Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, 2018, 7(2), 169-178
Published Online February 2018 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2018.72021

Hans汉斯

Matrix Representations of Sturm-Liouville Problems with Eigenparameter-Dependent Boundary Conditions on Time Scales

Nana Liu, Jijun Ao*, Juan Wang

College of Sciences, Inner Mongolia University of Technology, Hohhot Inner Mongolia
Email: 2523767264@qq.com, *george_ao@sina.com, 454359597@qq.com

Received: Jan. 19th, 2018; accepted: Feb. 4th, 2018; published: Feb. 24th, 2018

Abstract

The matrix representations of Sturm-Liouville problems with eigenparameter-dependent boundary conditions on time scales are investigated. By partitioning the time scales such that the coefficients of Sturm-Liouville equation satisfy some certain conditions on corresponding time scales, the equivalences between Sturm-Liouville problems and a certain kind of matrix eigenvalue problems are obtained.

Keywords

Sturm-Liouville Problems, Time Scales, Eigenparameter-Dependent Boundary Conditions, Matrix Representations

时标上带有谱参数边界条件的Sturm-Liouville问题的矩阵表示

刘娜娜，敖继军*，王　娟

内蒙古工业大学理学院，内蒙古 呼和浩特
Email: 2523767264@qq.com, *george_ao@sina.com, 454359597@qq.com

收稿日期：2018年1月19日；录用日期：2018年2月4日；发布日期：2018年2月24日

*通讯作者。

文章引用: 刘娜娜, 敖继军, 王娟. 时标上带有谱参数边界条件的 Sturm-Liouville 问题的矩阵表示[J]. 应用数学进展, 2018, 7(2): 169-178. DOI: 10.12677/aam.2018.72021

摘　要

本文讨论了时标上带有谱参数边界条件的Sturm-Liouville问题的矩阵表示。通过分割时标T，使得在对应时标上Sturm-Liouville问题的系数满足特定的条件，得出了所研究的Sturm-Liouville问题与一类矩阵特征值问题之间的等价关系。

关键词

Sturm-Liouville问题，时标，谱参数边界条件，矩阵表示

1. 引言

近年来，边界条件中含有谱参数的 Sturm-Liouville (S-L)问题一直是数学物理领域中研究的热点。一些物理问题例如热传导问题和边界在滑竿上的弦振动问题等，由于边界条件中含有谱参数，边界条件随着谱参数的变化而变化，其特征值也会随着谱参数的变化而变化。学者们从其自共轭性的刻画，特征值的分布，特征函数系的完备性以及反问题等诸多方面考虑，在该领域已经形成了比较系统的理论[1] [2] [3]。

目前，许多学者对二阶 S-L 问题以及高阶边值问题的有限谱与矩阵表示问题进行了讨论[4] [5] [6] [7] [8]，这些结论不仅证明了文献[9]中 Atkinson 的猜想，同时也说明了具有有限谱的 S-L 问题与矩阵特征值问题之间可以相互转化。

然而，1988 年，德国数学家 Stefan Hilger 首次提出了时标的概念，得到了一种能够将离散和连续两者结合起来，将微分方程和差分方程结合起来的理论新框架。由于时标在数学，物理等领域中的广泛应用，随后又有一些学者对时标上的 S-L 问题从多方面进行了一系列研究[10] [11] [12]，而对于时标上边界条件含有谱参数的 S-L 问题的矩阵表示还没有相应的结论。因此，本文利用文献[11]的方法，讨论了时标上带有谱参数边界条件的 S-L 问题的矩阵表示，在特定条件下得出两类问题之间的等价关系。

本文结构如下：在引言之后，第二部分给出了时标 $\mathbf{T}=[a,b]\cup\{c\}\cup[d,e]$ 上带有耦合型谱参数边界条件的矩阵表示的结论并给与了证明，同时得出带有分离型谱参数边界条件下的相应结论，第三部分得出了时标上矩阵特征值问题的带有谱参数边界条件的 S-L 问题表示。

主要讨论时标上带有谱参数边界条件的 Atkinson 类型的 S-L 问题与矩阵特征值问题

$$DX=\lambda WX \tag{1}$$

之间的等价关系。

考虑如下 S-L 方程

$$\begin{aligned}&-\left(py^{\Delta}\right)^{\Delta}+qy^{\sigma}=\lambda wy^{\sigma},\\&\mathbf{T}=[a,b]\cup\{c\}\cup[d,e],\ -\infty<a<b<c<d<e<+\infty,\end{aligned} \tag{2}$$

$$\lambda \in \mathbf{C},\ r = \frac{1}{p}, q, w \in C_{prd}(\mathbf{T}), \tag{3}$$

带有一般耦合型谱参数的边界条件

$$A_\lambda Y(a) + B_\lambda Y(e) = 0,\ Y = \begin{pmatrix} y \\ py^\Delta \end{pmatrix}, \tag{4}$$

其中

$$A_\lambda = \begin{pmatrix} \lambda\alpha_1' + \alpha_1 & \lambda\alpha_2' + \alpha_2 \\ \lambda\beta_1' + \beta_1 & \lambda\beta_2' + \beta_2 \end{pmatrix},\ B_\lambda = \begin{pmatrix} \lambda\alpha_3' + \alpha_3 & \lambda\alpha_4' + \alpha_4 \\ \lambda\beta_3' + \beta_3 & \lambda\beta_4' + \beta_4 \end{pmatrix},$$

且 $\alpha_i, \alpha_i', \beta_i, \beta_i' \in \mathbf{R}, i = 1,2,3,4$，满足条件

$$rank\begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & \beta_4 \end{pmatrix} = 2,\ rank\begin{pmatrix} \alpha_1' & \alpha_2' & \alpha_3' & \alpha_4' \\ \beta_1' & \beta_2' & \beta_3' & \beta_4' \end{pmatrix} = 2,$$

$$rank\begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 \\ \alpha_1' & \alpha_2' & \alpha_3' & \alpha_4' \end{pmatrix} = 2,\ rank\begin{pmatrix} \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & \beta_4 \\ \beta_1' & \beta_2' & \beta_3' & \beta_4' \end{pmatrix} = 2.$$

设 $u = y, v = py^\Delta$，则方程(2)可以表示为

$$u^\Delta = rv,\ v^\Delta = (q - \lambda w)u^\sigma,\ t \in \mathbf{T}. \tag{5}$$

以下是本文用到的有关时标的基本概念：

定义 1.1 [11] 时标 $\mathbf{T}$ 为 $\mathbf{R}$ 中的一个非空闭子集。$\forall t \in \mathbf{T}$，定义前跳算子 σ 为 $\sigma: \mathbf{T} \to \mathbf{T}$，$\sigma(t) = \inf\{s \in \mathbf{T} : s > t\}$；后跳算子 ρ 为 $\rho: \mathbf{T} \to \mathbf{T}, \rho(t) = \sup\{s \in \mathbf{T}, s < t\}$。其中，$\inf\varnothing = \sup\mathbf{T}$，$\sup\varnothing = \inf\mathbf{T}$。

定义 1.2 [11] $\forall t \in \mathbf{T}$，若 $t < \sup\mathbf{T}$，且 $\sigma(t) = t$，则 $t \in \mathbf{T}$ 称为右稠密(rd)的；若 $t > \inf\mathbf{T}$，且 $\rho(t) = t$，则称 $t \in \mathbf{T}$ 为左稠密(ld)的；若 $t < \sigma(t)$，则称 $t \in \mathbf{T}$ 为右分散(rs)的；若 $t > \rho(t)$，则称 $t \in \mathbf{T}$ 为左分散(ls)的。步长函数 $\mu: \mathbf{T} \to [0,\infty), \mu(t) := \sigma(t) - t$。

定义 1.3 [11] 记 $\mathbf{T}^\kappa = \mathbf{T}\setminus\{b\}$，$b$ 为 $\mathbf{T}$ 的最大值且为左分散的，否则 $\mathbf{T}^\kappa = \mathbf{T}$。设函数 $f: \mathbf{T} \to \mathbf{C}, \forall t \in \mathbf{T}^\kappa$，

$$f^\Delta(t) = \begin{cases} \lim\limits_{s \to t} \dfrac{f(s) - f(t)}{s - t}, & \mu(t) = 0, \\ \dfrac{f^\sigma(t) - t}{\mu(t)}, & \mu(t) > 0, \end{cases}$$

其中，$f^\sigma(t) = f(\sigma(t))$。

定义 1.4 [11] 函数 $f: \mathbf{T} \to \mathbf{C}$ 为 rd 连续的，是指它在左稠密的点处极限存在，右稠密的点处连续，rd 连续的函数记为 $C_{rd}(\mathbf{T})$；函数 $f: \mathbf{T} \to \mathbf{C}$ 为 prd 连续的，是指它在左稠密的点处极限存在，在除有限个右稠密的点处均为连续的，prd 连续的函数记为 $C_{prd}(\mathbf{T})$。

若 $F^\Delta(t) = f(t)$，$t \in \mathbf{T}^\kappa$，则在时标 $\mathbf{T}$ 上定义 f 的积分

$$\int_a^b f(\tau)\Delta\tau = F(b) - F(a),\ a, b \in \mathbf{T}.$$

2. 时标上带有谱参数边界条件的 Sturm-Liouville 问题的矩阵表示

定义 2.1 时标上的 S-L 方程称为是 Atkinson 类型的，如果对于任意的正整数 $m \ge 1, n \ge 1$ 存在对时标 $\mathbf{T}$ 的分割：

$$a=a_0<a_1<a_2<\cdots<a_{2m}<a_{2m+1}=b,\\ d=b_0<b_1<b_2<\cdots<b_{2n}<b_{2n+1}=e, \tag{6}$$

使得

$$r=\frac{1}{p}=0,\quad t\in\left(a_{2k},a_{2k+1}\right),\quad \int_{a_{2k}}^{a_{2k+1}}w\neq 0,\ \ k=0,1,\cdots,m,\\ r=\frac{1}{p}=0,\quad t\in\left(b_{2i},b_{2i+1}\right),\quad \int_{b_{2i}}^{b_{2i+1}}w\neq 0,\ \ i=0,1,\cdots,n, \tag{7}$$

以及

$$q=0=w,\quad t\in\left(a_{2k+1},a_{2k+2}\right),\quad \int_{a_{2k+1}}^{a_{2k+2}}r\neq 0,\quad k=0,1,\cdots,m-1,\\ q=0=w,\quad t\in\left(b_{2i+1},b_{2i+2}\right),\quad \int_{b_{2i+1}}^{b_{2i+2}}r\neq 0,\quad i=0,1,\cdots,n-1. \tag{8}$$

定义 2.2 时标上带有谱参数边界条件的 S-L 问题(2)，(3)为 Atkinson 类型的，如果方程(2)是 Atkinson 类型的。一个 Atkinson 类型的含有谱参数边界条件的 S-L 问题称为与矩阵特征值问题是等价的，如果它们有相同的特征值。不妨设

$$p_k=\left(\int_{a_{2k-1}}^{a_{2k}}r\right)^{-1},\ k=1,2,\cdots,m;\quad q_k=\int_{a_{2k}}^{a_{2k+1}}q,\quad w_k=\int_{a_{2k}}^{a_{2k+1}}w,\ k=0,1,\cdots,m;\\ \tilde{p}_i=\left(\int_{b_{2i-1}}^{b_{2i}}r\right)^{-1},\ i=1,2,\cdots,n;\quad \tilde{q}_i=\int_{b_{2i}}^{b_{2i+1}}q,\quad \tilde{w}_i=\int_{b_{2i}}^{b_{2i+1}}w,\ i=0,1,\cdots,n.\\ p_{m+1}=p(b),\quad \tilde{p}_{n+1}=p(e),\quad q_{m+1}=q(b),\quad \tilde{q}_{n+1}=q(e),\quad w_{m+1}=w(b),\\ \tilde{w}_{n+1}=w(e),\quad \hat{p}=p(c),\quad \hat{q}=q(c),\quad \hat{w}=w(c). \tag{9}$$

由(7)，(8)可知对于(5)的任何解u和v，u在r恒等于零的子区间上为常数，而v在q和w恒等于零的子区间上为常数。由此可令：

$$u_k=u(t),\ t\in\left[a_{2k},a_{2k+1}\right],\ k=0,1,\cdots,m-1,\ u_m=u(t),\ t\in\left[a_{2m},a_{2m+1}\right),\\ \hat{u}=u(c),\ \ \tilde{u}_0=u(t),\ t\in\left(b_0,b_1\right],\ \ \tilde{u}_i=u(t),\ t\in\left[b_{2i},b_{2i+1}\right],\ i=1,2,\cdots,n.\\ v_k=v(t),\ t\in\left[a_{2k-1},a_{2k}\right],\ k=1,\cdots,m,\ \ \tilde{v}_i=v(t),\ t\in\left[b_{2i-1},b_{2i}\right],\ i=1,\cdots,n. \tag{10}$$

并设

$$v_0=v\left(a_0\right)=v(a),\quad v_{m+1}=v\left(a_{2m+1}\right)=v(b),\\ \hat{v}=v(c),\quad \tilde{v}_0=v\left(b_0\right)=v(d),\quad \tilde{v}_{n+1}=v\left(b_{2n+1}\right)=v(e). \tag{11}$$

引理 2.3 对方程(5)的任何一组解u,v有

$$p_k\left(u_k-u_{k-1}\right)=v_k,\ \ k=1,2,\cdots,m, \tag{12}$$

$$v_{k+1}-v_k=u_k\left(q_k-\lambda w_k\right),\ \ k=0,1,\cdots,m, \tag{13}$$

$$\tilde{v}_0-\hat{v}=\tilde{u}_0\left(\hat{q}-\lambda\hat{w}\right)\left(d-c\right), \tag{14}$$

$$\tilde{p}_i\left(\tilde{u}_i-\tilde{u}_{i-1}\right)=\tilde{v}_i,\ \ i=1,2,\cdots,n, \tag{15}$$

$$\tilde{v}_{i+1}-\tilde{v}_i=\tilde{u}_i\left(\tilde{q}_i-\lambda\tilde{w}_i\right),\ \ i=0,1,\cdots,n. \tag{16}$$

反之，对于系统(12)~(16)的任一组解 $u_k,k=0,1,\cdots,m$，$v_k,k=0,1,\cdots,m+1$ 和 $\tilde{u}_i,i=0,1,\cdots,n$，

$\tilde{v}_i, i = 0,1,\cdots,n+1$，$\hat{u},\hat{v}$，存在方程组(5)的唯一解 $u(t)$ 和 $v(t)$ 满足(10)和(11)。

证明 证明可参考[5]。 ■

下面讨论时标上带有耦合型谱参数边界条件(4)的 S-L 方程的矩阵表示。

定理 2.4 设 S-L 方程(2)满足带有耦合型谱参数的边界条件(4)，定义 $(m+n+5)\times(m+n+5)$ 矩阵

$$P=\begin{pmatrix}
-\alpha_2 & -\alpha_1 & & & & & & & & & & -\alpha_3 & -\alpha_4\\
1 & p_1 & -p_1 & & & & & & & & & & \\
 & -p_1 & p_1+p_2 & -p_2 & & & & & & & & & \\
 & & \ddots & \ddots & \ddots & & & & & & & & \\
 & & & -p_{m-1} & p_{m-1}+p_m & -p_m & & & & & & & \\
 & & & & -p_m & p_m+\dfrac{p_{m+1}}{c-b} & -\dfrac{p_{m+1}}{c-b} & & & & & & \\
 & & & & & -\dfrac{p_{m+1}}{c-b} & \dfrac{p_{m+1}}{c-b}+\dfrac{\hat{p}}{d-c} & -\dfrac{\hat{p}}{d-c} & & & & & \\
 & & & & & & -\dfrac{\hat{p}}{d-c} & \dfrac{\hat{p}}{d-c}+\tilde{p}_1 & -\tilde{p}_1 & & & & \\
 & & & & & & & -\tilde{p}_1 & \tilde{p}_1+\tilde{p}_2 & -\tilde{p}_2 & & & \\
 & & & & & & & & \ddots & \ddots & \ddots & & \\
 & & & & & & & & & -\tilde{p}_{n-1} & \tilde{p}_{n-1}+\tilde{p}_n & -\tilde{p}_n & \\
 & & & & & & & & & & -\tilde{p}_n & \tilde{p}_n & -1\\
-\beta_2 & -\beta_1 & & & & & & & & & & -\beta_3 & -\beta_4
\end{pmatrix} \tag{17}$$

和对角矩阵

$$Q = diag\left(0,q_0,q_1,\cdots,q_m,(c-b)q_{m+1},(d-c)\hat{q}+\tilde{q}_0,\tilde{q}_1,\cdots,\tilde{q}_n,0\right) \tag{18}$$

以及矩阵

$$W=\begin{pmatrix}
\alpha_2' & \alpha_1' & & & & & & & \alpha_3' & \alpha_4'\\
 & w_0 & & & & & & & & \\
 & & \ddots & & & & & & & \\
 & & & w_m & & & & & & \\
 & & & & (c-b)w_{m+1} & & & & & \\
 & & & & & (d-c)\hat{w}+\tilde{w}_0 & & & & \\
 & & & & & & \tilde{w}_1 & & & \\
 & & & & & & & \ddots & & \\
 & & & & & & & & \tilde{w}_n & \\
\beta_2' & \beta_1' & & & & & & & \beta_3' & \beta_4'
\end{pmatrix}. \tag{19}$$

则带有谱参数边界条件的 S-L 问题(2)~(4)与矩阵特征值问题

$$(P+Q)U = \lambda WU \tag{20}$$

等价，其中 $U=\left[v_0,u_0,u_1,\cdots,u_m,\hat{u},\tilde{u}_0,\cdots,\tilde{u}_n,\tilde{v}_{n+1}\right]^{\mathrm{T}}$。此外，同一特征值的带有谱参数边界条件的 S-L 问题的特征函数 $u(t)$ 与矩阵特征值问题(20)的特征向量 U 之间存在关系式：

$$u(t)=u_k,\ t\in\left[a_{2k},a_{2k+1}\right],\ k=0,\cdots,m-1,$$

$$u(t)=u_m,\ t\in[a_{2m},a_{2m+1}),\quad u(t)=\tilde{u}_0,\ t\in(b_0,b_1],$$
$$u(t)=\tilde{u}_i,\ t\in[b_{2i},b_{2i+1}],\ i=1,2,\cdots,n,\ u(c)=\hat{u}.$$

证明 首先，系统(12)~(16)与以下系统等价：

$$p_1(u_1-u_0)-v_0=u_0(q_0-\lambda w_0), \tag{21}$$

$$p_{k+1}(u_{k+1}-u_k)-p_k(u_k-u_{k-1})=u_k(q_k-\lambda w_k),\ k=1,2,\cdots,m-1, \tag{22}$$

$$v_{m+1}-p_m(u_m-u_{m-1})=u_m(q_m-\lambda w_m), \tag{23}$$

$$\hat{p}(\tilde{u}_0-\hat{u})-p_{m+1}(\hat{u}-u_m)=(c-b)^2(d-c)\hat{u}(q_{m+1}-\lambda w_{m+1}), \tag{24}$$

$$\tilde{p}_1(\tilde{u}_1-\tilde{u}_0)-\tilde{v}_0=\tilde{u}_0(\tilde{q}_0-\lambda\tilde{w}_0), \tag{25}$$

$$\tilde{p}_{i+1}(\tilde{u}_{i+1}+\tilde{u}_i)-\tilde{p}_i(\tilde{u}_i-\tilde{u}_{i-1})=\tilde{u}_i(\tilde{q}_i-\lambda\tilde{w}_i),\ i=1,2,\cdots,n-1, \tag{26}$$

$$\tilde{v}_{n+1}-\tilde{p}_n(\tilde{u}_n-\tilde{u}_{n-1})=\tilde{u}_n(\tilde{q}_n-\lambda\tilde{w}_n). \tag{27}$$

事实上，若假设 $u_k,k=0,1,2,\cdots,m$ 和 $v_k,k=0,1,2,\cdots,m+1$ 是系统(12)，(13)的解。则(21)~(23)可由(12)，(13)得到。同理，(25)~(27)可由(15)，(16)通过假设 $\tilde{u}_i,i=0,1,\cdots,n$ 和 $\tilde{v}_i,i=0,1,2,\cdots,n+1$ 为系统(15)，(16)的一组解而得到。(24)可由(14)通过假设 $\hat{u},\hat{v}$ 为系统(14)的解以及文献[11]而得到。另一方面，若设 $u_k,k=0,1,\cdots,m$ 是系统(21)~(23)的一组解。则 v_0 和 v_{m+1} 可分别由(21)和(23)得出。再令 $v_k,k=1,2,\cdots,m$ 是由(12)所定义。则利用(21)并反复利用(22)进行逐步推导可得到(13)，同理可得(15)，(16)。因此由引理 2.3，方程(5)的任何解，从而也是方程(2)的解，被系统(21)~(27)的解唯一决定。由边界条件(4)，有

$$\begin{aligned}&(\lambda\alpha_1'+\alpha_1)u_0+(\lambda\alpha_2'+\alpha_2)v_0+(\lambda\alpha_3'+\alpha_3)\tilde{u}_n+(\lambda\alpha_4'+\alpha_4)\tilde{v}_{n+1}=0,\\&(\lambda\beta_1'+\beta_1)u_0+(\lambda\beta_2'+\beta_2)v_0+(\lambda\beta_3'+\beta_3)\tilde{u}_n+(\lambda\beta_4'+\beta_4)\tilde{v}_{n+1}=0.\end{aligned} \tag{28}$$

由文献[11]又有

$$v_{m+1}=-\frac{p_{m+1}}{c-b}u_m+\frac{p_{m+1}}{c-b}\hat{u},$$

$$\tilde{v}_0=-\frac{\hat{p}}{d-c}\hat{u}+\left[\frac{\hat{p}}{d-c}+(d-c)(\hat{q}-\lambda\hat{w})\right]\tilde{u}_0,$$

通过选取向量 $U=[v_0,u_0,u_1,\cdots,u_m,\hat{u},\tilde{u}_0,\cdots,\tilde{u}_n,\tilde{v}_{n+1}]^{\mathrm{T}}$，并由(21)~(28)即可得到两类问题之间的等价性。■

将带有谱参数的耦合型边界条件(4)变形即可得到带有分离型谱参数的边界条件

$$A_\lambda Y(a)+B_\lambda Y(b)=0,\ Y=\begin{pmatrix}y\\py^{\Delta}\end{pmatrix}, \tag{29}$$

其中

$$A_\lambda=\begin{pmatrix}\lambda\alpha_1'+\alpha_1 & \lambda\alpha_2'+\alpha_2\\0&0\end{pmatrix},\quad B_\lambda=\begin{pmatrix}0&0\\\lambda\beta_1'+\beta_1&\lambda\beta_2'+\beta_2\end{pmatrix},$$

$\alpha_i,\alpha_i',\beta_i,\beta_i'\in\mathbf{R},i=1,2$，满足 $\theta_1=\begin{vmatrix}\alpha_1&\alpha_2\\\alpha_1'&\alpha_2'\end{vmatrix}\neq0$，$\theta_2=\begin{vmatrix}\beta_1&\beta_2\\\beta_1'&\beta_2'\end{vmatrix}\neq0$，$\lambda$ 为谱参数，则可得到以下推论。

推论 2.5 设 S-L 方程(2)满足带有分离型谱参数边界条件(29)，定义 $(m+n+5)\times(m+n+5)$ 三对角矩阵

$$P_1=\begin{pmatrix} \alpha_2 & \alpha_1 \\ 1 & p_1 & -p_1 \\ & -p_1 & p_1+p_2 & -p_2 \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & -p_{m-1} & p_{m-1}+p_m & -p_m \\ & & & & -p_m & p_m+\frac{p_{m+1}}{c-b} & -\frac{p_{m+1}}{c-b} \\ & & & & & -\frac{p_{m+1}}{c-b} & \frac{p_{m+1}}{c-b}+\frac{\hat{p}}{d-c} & -\frac{\hat{p}}{d-c} \\ & & & & & & -\frac{\hat{p}}{d-c} & \frac{\hat{p}}{d-c}+\tilde{p}_1 & -\tilde{p}_1 \\ & & & & & & & -\tilde{p}_1 & \tilde{p}_1+\tilde{p}_2 & -\tilde{p}_2 \\ & & & & & & & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & & & & & & & -\tilde{p}_{n-1} & \tilde{p}_{n-1}+\tilde{p}_n & -\tilde{p}_n \\ & & & & & & & & & & -\tilde{p}_n & \tilde{p}_n & -1 \\ & & & & & & & & & & & \beta_1 & \beta_2 \end{pmatrix} \tag{30}$$

和对角矩阵

$$Q_1=diag\left(0,q_0,q_1,\cdots,q_m,(c-b)q_{m+1},(d-c)\hat{q}+\tilde{q}_0,\tilde{q}_1,\cdots,\tilde{q}_n,0\right) \tag{31}$$

以及“几乎对角”(除了(1,2)和(m+n+5,m+n+4)位置上有非零元素外为对角矩阵)矩阵

$$W_1=\begin{pmatrix} -\alpha_2' & -\alpha_1' \\ & w_0 \\ & & \ddots \\ & & & w_m \\ & & & & (c-b)w_{m+1} \\ & & & & & (d-c)\hat{w}+\tilde{w}_0 \\ & & & & & & \tilde{w}_1 \\ & & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & & \tilde{w}_n \\ & & & & & & & & -\beta_1' & -\beta_2' \end{pmatrix}. \tag{32}$$

则带有分离型谱参数边界条件(29)的 S-L 问题(2)，(3)与矩阵特征值问题

$$(P_1+Q_1)U_1=\lambda W_1U_1 \tag{33}$$

等价，其中 $U_1=\left[v_0,u_0,u_1,\cdots,u_m,\hat{u},\tilde{u}_0,\cdots,\tilde{u}_n,\tilde{v}_{n+1}\right]^{\mathrm{T}}$。此外，所有特征值为几何单重的，同一特征值的含有谱参数边界条件的 S-L 问题的特征函数 $u(t)$ 与矩阵特征值问题(33)的特征向量 U 之间存在关系式：

$$u(t)=u_k,\ t\in[a_{2k},a_{2k+1}],\ k=0,\cdots,m-1,\ \ u(t)=u_m,\ t\in[a_{2m},a_{2m+1}),$$

$$u(t)=\tilde{u}_0,\ t\in(b_0,b_1],\ \ u(t)=\tilde{u}_i,\ t\in[b_{2i},b_{2i+1}],\ i=1,2,\cdots,n,\ u(c)=\hat{u}.$$

证明 同定理 2.4。 ■

以下定理说明每一个 Atkinson 类型的方程与一个以分段常值函数为系数的方程是等价的。

定理 2.6 设方程(2)，(3)是 Atkinson 类型的，并设 $p_k,k=1,2,\cdots,m$，$\tilde{p}_i,i=1,2,\cdots,n$，以及 $q_k,w_k,k=0,1,\cdots,m$，$\tilde{q}_i,\tilde{w}_i,i=0,1,\cdots,n$ 由(9)给出，定义时标 $\mathbf{T}$ 上的分段函数 $\overline{p},\overline{q},\overline{w}$ 如下：

$$
\bar{p}(t)=\begin{cases} p_k\left(a_{2k}-a_{2k-1}\right),\ t\in\left[a_{2k-1},a_{2k}\right],\ k=1,2,\cdots,m, \\ \infty,\ t\in\left[a_{2k},a_{2k+1}\right),\ k=0,1,\cdots,m, \\ p(b)\neq\infty,\ t=a_{2m+1}, \\ \hat{p},\ t=c, \\ \tilde{p}_i\left(b_{2i}-b_{2i-1}\right),\ t\in\left[b_{2i-1},b_{2i}\right],\ i=1,2,\cdots,n, \\ \infty,\ t\in\left[b_{2i},b_{2i+1}\right),\ i=0,1,2,\cdots,n, \\ p(e)\neq\infty,\ t=b_{2n+1}, \end{cases}
$$

$$
\bar{q}(t)=\begin{cases} \dfrac{q_k}{a_{2k+1}-a_{2k}},\ t\in\left[a_{2k},a_{2k+1}\right),\ k=0,1,\cdots,m, \\ 0,\ t\in\left[a_{2k-1},a_{2k}\right],\ k=1,2,\cdots,m, \\ \hat{q},\ t=c, \\ \dfrac{\tilde{q}_i}{b_{2i+1}-b_{2i}},\ t\in\left(b_{2i},b_{2i+1}\right],\ i=0,1,\cdots,n, \\ 0,\ t\in\left[b_{2i-1},b_{2i}\right],\ i=1,2,\cdots,n, \end{cases} \tag{34}
$$

$$
\bar{w}(t)=\begin{cases} \dfrac{w_k}{a_{2k+1}-a_{2k}},\ t\in\left[a_{2k},a_{2k+1}\right),\ k=0,1,\cdots,m, \\ 0,\ t\in\left[a_{2k-1},a_{2k}\right],\ k=1,2,\cdots,m, \\ \hat{w},\ t=c, \\ \dfrac{\tilde{w}_i}{b_{2i+1}-b_{2i}},\ t\in\left(b_{2i},b_{2i+1}\right],\ i=0,1,\cdots,n, \\ 0,\ t\in\left[b_{2i-1},b_{2i}\right],\ i=1,2,\cdots,n. \end{cases}
$$

设谱参数边界条件(4)满足。则时标上边界条件含有谱参数的 S-L 问题(2)，(3)与分段常值函数为系数的方程

$$
-\left(\bar{p}y^{\Delta}\right)^{\Delta}+\bar{q}y^{\sigma}=\lambda\bar{w}y^{\sigma},\ t\in\mathbf{T}=[a,b]\cup\{c\}\cup[d,e], \tag{35}
$$

以及同样的谱参数边界条件(4)所构成的 S-L 问题有相同的特征值。

证明 显然，两个不同的 S-L 问题(2)~(4)和(35)，(3)，(4)，决定相同的 $p_k, k=1,2,\cdots,m, \hat{p}, \tilde{p}_i, i=1,2,\cdots,n$，以及 $q_k, w_k, k=0,1,\cdots,m, \hat{q}, \hat{w}, \tilde{q}_i, \tilde{w}_i, i=0,1,\cdots,n$。因此由定理 2.4 及推论 2.5 可知，在包含谱参数边界条件(4)的情况下，两个不同的 S-L 问题与矩阵特征值问题等价，所以它们有相同的特征值。 ■

3. 矩阵特征值问题的时标上带有谱参数边界条件的 S-L 问题表示

接下来给出矩阵特征值问题

$$
DX=\lambda HX \tag{36}
$$

的具有 Atkinson 类型的含有谱参数边界条件的 S-L 问题表示。其中 $D=\left(d_{ij}\right)$ 是 $l\times l$ 实三对角或“几乎对角”矩阵且满足 $d_{i,i+1}\neq 0, i=2,3,\cdots,l-2$，而 $H=\left(h_{ij}\right)$ 为 $l\times l$ “几乎对角”矩阵且满足 $h_{jj}\neq 0,\ j=2,3,\cdots,l-1$，这是本文另一个重要结论，它是定理 2.4 的逆过程。

定理 3.1 令 $l>4$，设 D 为 $l\times l$ 实“几乎三对角”矩阵(除了 $(1,l-1),(1,l),(l,1),(l,2)$ 上有非零元素之外为三对角矩阵)

$$D=\begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} & & & & & & & d_{1,l-1} & d_{1l} \\ 1 & d_{22} & d_{23} & & & & & & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & & & & & \\ & & d_{k,k-1} & d_{k,k} & d_{k,k+1} & & & & & \\ & & & d_{k,k+1} & d_{k+1,k+1} & d_{k+1,k+2} & & & & \\ & & & & d_{k+1,k+2} & d_{k+2,k+2} & d_{k+2,k+3} & & & \\ & & & & & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & & & & & d_{l-1,l-2} & d_{l-1,l-1} & -1 & \\ d_{l1} & d_{l2} & & & & & & & d_{l,l-1} & d_{ll} \end{pmatrix}, \tag{37}$$

其中 $2\le k\le l-3$， $d_{ij}\in\mathbf{R},1\le i,j\le l$， $d_{j,j+1}\ne 0,\ j=2,3,\cdots,m-2$， $d_{21}=1$， $d_{l-1,l}=-1$。而 H 为 $l\times l$ “几乎对角”矩阵

$$H=\begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} & & h_{1,l-1} & h_{1l} \\ & h_{22} & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & h_{l-1,l-1} & \\ h_{l1} & h_{l2} & & h_{l,l-1} & h_{ll} \end{pmatrix}, \tag{38}$$

其中 $h_{jj}\ne 0,\ j=2,3,\cdots,m-1$，矩阵 D,H 的第一行和最后一行元素满足

$$rank\begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{1,l-1} & d_{1l} \\ d_{l1} & d_{l2} & d_{l,l-1} & d_{ll} \end{pmatrix}=2,\ rank\begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} & h_{1,l-1} & h_{1l} \\ h_{l1} & h_{l1} & h_{l,l-1} & h_{ll} \end{pmatrix}=2,$$

$$rank\begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{1,l-1} & d_{1l} \\ h_{11} & h_{12} & h_{1,l-1} & h_{1l} \end{pmatrix}=2,\ rank\begin{pmatrix} d_{l1} & d_{l2} & d_{l,l-1} & d_{ll} \\ h_{l1} & h_{l2} & h_{l,l-1} & h_{ll} \end{pmatrix}=2.$$

则对固定的 $\hat{w}=w(c),\hat{q}=q(c)$ 矩阵特征值问题(36)有 Atkinson 类型的含有谱参数边界条件的 S-L 问题表示，其形式为 S-L 问题(2)，(4)。且给定时标 $\mathbf{T}$ 的一个固定分割(6)，矩阵特征值问题(36)在(9)的符号意义下有唯一的具有(35)，(4)形式的 S-L 问题的表示。

证明 令 $m=k-3,n=l-k-2$， $\mathbf{T}=[a,b]\cup\{c\}\cup[d,e],-\infty<a<b<c<d<e<\infty$。首先定义谱参数边界条件(4)中的各个参数，为此设 $\alpha_1=-d_{12}$， $\alpha_2=-d_{11}$， $\alpha_3=-d_{1,l-1}$， $\alpha_4=-d_{1l}$， $\alpha_1'=h_{12}$， $\alpha_2'=h_{11}$， $\alpha_3'=h_{1,l-1}$， $\alpha_4'=h_{1l}$， 以及 $\beta_1=-d_{l2}$， $\beta_2=-d_{l1}$， $\beta_3=-d_{l,l-1}$， $\beta_4=-d_{ll}$， $\beta_1'=h_{l2}$， $\beta_2'=h_{l1}$， $\beta_3'=h_{l,l-1}$， $\beta_4'=h_{ll}$。按照(6)定义 $\mathbf{T}=[a,b]\cup\{c\}\cup[d,e]$ 的一个分割。然后构造 $[a,b]\cup\{c\}\cup[d,e]$ 上的分段常值函数 $\overline{p},\overline{q},\overline{w}$，使得满足(7)，(8)。下面定义(7)，(8)中在 $[a,b]\cup\{c\}\cup[d,e]$ 的子区间上不为零的函数值，其中 $\hat{w}=w(c),\hat{q}=q(c)$ 为固定的。为此，令

$$p_i=-d_{i+1,i+2},\ i=1,2,\cdots,m,\quad p_{m+1}=-d_{m+2,m+3}(c-b),$$

$$\hat{p}=-d_{m+3,m+4}(d-c),\ \tilde{p}_j=-d_{j+m+3,j+m+4},\ j=1,2,\cdots,n,$$

$$w_i=h_{i+2,i+2},\ i=0,1,\cdots,m,\quad w_{m+1}=\frac{1}{c-b}h_{m+3,m+3},$$

$$\tilde{w}_0=h_{m+4,m+4}-(d-c)\hat{w},\ \tilde{w}_j=h_{j+m+4,j+m+4},\ j=1,2,\cdots,n,$$

以及

$$q_0=d_{22}-p_1,\ q_i=d_{i+2,i+2}-p_i-p_{i+1},\ i=1,2,\cdots,m-1,$$

$$q_m = d_{m+2,m+2} - p_m - \frac{p_{m+1}}{c-b},\ q_{m+1} = \frac{d_{m+3,m+3}}{c-b} - \frac{p_{m+1}}{(c-b)^2} - \frac{\hat{p}}{(d-c)(c-b)},$$

$$\tilde{q}_j = d_{j+m+4,j+m+4} - \tilde{p}_j - \tilde{p}_{j+1},\ j = 1,2,\cdots,n-1,\ \tilde{q}_n = d_{m+n+4,m+n+4} - \tilde{p}_n,$$

$$\tilde{q}_0 = d_{m+4,m+4} - \frac{\hat{p}}{d-c} - \tilde{p}_1 - (d-c)\hat{q}.$$

则按照(34)定义 $\overline{p}(t),\overline{q}(t),\overline{w}(t)$。这样的函数 $\overline{p},\overline{q},\overline{w}$ 为时标 $\mathbf{T}$ 上满足(7)，(8)的分段常值函数。而方程(35)为 Atkinson 类型的，且将 p,q,w 对应换为 $\overline{p},\overline{q},\overline{w}$ 时满足(9)，可看出问题(36)与问题(20)形式相同。因此，由定理 2.4，矩阵问题(36)与含有谱参数的 S-L 问题(2)-(4)等价。定理剩下部分的证明可由定理 2.6 得出。

■

注：当 $\alpha_3 = \alpha_4 = \beta_1 = \beta_2 = 0$，且 $\alpha_1'\alpha_2 - \alpha_1\alpha_2' \neq 0,\ \beta_1'\beta_2 - \beta_1\beta_2' \neq 0$ 时，含有谱参数的耦合型边界条件就变为分离的情形了。证明如定理 3.1。

致　谢

本文由国家自然科学基金资助项目(11661059, 11301259)；内蒙古自然科学基金项目(2017JQ07)支持。

参考文献 (References)

[1] Binding, P.A., Browne, P.J. and Watson, B.A. (2002) Sturm-Liouville Problems with Boundary Conditions Rationally Dependent on the Eigenparameter, II. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, **148**, 147-168.

[2] Binding, P.A., Browne, P.J. and Watson, B.A. (2000) Inverse Spectral Problems for Strum-Liouville Equations with Eigenparameter-Dependent Boundary Conditions. *Journal of the London Mathematical Society*, **62**, 161-182. https://doi.org/10.1112/S0024610700008899

[3] Akdoğan, Z., Demirci, M. and Mukhtarov, O.Sh. (2007) Green Function of Discontinuous Boundary-Value Problem with Transmission Conditions. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, **30**, 1719-1738. https://doi.org/10.1002/mma.867

[4] Kong, Q., Wu, H. and Zettl, A. (2001) Sturm-Liouville Problems with Finite Spectrum. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **263**, 748-762. https://doi.org/10.1006/jmaa.2001.7661

[5] Kong, Q., Volkmer, H. and Zettl, A. (2009) Matrix Representations of Sturm-Liouville Problems with Finite Spectrum. *Results in Mathematics*, **54**, 103-116. https://doi.org/10.1007/s00025-009-0371-3

[6] Ao, J.J. and Sun, J. (2013) The Matrix Representations of Sturm-Liouville Problems with Eigenparameter-Dependent Boundary Conditions. *Linear Algebra and Its Applications*, **438**, 2359-2365. https://doi.org/10.1016/j.laa.2012.10.018

[7] Ao, J.J. and Sun, J. (2014) Matrix Representations of Sturm-Liouville Problems with Coupled Eigenparamer-Dependent Boundary Conditions. *Applied Mathematics and Computation*, **244**, 142-148. https://doi.org/10.1016/j.amc.2014.06.096

[8] 敖继军, 薄芳珍. 带谱参数边界条件四阶边值问题的矩阵表示[J]. 数学学报, 2017, 60(3): 427-438.

[9] Atkinson, F.V. (1964) Discrete and Continuous Boundary Problems. Academic Press, New York/London.

[10] Kong, Q. (2008) Sturm-Liouville Eigenvalue Problems on Time Scales with Separated Boundary Conditions. *Results in Mathematics*, **52**, 111-121. https://doi.org/10.1007/s00025-007-0277-x

[11] 赵娜. 时标上 Sturm-Liouville 问题的有限谱[J]. 山东大学学报(理学版), 2013, 48(9): 96-102.

[12] Tuna, H. (2016) Completeness Theorem for the Dissipative Sturm-Liouville Operator on Bounded Time Scales. *Indian Journal of Pure and Applied Mathematics*, **47**, 535-544. https://doi.org/10.1007/s13226-016-0196-1

知网检索的两种方式：

1. 打开知网页面 http://kns.cnki.net/kns/brief/result.aspx?dbPrefix=WWJD
   下拉列表框选择：[ISSN]，输入期刊 ISSN：2324-7991，即可查询
2. 打开知网首页 http://cnki.net/
   左侧“国际文献总库”进入，输入文章标题，即可查询