/10.1016/j.physd.2008.06.006

[5] Khorozov, E.I. (1979) Versal Deformations of Equivariant Vector Fields in the Case of Symmetry of Order 2 and 3. *Transactions of Petrovski Seminar*, **5**, 163-192.

[6] Knobloch, E. and Proctor, M.R.E. (1981) Nonlinear Periodic Convection in Double-Diffusive Systems. *Journal of Fluid Mechanics*, **108**, 291-316. https://doi.org/10.1017/S0022112081002139

[7] Carr, J., Sanders, J.A. and Gils, S.A.V. (1987) Nonresonant Bifurcations with Symmetry. *SIAM Journal on Mathematical Analysis*, **18**, 291-316. https://doi.org/10.1137/0518045

[8] 唐云. 对称性分岔理论基础[M]. 北京: 科学出版社, 2000.

[9] Kuznetsov, Yu.A. (2005) Practical Computation of Normal Forms on Center Manifolds at Degenerate Bogdanov-Takens Bifurcations. *International Journal of Bifurcation & Chaos*, **15**, 3535-3546.

https://doi.org/10.1142/S0218127405014209

[10] 彭国俊, 陈潮填. 计算分岔规范型和普适开折的同调方法[J]. 吉林大学学报(理学版), 2013, 51(5): 783-788.

[11] Zhong, G.Q. (1994) Implementation of Chua's Circuit with a Cubic Nonlinearity. *IEEE Transactions on Circuits & Systems I Fundamental Theory & Applications*, **41**, 934-941. https://doi.org/10.1109/81.340866

[12] Algaba, A., Freire, E., Gamero, E., *et al*. (1999) On the Takens-Bogdanov Bifurcation in the Chua's Equation. *IEICE Transactions on Fundamentals of Electronics Communications & Computer Sciences*, **82**, 1722-1728.

[13] Chow, S.N., Li, C.Z. and Wang, D. (1994) Normal Forms and Bifurcation of Planar Vector Fields. Cambridge University Press, Cambridge. https://doi.org/10.1017/CBO9780511665639