

# Maximal Sum Rule Orders of Subdivision Schemes Based on High-Order Central Difference Type Offset Vectors

Zhiyong Mao, Wanfeng Qi, Lihong Cui

School of Mathematics, Liaoning Normal University, Dalian Liaoning  
Email: 2312931973@qq.com, qiwf@lnnu.edu.cn, 2458416309@qq.com

Received: Feb. 7<sup>th</sup>, 2018; accepted: Feb. 21<sup>st</sup>, 2018; published: Feb. 28<sup>th</sup>, 2018

---

## Abstract

Subdivision method is a powerful tool for curve modeling. A popular method to construct a new subdivision scheme is to add central difference type offset vector to the initial subdivision scheme. This paper investigates maximal orders of sum rule of subdivisions constructed from high-order central difference type offset vectors.

## Keywords

Subdivision Scheme, Sum Rule Order, Offset Vector, High-Order Central Difference

---

# 高阶中心差分偏移量方法构造细分求和规则阶数问题

毛智永, 亓万锋, 崔利宏

辽宁师范大学数学学院, 辽宁 大连  
Email: 2312931973@qq.com, qiwf@lnnu.edu.cn, 2458416309@qq.com

收稿日期: 2018年2月7日; 录用日期: 2018年2月21日; 发布日期: 2018年2月28日

---

## 摘要

曲线细分是曲线造型的有力工具。采用添加差分形式的偏移量是构造细分格式的一种重要方法。本文讨论了采用高阶中心差分形式的偏移量所能够构造的细分格式求和规则的最高阶数问题。

## 关键词

细分格式, 求和规则, 偏移量, 高阶中心差分

Copyright © 2018 by authors and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

## 1. 引言

曲线细分是一种从初始控制多边得到光滑曲线的迭代格式。通过迭代可以设计出合适的曲线, 光滑度较高, 因而得到了广泛应用。

近年来, 采用通过添加偏移量的形式构造新的细分格式吸引了众多学者的注意[1] [2] [3] [4]。偏移量是组合系数和为零的同层的相邻几个顶点的线性组合。在已有细分迭代规则的基础上加上偏移量做调整, 既可以从逼近型细分构造插值型细分[1] [2] [3], 又可以从插值型细分构造逼近型细分[4]。上述工作局限于单个细分格式, 没有从理论上对这种方法进行探讨。Luo 等[5]指出添加偏移量的操作对应的是在原细分生成函数基础上加上一个 Laurent 多项式。求和规则是细分的基本性质[6] [7] [8], 元万锋等[8]分析了采用二阶中心差分形式的偏移量所能达到的最高阶求和规则的问题。本文将[8]的结论推广, 考虑了高阶中心差分是否能够达到最高阶求和规则的问题。

## 2. 预备知识

细分格式是从给定的初始控制顶点集  $\mathbf{P}^0 = \{p_i^0 \in \mathbb{R}^d\}_{i \in \mathbb{Z}}$  和一个正整数  $m$ , 利用有限个数  $\mathbf{a} = \{a_i\}_{i \in \mathbb{Z}} \in l_0(\mathbb{Z})$ ,  $l_0(\mathbb{Z})$  代表  $\mathbb{Z}$  上支撑有限的序列的集合, 通过迭代格式

$$p_i^k = \sum_{j \in \mathbb{Z}} a_{i-mj} p_j^{k-1}, \quad i \in \mathbb{Z}, k = 1, 2, \dots \quad (1)$$

迭代  $k$  次后得到控制顶点集合  $\mathbf{P}^k = \{p_i^k \in \mathbb{R}^d\}_{i \in \mathbb{Z}}$  的一种造型方法, 其中  $m$  称为重数,  $\mathbf{a} = \{a_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$  称为细分掩模, 对应的 Laurent 多项式  $\tilde{a}(z) = \sum_{i \in \mathbb{Z}} a_i z^i$ ,  $z \in (\mathbb{C} \setminus \{0\})$  称为细分生成函数[8]。

给定  $m$  重细分掩模  $\mathbf{a} = \{a_i\}_{i \in \mathbb{Z}} \in l_0(\mathbb{Z})$ , 记  $\text{supp } \mathbf{a} = \{i \in \mathbb{Z}, a_i \neq 0\}$ 。在实际应用中, 往往使用对称的生成函数即细分掩模满足  $a_i = a_{-i}, i \in \mathbb{Z}$ , 显然生成函数是对称的当且仅当  $\tilde{a}(z) = \tilde{a}(z^{-1})$ 。长度为  $s$  的列向量  $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \dots, v_s)^T$  称为中心对称的, 如果满足  $v_i = v_{s+1-i}, i = 1, \dots, s$ 。显然对称的生成函数的系数组成的列向量是中心对称向量。

细分格式可以分为插值型和逼近型两种格式, 插值型细分每次迭代时保留上一次的控制顶点, 其细分掩模满足  $a_{mi} = \delta_i$ 。若细分格式不是插值型的, 则称为逼近型细分。

称  $m$  重细分格式  $\tilde{a}(z)$  满足  $k$  阶求和规则, 如果  $\tilde{a}(1) = m$  且  $\tilde{a}(z)$  含有因式  $(1+z+\dots+z^{m-1})^k$ 。易见当  $\tilde{a}(z)$  满足一阶求和规则时, 有  $\sum_i a_{mi} = \sum_i a_{mi+l} = 1, 0 \leq l < m$  成立。

## 3. 主要结果

在这一节里, 我们讨论添加偏移量是  $2n$  阶中心差分, 所构造的细分格式能否达到最高阶求和规则

的问题。

给定第  $k-1$  层上的控制顶点集合  $\mathbf{P}^{k-1} = \{p_j^{k-1} \in \mathbb{R}^d\}_{j \in \mathbb{Z}}$ ，在顶点  $p_j^{k-1}$  处的  $2n$  阶中心差分是

$$\delta^{2n} p_j^{k-1} = \sum_{i=0}^{2n} (-1)^i \binom{2n}{i} p_{j+n-i}^{k-1}$$

例如在  $p_j^{k-1}$  处的二阶中心差分是  $\delta^2 p_j^{k-1} = p_{j-1}^{k-1} - 2p_j^{k-1} + p_{j+1}^{k-1}$ ，四阶中心差分是  $\delta^4 p_j^{k-1} = p_{j-2}^{k-1} - 4p_{j-1}^{k-1} + 6p_j^{k-1} - 4p_{j+1}^{k-1} + p_{j+2}^{k-1}$ 。

添加偏移量的方法是在原细分格式的基础上添加偏移量。在给定原细分格式

$$P_{mi+l}^k = \sum_{j \in \mathbb{Z}} a_{mi+l-mj} p_j^{k-1}, \quad i \in \mathbb{Z}, l = 0, 1, \dots, m-1$$

的顶点  $P_{mi+l}^k$  处添加  $2n$  阶中心差分  $\sum_{j \in \mathbb{Z}} c_{mi+l-mj} \delta^{2n} p_j^{k-1}$ ，即

$$P_{mi+l}^k = \sum_{j \in \mathbb{Z}} a_{mi+l-mj} p_j^{k-1} + \sum_{j \in \mathbb{Z}} c_{mi+l-mj} \delta^{2n} p_j^{k-1}$$

相应的生成函数变为原生成函数加上对应偏移量的 Laurent 多项式

$$\tilde{d}(z) = \sum_{l=0}^{m-1} \sum_{j \in \mathbb{Z}} c_{mi+l-mj} z^{mi+l-mj-nm} (1-z^m)^{2n}. \quad (2)$$

下面我们分析  $\tilde{d}(z)$  在满足限定条件时，所含自由系数的个数。

**引理 3.1** 若对称的 Laurent 多项式  $\tilde{d}(z) = \sum_{l=0}^{m-1} \sum_{j \in \mathbb{Z}} c_{mi+l-mj} z^{mi+l-mj-nm} (1-z^m)^{2n}$  的最高幂次是  $r$ ，则  $\tilde{d}(z)$  中自由系数个数是  $r - nm + 1$ 。

证：

$$\begin{aligned} \tilde{d}(z) &= \sum_{l=0}^{m-1} \sum_{j \in \mathbb{Z}} c_{mi+l-mj} z^{mi+l-mj-nm} (1-z^m)^{2n} \\ &= \sum_{l=0}^{m-1} \sum_{j \in \mathbb{Z}} c_{mi+l-mj} z^{mi+l-mj-nm} (1-z)^{2n} (1+z+\dots+z^{m-1})^{2n} \\ &= z^{-nm} (1-z)^{2n} (1+z+\dots+z^{m-1})^{2n} \sum_{l=0}^{m-1} \sum_{j \in \mathbb{Z}} c_{mi+l-mj} z^{mi+l-mj} \end{aligned}$$

因为  $\tilde{d}(z)$  和  $z^{-nm} (1-z)^{2n} (1+z+\dots+z^{m-1})^{2n}$  是对称的 Laurent 多项式，所以  $\sum_{l=0}^{m-1} \sum_{j \in \mathbb{Z}} c_{mi+l-mj} z^{mi+l-mj}$  也是对称的 Laurent 多项式。注意到  $\tilde{d}(z)$  的最高次数是  $mi+l-mj$  的最大值与  $nm$  的和。因此当限制  $\tilde{d}(z)$  的最高次数是  $r$  时，此时  $c_{mi+l-mj}$  中下标  $mi+l-mj$  的最大值是  $r - nm$ 。因此， $\tilde{d}(z)$  具有的自由系数个数是  $r - nm + 1$ 。证毕。

由引理 3.1 可知，当给定  $m$  重的细分生成函数  $\tilde{a}(z)$  后，如果限定  $\tilde{d}(z)$  的最高幂次是  $r$ ，则组成  $\tilde{d}(z)$  的中心差分的阶数应小于等于  $2r/m$ 。

下面的定理给出了当采用中心差分形式的偏移量能够达到最高阶和规则的  $\tilde{a}(z)$  的形式。

**定理 3.2** 若限定  $m$  重对称的细分掩模  $\tilde{a}(z)$  和  $2n$  阶中心差分形式的偏移量  $\tilde{d}(z)$  的最高幂次是  $r$ ，且  $\tilde{a}(z) + \tilde{d}(z)$  能具有支撑在  $[-r, r]$  上生成函数的最高阶和规则，则  $\tilde{a}(z)$  至少具有  $2n$  阶和规则。设  $\tilde{b}(z)$  是支撑在  $[-r, r]$  的对称生成函数中求和规则最高，则  $\tilde{a}(z)$  具有形式

$\tilde{a}(z) = \tilde{b}(z) - z^{-nm} (1-z)^{2n} (1+z+\dots+z^{m-1})^{2n} \sum_{l=0}^{m-1} \sum_{j \in \mathbb{Z}} c_{mi+l-mj} z^{mi+l-mj}$ ，系数  $\{c_{mi+l-mj}, j \in \mathbb{Z}\}$  自由的个数为  $r - nm + 1$ 。

证：根据文献[8]中的定理 2.1，在  $[-r, r]$  上存在具有最高阶求和规则的对称的生成函数，记为  $\tilde{b}(z)$ ，则当限定采用的偏移量是  $2n$  阶中心差分， $\tilde{a}(z) = \tilde{b}(z) - \tilde{d}(z)$ ， $\text{supp } \tilde{d} \subset [-r, r]$ ，因此  $\tilde{b}(z)$  的求和规则至少是  $2n$  阶，同时  $\tilde{d}(z)$  含有因子  $(1+z+\dots+z^{m-1})^{2n}$ ，因而  $\tilde{a}(z)$  至少具有  $2n$  阶求和规则。

代入  $\tilde{d}(z)$  的形式有  $\tilde{a}(z) = \tilde{b}(z) - z^{-nm} (1-z)^{2n} (1+z+\dots+z^{m-1})^{2n} \sum_{l=0}^{m-1} \sum_{j \in \mathbb{Z}} c_{mi+l-mj} z^{mi+l-mj}$ ，在对称的  $\tilde{b}(z)$  固定的情形下，由引理 3.1 知自由系数个数  $\{c_{mi+l-mj}, j \in \mathbb{Z}\}$  为  $r - nm + 1$ 。

**推论 3.3** 在定理 3.2 的条件下，当  $n=1$  时， $\tilde{a}(z)$  自由系数个数与  $\tilde{d}(z)$  自由系数个数一致；当  $n > 1$  时， $\tilde{a}(z)$  自由系数个数大于  $\tilde{d}(z)$  自由系数个数。

证：首先  $\tilde{a}(z)$  自由系数个数是  $r - nm + n$ 。这是因为  $\tilde{a}(z)$  可分解为  $\tilde{a}(z) = mz^{-n(m-1)} m^{-2n} (1+z+\dots+z^{m-1})^{2n} \tilde{a}_1(z)$ 。由  $\tilde{a}(z)$  和  $mz^{-n(m-1)} (1+z+\dots+z^{m-1})^{2n}$  的对称性知  $\tilde{a}_1(z)$  也是对称的。易得  $\tilde{a}_1(z)$  的最高次数是  $r - n(m-1) = r - nm + n$ ，而  $\tilde{a}_1(z)$  的系数和是 1，因此  $\tilde{a}(z)$  自由系数个数是  $r - nm + n$ 。

当  $n=1$  即采用二阶中心差分，对任何对称的细分掩模  $\tilde{a}(z)$  具有的自由系数个数与  $\tilde{d}(z)$  自由系数一致。当  $n > 1$  时， $\tilde{a}(z)$  自由系数个数是  $r - nm + n > r - nm + 1$ ，即大于  $\tilde{d}(z)$  的自由系数个数。证毕。

推论 3.2 从另一个方面表明若  $\tilde{a}(z)$  不具有定理 3.2 中的形式时，则不能通过添加  $2n$  阶中心差分的形式得到最高阶和规则。例对具有四阶求和规则的二重细分生成函数

$$\tilde{a}(z) = \frac{(1+z)^4 (132 - 464z + 880z^2 - 1091z^3 + 880z^4 - 464z^5 + 132z^6)}{40z^5}$$

，最高幂次  $r=5$ ，计算知支撑在  $[-5, 5]$

上具有最高阶和规则的逼近型细分和插值型细分的生成函数分别是  $\frac{(1+z)^{10}}{512z^5}$  和

$$\frac{(1+z)^6 (3 - 18z + 38z^2 - 18z^3 + 3z^4)}{256z^5}$$

。若采用四阶中心差分形式的偏移量

$$\tilde{d}(z) = \frac{(1-z)^4 (1+z)^4 (d_1 + zd_0 + z^2 d_1)}{z^5}$$

，则无论  $d_0, d_1$  取何值， $\tilde{a}(z) + \tilde{d}(z)$  都无法得到  $\frac{(1+z)^{10}}{512z^5}$  或

$$\frac{(1+z)^6 (3 - 18z + 38z^2 - 18z^3 + 3z^4)}{256z^5}$$

。原因在于  $\frac{(1+z)^{10}}{512z^5} - \tilde{a}(z)$  和  $\frac{(1+z)^6 (3 - 18z + 38z^2 - 18z^3 + 3z^4)}{256z^5} - \tilde{a}(z)$

中因式  $1-z$  的幂次都是 2，不是 4。

当采用的是 2 阶中心差分即  $n=1$  时，我们可以得到相应的线性方程组的形式：

**定理 3.4** 对任意正奇数  $s$  和中心对称列向量  $b$ ，且向量  $b$  所有元素的和为 0，系数矩阵  $A$  满足

$$A = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ -2 & 1 & & & & & \\ 1 & -2 & 1 & & & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & & \\ & & & 1 & -2 & 1 & \\ & & & & 1 & -2 & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix}_{(s+2) \times s}$$

则线性方程组  $Ax = b$  有中心对称解。

证：对任意正奇数  $s$ ，利用中心对称的向量  $b$ ，构造一个 Laurent 多项式

$$\tilde{b}(z) = b_{-(s+1)}z^{-(s+1)} + \cdots + b_{s+1}z^{s+1}.$$

显然 $\tilde{b}(z)$ 的系数和为0, 即 $\tilde{b}(1)=0$ 。 $\tilde{b}(z)$ 的系数是对称的, 由文献[8]知 $\tilde{b}'(1)=0$ 。因此 $\tilde{b}(z)$ 含有因子 $z^{-1}(1-z)^2$ ,  $\tilde{b}(z)$ 可以分解为 $\tilde{b}(z) = z^{-1}(1-z)^2(x_{-s}z^{-s} + \cdots + x_s z^s)$ 。由 $\tilde{b}(z)$ 的系数对应关系可知,  $x = (x_{-s}, \cdots, x_s)^T$ 就是该线性方程组的解。由 $\tilde{b}(z)$ 和 $z^{-1}(1-z)^2$ 的对称性知 $x$ 是中心对称的。

## 资助信息

国家自然科学基金(No. 61502217), 辽宁省教育厅科研项目(L20168366)。

## 参考文献 (References)

- [1] Maillot, J. and Stam, J. (2001) A Unified Subdivision Scheme for Polygonal Modeling. *Computer Graphics Forum*, **20**, 471-479. <https://doi.org/10.1111/1467-8659.00540>
- [2] Lin, S., et al. (2013) A New Interpolation Subdivision Scheme for Triangle/Quad Mesh. *Graphical Models*, **75**, 247-254. <https://doi.org/10.1016/j.gmod.2013.03.002>
- [3] Pan, J., Chen, K. and Chen, Q. (2012) Shape-Controlled Ternary Interpolating Subdivision Scheme Based on Approximating Subdivision. 2012 *IEEE 4th International Conference on Digital Home (ICDH)*, 23-25 November 2012, Guangzhou. <https://doi.org/10.1109/ICDH.2012.33>
- [4] 檀结庆, 童广悦, 张莉. 基于插值细分的逼近细分法[J]. 计算机辅助设计与图形学学报, 2015(7): 1162-1166.
- [5] Luo, Z. and Qi, W. (2013) On Interpolatory Subdivision from Approximating Subdivision Scheme. *Applied Mathematics and Computation*, **220**, 339-349. <https://doi.org/10.1016/j.amc.2013.06.025>
- [6] Jiang, Q.T., Oswald, P. and Riemenschneider, S.D. (2003) Square Root 3-Subdivision Schemes: Maximal Sum Rule Orders. *Constructive Approximation*, **19**, 437-463. <https://doi.org/10.1007/s00365-002-0521-2>
- [7] Han, B. and Jia, R.Q. (1998) Optimal Interpolatory Subdivision Schemes in Multidimensional Spaces. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, **36**, 105-124. <https://doi.org/10.1137/S0036142997325611>
- [8] 元万锋, 王金玲. 偏移量构造细分格式的最高求和规则[J]. 辽宁师范大学学报(自然科学版), 2017, 40(1): 14-19.

### 知网检索的两种方式:

1. 打开知网页面 <http://kns.cnki.net/kns/brief/result.aspx?dbPrefix=WWJD>  
下拉列表框选择: [ISSN], 输入期刊 ISSN: 2324-7991, 即可查询
2. 打开知网首页 <http://cnki.net/>  
左侧“国际文献总库”进入, 输入文章标题, 即可查询

投稿请点击: <http://www.hanspub.org/Submission.aspx>

期刊邮箱: [aam@hanspub.org](mailto:aam@hanspub.org)